国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

中外物理学精品书系

前沿系列 · 10

# 从孤立波到湍流

## ——非线性波的动力学

贺凯芬 著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

中外物理学精品书系 · 前沿系列 10

# 从孤立波到湍流——非线性波的动力学

**贺凯芬** 研究员。1966年毕业于中国科学技术大学近代物理系。1970—1979年在第二机械工业部西南物理研究所从事受控热核聚变与等离子体物理研究，1979年后在北京师范大学低能核物理研究所从事非线性科学与等离子体物理研究。其间曾于1982—1984年和1987—1988年在联邦德国马克斯–普朗克等离子体物理研究所客座研究，2002年在澳大利亚阿德莱德大学客座研究。曾主持和参与国家自然科学基金、国家基础研究重大项目（攀登计划和973计划）基金以及教育部博士点专项科研基金等支持的多个项目研究。1999年获国家自然科学奖三等奖，1997年获国家教育委员会科学技术进步奖三等奖，1999年获国家教育部科学技术进步奖一等奖。

ISBN 978-7-301-19458-4

9 787301 194584 >

定价：52.00元

国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

中 外 物 理 学 精 品 书 系

前 沿 系 列 · 10

# 从孤立波到湍流

## ——非线性波的动力学

贺凯芬 著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

**图书在版编目(CIP)数据**

从孤立波到湍流:非线性波的动力学/贺凯芬著.—北京:北京大学出版社,2011.10
(中外物理学精品书系)
ISBN 978-7-301-19458-4

Ⅰ.①从…　Ⅱ.①贺…　Ⅲ.①非线性波-动力学　Ⅳ.①0534

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 183361 号

书　　　名:**从孤立波到湍流**——非线性波的动力学
著作责任者:贺凯芬　著
责 任 编 辑:王剑飞
标 准 书 号:ISBN 978-7-301-19458-4/O·0854
出 版 发 行:北京大学出版社
地　　　址:北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　　址:http://www.pup.cn
电　　　话:邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62765014
　　　　　　出版部 62754962
电 子 邮 箱:zpup@pup.pku.edu.cn
印　刷　者:北京中科印刷有限公司
经　销　者:新华书店
　　　　　　730 毫米×980 毫米　16 开本　19 印张　彩插 2　300 千字
　　　　　　2011 年 10 月第 1 版　2011 年 10 月第 1 次印刷
定　　　价:52.00 元

---

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容.
**版权所有,侵权必究**
举报电话:010-62752024　电子邮箱:fd@pup.pku.edu.cn

# 序　　言

物理学是研究物质、能量以及它们之间相互作用的科学。她不仅是化学、生命、材料、信息、能源和环境等相关学科的基础，同时还是许多新兴学科和交叉学科的前沿。在科技发展日新月异和国际竞争日趋激烈的今天，物理学不仅囿于基础科学和技术应用研究的范畴，而且在社会发展与人类进步的历史进程中发挥着越来越关键的作用。

我们欣喜地看到，改革开放三十多年来，随着中国政治、经济、教育、文化等领域各项事业的持续稳定发展，我国物理学取得了跨越式的进步，做出了很多为世界瞩目的研究成果。今日的中国物理正在经历一个历史上少有的黄金时代。

在我国物理学科快速发展的背景下，近年来物理学相关书籍也呈现百花齐放的良好态势，在知识传承、学术交流、人才培养等方面发挥着无可替代的作用。从另一方面看，尽管国内各出版社相继推出了一些质量很高的物理教材和图书，但系统总结物理学各门类知识和发展，深入浅出地介绍其与现代科学技术之间的渊源，并针对不同层次的读者提供有价值的教材和研究参考，仍是我国科学传播与出版界面临的一个极富挑战性的课题。

为有力推动我国物理学研究、加快相关学科的建设与发展，特别是展现近年来中国物理学者的研究水平和成果，北京大学出版社在国家出版基金的支持下推出了《中外物理学精品书系》，试图对以上难题进行大胆的尝试和探索。该书系编委会集结了数十位来自内地和香港顶尖高校及科研院所的知名专家学者。他们都是目前该领域十分活跃的专家，确保了整套丛书的权威性和前瞻性。

这套书系内容丰富，涵盖面广，可读性强，其中既有对我国传统物理学发展的梳理和总结，也有对正在蓬勃发展的物理学前沿的全面展示；既引进和介绍了世界物理学研究的发展动态，也面向国际主流领域传播中国物理的优秀专著。可以说，《中外物理学精品书系》力图完整呈现近现代世界和中国物理

科学发展的全貌，是一部目前国内为数不多的兼具学术价值和阅读乐趣的经典物理丛书。

《中外物理学精品书系》另一个突出特点是，在把西方物理的精华要义“请进来”的同时，也将我国近现代物理的优秀成果“送出去”。物理学科在世界范围内的重要性不言而喻，引进和翻译世界物理的经典著作和前沿动态，可以满足当前国内物理教学和科研工作的迫切需求。另一方面，改革开放几十年来，我国的物理学研究取得了长足发展，一大批具有较高学术价值的著作相继问世。这套丛书首次将一些中国物理学者的优秀论著以英文版的形式直接推向国际相关研究的主流领域，使世界对中国物理学的过去和现状有更多的深入了解，不仅充分展示出中国物理学研究和积累的“硬实力”，也向世界主动传播我国科技文化领域不断创新的“软实力”，对全面提升中国科学、教育和文化领域的国际形象起到重要的促进作用。

值得一提的是，《中外物理学精品书系》还对中国近现代物理学科的经典著作进行了全面收录。20 世纪以来，中国物理界诞生了很多经典作品，但当时大都分散出版，如今很多代表性的作品已经淹没在浩瀚的图书海洋中，读者们对这些论著也都是“只闻其声，未见其真”。该书系的编者们在这方面下了很大工夫，对中国物理学科不同时期、不同分支的经典著作进行了系统的整理和收录。这项工作具有非常重要的学术意义和社会价值，不仅可以很好地保护和传承我国物理学的经典文献，充分发挥其应有的传世育人的作用，更能使广大物理学人和青年学子切身体会我国物理学研究的发展脉络和优良传统，真正领悟到老一辈科学家严谨求实、追求卓越、博大精深的治学之美。

温家宝总理在 2006 年中国科学技术大会上指出，“加强基础研究是提升国家创新能力、积累智力资本的重要途径，是我国跻身世界科技强国的必要条件”。中国的发展在于创新，而基础研究正是一切创新的根本和源泉。我相信，这套《中外物理学精品书系》的出版，不仅可以使所有热爱和研究物理学的人们从中获取思维的启迪、智力的挑战和阅读的乐趣，也将进一步推动其他相关基础科学更好更快地发展，为我国今后的科技创新和社会进步做出应有的贡献。

《中外物理学精品书系》编委会　主任

中国科学院院士，北京大学教授

**王恩哥**

2010 年 5 月于燕园

# 内容简介

本书是讨论非线性波的动力学的一本专著.全书约30万字,共分10章.

第一章是引言.第二章讨论了线性波和非线性波的一些基本概念.第三章介绍了从流体和等离子体实际系统中导出的几个著名非线性波动方程,书中用于分析非线性波的动力学的主要模型就是在其中一些方程基础上建立的.第四章和第五章分别扼要地介绍了哈密顿系统和耗散系统的非线性动力学,它们是本书用于分析非线性波的动力学的理论基础.第六章讨论了波-波相互作用系统.第七章及以后各章讨论了依赖于空间变量的非线性演化方程的动力学,在这几章中通过实例分析了定态波失稳并逐步发展为弱湍和强湍的途径,以及在不同状态下非线性波动系统的动力学现象和规律.

本书注重理论联系实际,内容深入浅出,图文并茂.

# 前　言

大约从 20 世纪 70 年代开始，在科学殿堂中写有“非线性科学”的这扇大门渐渐开启，向物理、化学、生物乃至所有自然科学领域的学者提出了同一个问题：宇宙万物的运动从简单到复杂的转变，遵循的是同样的一些规律吗？譬如，支配流体从有规波动到湍流运动的规律，与支配振子从简单振动到混沌运动的规律之间，没有什么本质的区别吗？在回答这些问题的过程中，一个共识形成了：决定性的系统有可能产生混沌运动. 应该说，这是对自然规律认识上的一大飞跃，而这种基本观点上的飞跃在科学史上并不多见.

自 80 年代前期开始，陆续从国外归来的学者中，一些人不约而同地将研究目光聚焦在非线性科学上. 有一个时期，大家频繁地聚会，不拘形式，不论长幼尊卑，为了概念上的一个疑问，激辩不休. 对中国科学家来说那是一个充满激情的年代，一个科学上颇为纯真的年代.

笔者有幸亲历了这个时代. 20 世纪 70 年代末开始接触非线性方面的课题，关注流体和等离子体中的孤立子现象，后来到联邦德国的马克斯-普朗克等离子体物理所学术访问，先后合作研究了波-波相互作用和非线性漂移波等课题. 后者是一个包含了时间和空间变量的非线性动力学问题，数值模拟结果出乎意料地有趣，一些波动解显示出强湍流的特征，而且它们出现的参数区还表现出某种规律. 回国后因条件所限，笔者一度转而研究关于微分方程解的一般性质方面. 此后，关于漂移波湍流的研究工作再度提上日程. 不过在相当长的一段时间内，对于如何解释数值模拟中观察到的现象，可以说是既漫无头绪又欲罢不能. 只是在摆正了参照系以后，研究工作才开始获得进展，非线性色散关系的建立及其结果与数值模拟的符合，使笔者自信已步入了正确的路径. 此后，按照非线性动力学理论的指引，模拟从孤立波到弱湍和强湍形式解的一些主要现象，陆陆续续地得到了合理的解释.

我们知道，在流体、等离子体、光学以及固体等系统中出现的孤立子这样的空间相干波动现象，早已在非线性的基础上获得了满意的解释，这方面的理

论已经比较成熟;除此之外,这些系统中还允许出现随时间和空间呈复杂变化的波动,如湍流形式的解,一般认为,这些现象也与非线性效应有关. 在这些领域中分别导出过一些非线性波动方程,对这些方程的数值模拟也证实了这一点. 近年来出版的有关非线性波的专著通常都专门辟出章节介绍时序系统非线性动力学理论,以帮助理解这些复杂波动现象出现的原因. 不过,非线性动力学一般侧重于讨论少自由度的时序系统,它能否真正解释波动系统这样的无穷维相空间中的非线性现象还是一个问题. 20 世纪 80 年代前期在国际上兴起的所谓时空混沌课题要解决的核心问题之一,就是如何将其理论推广应用于分析波动系统中的复杂现象,理解湍流,特别是强湍流产生的原因,这也是笔者撰写本书的初衷.

本书中非线性波动的例子多来源于等离子体系统,但书中重点讨论的一些方程也完全适用于流体表面波. 事实上,在自然科学的各个研究领域中,非线性问题在流体系统中是最早受到关注的,而等离子体物理则是与非线性动力学走得最近的学科之一. 自从半个多世纪前人类开始试图控制等离子体以来,就一直为它的各种不稳定性所困扰,等离子体中非线性现象之丰富在各个学科中也堪称首屈一指. 另一方面,非线性动力学作为研究非线性系统运动共同规律的一个学科,业已形成了独立和比较系统的理论体系,这个学科带着深深的数学印记,它不受实证的约束,按照自己的逻辑发展. 这难免让一些人对其产生疏离感,宁愿"上帝的归上帝,凯撒的归凯撒". 然而诡异的是,一个不受实证束缚的学科,它找到的许多规律却在包括物理学、化学、生物学等自然科学领域的观察中屡屡获得证实. 我们的研究也说明,即使像强湍流那样复杂的波动现象,也没有脱离非线性动力学理论的基本框架. 线性微扰论已经伴随我们走过了几百年,非线性的世界更为广阔和复杂,有更多的奥秘等待我们去探索.

感谢刘寄星教授、夏建白院士,如果不是他们的鼓励,笔者可能没有勇气开始这项并不轻松的工作. 感谢国家基础研究重大项目"非线性科学"、国家自然科学基金和教育部博士点科学研究基金的资助,我们的研究工作多是这些基金的支持下完成的. 感谢 D. Biskamp 博士和 A. Salat 博士,他们渊博的知识、探索未知世界的热情和严谨的作风都使我受益匪浅. 感谢胡岗教授和其他一些同行,笔者深深受惠于与他们的学术合作和有启发性的讨论;巴西国家空间研究所的 A. Chian 教授在笔者退休后提供了国际合作研究的机会,他对非线性理论的理解和结合实际研究的经验都给我很大的帮助. 刘寄星教授对本书的初稿提出过宝贵的意见,其他一些同事在学术观点的讨论和资料搜集等

方面也曾给笔者许多帮助,在这里也一并致谢.笔者在将资料汇集成册的过程中,尽管常常为如何理解某些概念而斟酌再三,然水平所限,对于尚存的错误和不妥之处,还望读者不吝赐教.

贺凯芬

2009 年 7 月于北京

# 目　　录

**第一章　引　言** ………………………………………… 1
**第二章　波动的基本概念** ………………………………… 9
　§2.1　线性波 ………………………………………… 9
　§2.2　非线性波 ……………………………………… 13
　§2.3　等离子体中的线性波 ………………………… 23
**第三章　实际系统中的非线性波** ………………………… 31
　§3.1　流体力学方程的内禀非线性 ………………… 31
　§3.2　描写浅水波的 KdV 方程和正规长波方程 …… 32
　§3.3　等离子体和中性流体中的几个非线性波方程 … 38
**第四章　时序系统非线性动力学简介(I)——哈密顿系统** … 58
　§4.1　哈密顿系统理论 ……………………………… 59
　§4.2　不变环对扰动的响应 ………………………… 71
**第五章　时序系统非线性动力学简介(II)——耗散系统** … 83
　§5.1　耗散系统的相空间 …………………………… 83
　§5.2　不动点的稳定性分析 ………………………… 86
　§5.3　耦合非线性复振子系统 ……………………… 92
　§5.4　通向混沌的途径 ……………………………… 95
　§5.5　非线性振子的相同步现象 …………………… 107
　§5.6　混沌吸引子和混沌鞍 ………………………… 113
　§5.7　时空混沌和湍流 ……………………………… 115
**第六章　波-波相互作用** ………………………………… 119
　§6.1　保守的波-波相互作用 ……………………… 119
　§6.2　耗散的波-波相互作用 ……………………… 129
　§6.3　空间展宽的波-波相互作用系统中的能量级联 … 142
**第七章　空间相干和非相干波动解** ……………………… 146
　§7.1　保守系统 ……………………………………… 147
　§7.2　耗散系统 ……………………………………… 159

**第八章　定态波解的稳定性分析** …… 176
§8.1　斑图选择 …… 177
§8.2　定态波解的稳定性分析 …… 181
§8.3　波动系统的矢量空间 …… 197
**第九章　弱湍动力学** …… 208
§9.1　从定态波解的分岔序列 …… 209
§9.2　拓扑环的奇点和波动中的阵发现象 …… 217
§9.3　波动系统中的相同步 …… 222
**第十章　向强湍的激变和强湍动力学** …… 231
§10.1　强湍流现象 …… 231
§10.2　鞍型定态波解的稳定和不稳定轨道 …… 237
§10.3　鞍点在向强湍激变中的作用 …… 241
§10.4　激变前后的波动状态 …… 257
**结束语** …… 278
**参考文献** …… 280

# 第一章 引　　言

波动是自然界中广泛存在的一种集体运动现象. 所谓集体运动，在微观层次上指的是系统中不同粒子的运动之间存在相关，对于宏观上的连续介质则是指不同空间点上的运动之间存在相关，这种相关可以是短程的也可以是长程的，例如每个粒子的运动可能仅与其近邻粒子的运动相关，也可能与系统中所有粒子的运动都相关.

生活中最容易观察到的波动现象莫过于流体表面波，古往今来，人们对各种表面波现象有过大量观察和描述，南唐诗人冯延巳留下千古名句："风乍起，吹皱一池春水"，说的是原本平滑如镜的水面，在风这个外力的作用下失去了稳定性，出现了如丝绸皱起般较为规则的小幅波动. 15 世纪意大利的达·芬奇用他的画笔描绘了最为复杂的波动现象——流体湍流，画中大涡套着小涡，小涡中套更小的涡……，生动而又细致入微.

现在人们知道，波动可以出现在各种介质中，如声波是一种密度波，在气体、液体和固体等介质中都有可能传播；又如，在带电粒子系统中经常观察到的静电波和电磁波是与带电粒子运动有关的场的波动；在两种或两种以上的物质产生化学反应的同时如果还存在扩散，那么原本均匀分布的特定成分就可能出现浓度甚至颜色的周期性改变，这也属于集体运动现象；在最复杂的生命系统中也不乏波的运动，众所周知，高级思维活动是脑电波的运动，而心肌梗塞则与在心肌运动中触发了螺旋波有关.

非线性在波动中常常起着非常重要的作用，这一认识始于 19 世纪为解释流体介质中出现的孤立子现象所做的努力. 孤立子是一种质量或能量在空间高度局域化的传播运动，1895 年 Korteweg 和 de Vries 建立了一个包含有色散和非线性项的传播方程，后来被称为 Korteweg-de Vries（KdV）方程，成功地解释了这一现象[1]. 除孤立子外，波动中很多常见的相干波动现象，如激波、涡旋、纽结子、呼吸子以及其他形形色色时空斑图，还有双稳态和多稳态，都相继被证明是有非线性参与的结果，用恰当的非线性偏微分方程可以描述这些现象.

在波动世界中，最引人入胜的当属湍流，湍流是这样一种现象，它的一些可测量量（例如水流的局域速度）随空间和（或）时间非常迅速地变化[2]，湍流的波形和幅度变幻莫测，表现出很强的随机性. 科学家思考湍流问题已有很长历史了，他们通过大量观测、实验和理论研究寻找到了流体湍流运动的许多规律[3]，也发展出了

有关的统计理论[4]. 除普通流体湍流外，由带电粒子组成的等离子体中也存在丰富的湍流现象，等离子体较之普通流体在物理上要复杂得多，所幸的是，这样的系统在数学上反而更容易处理. 近几十年来人们对湍流的认识随着等离子体物理学的发展不断加深[5]，然而对于湍流起因问题，特别是涨落场能量与粒子热能可比情况下强湍流的起因，迄今仍未能做出回答，以至被视为“连续介质物理中最后一个尚未解决的问题”[6]，或“经典物理学最后的疑团”.

传统上应用 Navier-Stokes 方程讨论普通流体湍流[3]，在等离子体物理领域，人们也常用其流体描述[7]表现湍流现象，这方面有大量数值模拟的例子. 这些模拟中采用的方程是决定性的，不含随机项，但包含非线性. 因此为探讨湍流起因，值得深入研究与普通流体和等离子体流体有关的非线性系统的动力学. 目前发展得比较成熟的非线性动力学理论大多局限于讨论仅依赖于时间的系统，即所谓的时序系统的非线性动力学. 这个理论特别着力研究在远离平衡态时系统表现出来的各种复杂非线性现象和规律，一个重要结论是：决定性的非线性系统可以出现混沌运动[8~10]. 在流体和等离子体湍流中物理量随时间和空间变化，这是一种时空混沌现象，与一般时序系统中的混沌运动不同. 不过我们不必过分强调这个差别，因为非线性相互作用将流体波动中不同尺度的运动连接起来，人们总可以用制约各种尺度运动的一组常微分方程尽可能精确地描述湍流现象[11]. 在本书中将看到，时序系统的非线性动力学理论仍然可以成为我们分析非线性波的动力学问题的基础，当涉及空间变量时，非线性系统的确会表现出一些特有的现象，不过它们的动力学并没有脱离现有理论的框架.

本书将尝试把时序系统的非线性动力学理论应用到波动系统，以讨论非线性波的动力学性质. 非线性波是一个太大的题目，全面论述这个问题非笔者力所能及. 本书在讨论波动解从有规向混沌和湍流转变时，将采用尽可能简化的模型作分析，这些模型是从实际物理系统引出的. 非线性研究中已有大量例证表明，一些具体模型所表现出来的运动规律包括向混沌转变的途径，有超越特定系统的共通意义. 事实上，通过对各种时序非线性系统所作的数值模拟和实验研究，只找到少数几条通向混沌的途径. 当然，在波动系统中是否同样如此，有待更多和更深入的研究来证实.

本书第二章讨论波动的一些基本概念，并对线性波和非线性波的差别作一些初步唯象的分析. 由于本书中引用的一些主要方程都有等离子体背景，在这一章中还特别介绍了等离子体系统中两个最重要的线性波动模式：电子等离子体波和离子声波，以方便其他专业领域的读者阅读后面的有关章节.

第三章介绍几个重要的非线性波方程，它们都是从实际物理系统中推导出来的. 这一章从描写普通流体浅水波的 KdV 方程开始讨论，不仅因为这是一个最著

名的非线性波动方程，也因为有证据说明这个方程在物理上存在某些缺陷，由于这个原因，在本书后面几章讨论非线性波的动力学时我们没有选择 KdV 方程作为基础来建立主要模型. 本书的主要模型建立在非线性漂移波基础之上，这是一种在非均匀磁化等离子体中传播的波. 本章分别介绍了非线性漂移波在一维、二维和三维空间下的几个方程形式、它们的物理背景以及导出的过程. 我们强调，尽管推导使用了等离子体系统，但在一维空间下得到的非线性漂移波方程与在中性流体中作为对 KdV 方程修正的 Regularized Long-wave 方程(亦称 BBM 方程)形式完全相同，且在二维空间下得到的 Hasegawa-Mima 方程与旋转中性流体中著名的 Charney 方程形式完全相同. 因此，无论对于中性流体还是等离子体流体，这些方程都非常重要，值得我们深入分析它们的动力学性质. 本章最后介绍了著名的非线性薛定谔方程，这个方程因与量子力学中薛定谔方程形式相似而得名，只是前者的“势阱”项来源于系统的非线性. 在本书第八至十章分析一个非线性波模型的动力学时，读者将再次看到非线性是怎样自然产生“空间势阱”效应的，势阱的存在改变了系统的色散行为，在非线性波演化中起着重要作用.

非线性波由偏微分方程描述，而它的无穷多模式满足一组耦合常微分方程，它们构成了一个非线性时序系统. 从第四章开始特辟了两章的篇幅简要介绍时序系统的非线性动力学理论，为讨论波动问题的需要，我们将侧重点放在与复空间模式有关的非线性系统的演化规律上.

第四章讨论保守的哈密顿系统. 首先是可积系统，一个重要结论是它的运动流形有环形拓扑；其次，讨论在受到不可积扰动时哈密顿系统的动力学行为，介绍了著名的 KAM 定理和 Poincaré-Birkhoff 定理，前者告诉我们在受到不可积扰动时，哪些拓扑环将首先被破坏以及在什么条件下它们还能保持环形结构，后者告诉我们在拓扑环被破坏以后运动流形在相空间中将有怎样的结构. 本书的重点不在哈密顿系统，不过了解这些理论对理解非线性波的动力学行为十分重要. 在第六章以后我们将看到，不仅一些由可积哈密顿函数描写的简单波-波相互作用系统的运动流形是拓扑环，那些在无穷维相空间中运动的非线性波，包括有驱动和耗散时，只要波动是空间有规的，它们的运动流形也有环形拓扑，这些拓扑环在什么条件下会被破坏以及可能以怎样的方式被破坏都是讨论非线性波的动力学的重要课题.

第五章介绍有耗散的时序系统的非线性动力学理论，侧重点仍在复振子系统. 耗散系统有别于保守哈密顿系统的一个最显著特点是其运动轨道在相空间中存在吸引子，非线性动力学关心的重要问题之一是在临界参数下吸引子流形出现的拓扑改变亦即分岔现象，以及通过分岔向混沌转变的途径. 分岔现象大体可划分为两大类：局域分岔和全局分岔. 在局域分岔方面，重点介绍了鞍结点分岔和 Hopf 分岔，它们多半也是波动系统中两种最重要的局域分岔现象. 全局分岔是涉及相空间

中大尺度结构的突变现象，在第十章中通过一个实例我们将看到波动状态向强湍流的转变就属于整个吸引子出现突变的全局分岔现象.非线性动力学关心的另一个重要问题是振子间的合作运动，如锁相以及各种相同步行为等，本章介绍了这方面的研究结果.这些现象在波动系统中也常见，在第九章和第十章中我们在随波坐标系中把所讨论的非线性波化作在势阱中运动的一组耦合振子，由此观察到这些振子可调节到不同类型的相同步状态，它们导致波动有不同的整体表现.

第六章讨论波-波相互作用，这是波动模式之间耦合运动的基本过程，仍属于时序系统问题.为探索这类系统的运动从有规向混沌转变的规律，分析了几个模型的动力学性质，这些模型是从不同形式的非线性漂移波方程作简化和模式截断后得到的.在最简单的情形下，涨落电场 3 个模式的耦合运动可由可积哈密顿系统描述，它们的轨道被约束在一个拓扑环上，在引入耗散并考虑到涨落电场与沿磁力线传播的离子声波的耦合时，我们可观察到三波系统的运动遵循典型的 Ruelle-Takens 途径向混沌转变.在这两个极端情形之间，本章还建立了另外 2 个模型分别讨论了与离子声波耦合引起的拓扑环共振破坏以及耗散引起的 Hopf 分岔现象，目的是认识不同物理因素对系统动力学的影响.本章最后扼要介绍了将空间效应引入波-波相互作用的一个模型，这方面努力的目的是试图解释湍流运动中一个极为重要的现象：能量向小波数模式的级联.

波-波相互作用模型有很大的局限性，要想真正认识像能量级联这类强湍流或所谓充分发展的湍流中的特有现象，必须讨论由非线性波方程描写的系统，这在本书的第七章以后进行.

第七章从斑图选择现象开始讨论，利用反应扩散方程分析一个化学系统的均匀态为什么会失去稳定性，自发地产生空间结构.讨论这一模型对波动系统的意义在于，在随波坐标系中观察，稳定的定态波解实际上就是空间均匀态出现对称破缺后的一种斑图选择.迄今为止，只有少数非线性波方程能找到漂亮的解析解，寻找形态复杂的波动解通常需要求助计算机.本章先给出保守波动系统解析解的例子，分析它们的轨道在相空间中的行为，然后介绍了所谓的约化扰动方法，利用这个方法可以把由流体力学或磁流体力学方程组描写的复杂系统约简到低维空间的波动方程，以便于寻找系统的相干波动解.一个波动方程存在形状和速度都不随时间改变的相干波动解并不意味这些解在扰动下是稳定的，一般认为微分方程解的稳定性与方程是否可积有关.判断微分方程可积与否常利用所谓的 Painlevé 判据，方法是分析方程在复平面上奇点(在偏微分方程的情况下则是奇异流形)的性质，本章简要介绍了这一方法并据此解释了两个漂移波孤立子碰撞时的非弹性性质.本章的后一部分讨论非保守的非线性波，重点介绍了有驱动和耗散的一维非线性漂移波模型的数值模拟结果，发现那些(稳定和不稳定的)定态波解在参数空间高度有

组织,特别是在一些参数区中观察到了定态波解的能量形成滞后曲线.一个引人瞩目的现象是,在漂移波模型中出现湍流解的参数区与定态波解出现滞后的参数区高度相关,这为后面几章利用这个模型分析波动从空间有规态向湍流态转变的机制提供了十分重要的线索.

第八章利用非线性漂移波模型分析定态波解的失稳机制.注意到任何定态波解在随波坐标系中都是模式相空间中的一个(非平凡的)不动点,讨论它的稳定性问题因此等价于讨论这个不动点对扰动的线性响应,由此可建立起系统的非线性色散关系.对不动点的线性扰动有与系统自由度数目相同的独立复方向,它们由一组准模描述.利用这个非线性色散关系计算扰动模式的本征值和本征矢量随参数改变的结果表明,一个定态波解典型地可通过特征准模的鞍结点分岔或 Hopf 分岔失稳,并且不稳定性的发生与它们的本征值和本征矢量在参数空间出现奇异性有关.从本章分析得到的一个重要结果是,位于波能滞后曲线的负斜率分支上的定态波解是鞍结点不稳定的,在随波坐标系中它们都是相空间中的鞍点.结合上一章找到的非线性漂移波的湍流解与其定态波能滞后现象出现的参数区相关这一事实,鞍点在波动状态向湍流的转变中可能起到的重要作用开始浮出水面.

第九章讨论与局域分岔相关的弱湍现象,发现定态波解作为在随波坐标系中的一个相空间不动点可通过一系列 Hopf 分岔转变为高维拓扑环.当拓扑环随参数改变发展出奇点时,轨道有机会穿过拓扑奇点在相空间更大范围内游走,引起波动能量出现阵发.这些结果是将可观察的波动解展开为傅里叶模式并考虑了坐标系运动带来的多普勒效应后得到的.本章后半部分换了一个视角观察非线性波动,如前面提到的,将可观察的波动解看做为一个在(鞍型不稳定)定态波解提供的空间势阱中运动的耦合振子系统,制约这些振子运动的是一组耦合非线性常微分方程,它们需要与定态波解的模式方程联立求解.研究表明,与那些轨道约束在拓扑环上的空间有规波动相对应,这些耦合振子之间总是维持着完美的泛函相同步.

第十章在分析强湍动力学时仍采用这一视角,在随波坐标系中将实现了的波动解看做是在鞍型定态波动解这一类特殊空间势阱中耦合振子的运动.这些振子作为系统中的活跃模式,既受到鞍型势阱的散射,又因其自身的非线性而相互耦合,数值模拟漂移波模型揭示的运动向强湍状态突变以及突变后的许多现象都能在这个图像下得到满意的解释.本章重点分析了向强湍流转变的动力学机制,结果表明,向强湍的转变在动力学上属于一种与鞍点有关的激变或全局分岔现象:在越过临界参数时,理论上存在的鞍型定态波解总会在某个时刻几近实现,这一特殊虚波形的实现可称为“斑图共振”,它本质上是一种非线性频率或相速度的共振,共振触发了吸引子的激变.若在随波坐标系中观察,斑图共振就表现为相空间中弱湍吸引子与鞍点的碰撞.吸引子轨道与鞍点的碰撞还诱发了最长波的主模式相对于

鞍型势阱的运动出现束缚-自由转变以及统计意义上的对称性突变，只有在继发的这个临界转变后波动能量才逐渐级联到小尺度模式，导致系统进入强湍状态. 本章最后分析了在强湍吸引子上的动力学，强湍的时空演化表面上有很强的随机特点，实际上却可以说明它是一种特殊的相同步状态，在这个状态下，鞍型势阱中的若干长波振子阵发地调节到非完美相同步，这是一种时间和空间上的同步，可使波动能量在同步的瞬间达到其他任何动力学状态都不能达到的高度.

本书讨论的方程多是从等离子体系统中推导出来的，等离子体是不同于固态、液态和气态的一种物质聚集状态[12]. 一个原来由中性粒子组成的体系，如果温度升得足够高(如 $10^4$℃以上)，一些处在束缚态的电子开始被电离，产生大量带负电荷的"自由"电子，并剩下同样数量的带正电的离子，这就形成了等离子体. 等离子体是一个宏观上处于电中性状态的体系，宇宙中绝大部分物质处于等离子体状态，如大气层外包围地球的电离层、太阳风(它们是太阳耀斑爆发产生并沿磁力线飞向地球的带电粒子流)、恒星和星际空间物质等，在我们周围则有如闪电、极光等天然等离子体、受控核聚变等实验室等离子体以及等离子体电视等工业生产中的等离子体.

等离子体中电子已脱离了束缚态，离子也可以相对自由地运动，这使得等离子体拥有了既不同于由中性粒子组成的流体也不同于固体的某些特殊性质. 假设等离子体完全电离，且初始时离子和电子处于电荷平衡态，空间中任何一点都是电中性的，这时如果因为扰动某个离子离开了其平衡位置，在它的周围就会产生库仑电场；电子的质量远轻于离子，它们对这个库仑电场迅速响应，聚集到离子周围，对电场起到一定的屏蔽作用. 因此，在等离子体中出现的扰动电势是受到屏蔽的库仑势. 对于电子密度为 $n_e$，温度为 $T_e$ 的等离子体，研究表明，屏蔽的特征尺度是德拜(Debye)长度

$$\lambda_D = (kT_e/4\pi n_e e^2)^{1/2}, \tag{1-1}$$

式中使用高斯单位，$k$ 是玻尔兹曼(Boltzmann)常数，$e$ 是电子电荷量. 将等离子体中一个以离子为中心、以德拜长度 $\lambda_D$ 为半径的球形空间称为德拜球，电势从中心下降的速度要远快于未受屏蔽的真空势，在德拜球边缘上电势已下降到其真空电势的约 1/e，这里 e 是自然对数.

德拜长度是等离子体一个基本的特征空间尺度. 我们可粗略地认为，等离子体由许多德拜球组成，在分析等离子体中的物理过程时，要将问题的特征空间尺度与系统的德拜长度做比较，如果问题的特征尺度远小于德拜长度，那么所讨论的物理过程主要发生在德拜球内，在这种情况下每个带电粒子都较强烈地感受到其他带电粒子的库仑势，因此需要考虑二体库仑碰撞等单粒子过程；如果大于德拜长度，可以认为带电粒子所感受到的是一些屏蔽了的库仑势，在这种情况下，单粒子效应

不再重要，而那些大量带电粒子参与的集体相互作用，例如波动，才是需要重视的物理过程.

当等离子体中存在磁场(如外磁场、外电流磁场或电磁扰动)时，带电粒子还会受到洛伦兹(Lorentz)力的作用. 电场力和磁场力具有长程性质，等离子体在受到扰动时所产生的静电力或电磁力总是力图将系统恢复到平衡状态，它们是维系等离子体中集体相互作用的重要作用力. 对于高温等离子体中的集体相互作用，还需要考虑热压力，它与静电力和电磁力相竞争，抵抗向平衡态的恢复过程. 与这些作用力相比，重力在讨论等离子体中集体相互作用时常常可以被忽略.

描写等离子体的理论大体可分为单粒子轨道理论、等离子体的流体理论和统计理论[7]. 单粒子轨道理论给出单个带电粒子在外场作用下的运动轨道，如围绕磁力线的回旋运动，横越磁力线的漂移运动等，这一理论适用于集体运动不重要的稀薄等离子体. 在德拜球半径远小于系统宏观尺度的稠密等离子体中，集体运动变得重要，常利用流体或磁流体理论描写. 最简单的模型是把等离子体看做是由中性流体元组成的体系，每个流体元具有一定的密度 $\rho(\boldsymbol{x},t)$、速度 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$、温度 $T(\boldsymbol{x},t)$ 和压力 $p(\boldsymbol{x},t)$，其中 $\boldsymbol{x}$ 为三维空间坐标，它们的运动由流体力学方程组描写，包括连续性方程、运动方程和状态方程(或能量方程). 不过在多数情况下需要将等离子体看做是由电子流体和离子流体组成的准中性体系，假设电子和离子流体元分别具有各自的密度、速度、温度和压力，这些带电粒子流的运动受制于场的状态，而流的状态变化又反过来引起场的改变，因此原则上需要联立求解制约离子流、电子流运动的流体力学方程组和制约电场、磁场运动的麦克斯韦方程组. 本书第三章推导某些非线性波方程时就对等离子体采用了流体描述. 此外，等离子体还可以用统计物理的方法描写，有关理论称为等离子体动理学(kinetic theory，也有译做动力论)，它讨论在六维相空间(坐标空间三维和速度空间三维)中等离子体电子和离子的分布函数$f_{e,i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t)$的演化，如在无碰撞稀薄等离子体情况下求解分布函数$f_e(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t)$和$f_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t)$分别满足的弗拉索夫(Vlasov)方程，用以分析等离子体的微观运动.

需要强调的是，无论是采用等离子体的流体模型还是统计模型，在涉及其中的电场或磁场时，都应该是自洽场. 所谓“自洽”，指的是这些场的变化与带电粒子的运动是相互影响的，带电粒子在场的作用下运动，运动的结果又改变了场的分布. 上面提到，在等离子体的流体描述中，电子流与离子流的运动通过由麦克斯韦方程组描述的场相互耦合. 同样，在对等离子体作统计描述时，出现在 Vlasov 方程中的电场和磁场也都是自洽场，在用 Vlasov 方程积分出带电粒子密度等宏观参量的轨道运动后，需要与场方程联立求解，问题才能封闭. 在普通中性流体中不存在这个问题，流体力学方程组本身就能封闭求解.

等离子体中各种物理过程的时间尺度从快到慢，跨越很大的参数范围，在分析

其中的物理过程时把握问题的特征时间尺度也十分重要. 由于电子和离子巨大的质量差异,它们对电磁场变化响应的特征时间尺度相距甚远,在处理不同物理问题时,常可利用这一事实对离子或电子运动做恰当的近似处理. 例如,对离子来不及响应的快时间尺度问题,可只讨论电子的运动,认为离子静止并为电子运动提供了准中性化的背景;如果要讨论离子的运动,则必须将电子的运动包括进去,因为在离子运动状态改变的时间尺度上电子对(因离子运动造成的)场的改变完全来得及响应. 在等离子体流体描述下讨论静电扰动问题时,作为一种粗糙的近似,常假设电子密度分布对场的改变即时响应,以避免求解电子流的演化方程,在第三章一些方程的推导中对电子运动就做了这样的绝热近似处理.

几十年来,在利用等离子体理论认识湍流现象方面人们作出了许多努力,例如在等离子体动理学描述的基础上建立了湍流的准线性理论,它可以解释等离子体中的许多非线性现象,但该理论只有在等离子体适于用动理学描述时才能应用[13]. 还有一些工作试图在等离子体的流体描述下讨论湍流问题,遗憾的是,在具体分析均匀湍流时却似乎找不到小参量以应用微扰论. 在这种情况下,一些人把目光转向建立在湍流状态下大量相互作用模式上的统计力学. 尽管如此,用流体途径研究湍流问题仍有很大的吸引力,因为它有望为普通流体和等离子体建立起统一的湍流理论[2].

与此同时,随着非线性动力学的发展,关于混沌的研究取得了重大突破,一些不含随机项的非线性映射和常微分模型,不仅显示了混沌运动,而且它们遵循着向混沌转变的一些共同途径[10]. 这些结果极大地鼓舞了人们认识湍流的信心,很有可能,湍流并不是一个完全随机的运动,它们在动力学上也是有规可循的.

综合以上考虑,本书把(等离子体)湍流看做是在流体力学层次上远离平衡态的非线性动力学现象. 按照这一观点,分析湍流问题就需要两方面的基础知识:一是等离子体物理,主要是它的流体描述;一是非线性动力学理论. 如何将这两条主线在书中有机地揉合起来,的确颇费思量,现有的版本也难尽如人意. 好在按照这个思路得出的研究结果是乐观的,在分析定态波解的失稳机制时,微扰论还能发挥作用,数值模拟观察到的弱湍和强湍的不少复杂现象也能在非线性动力学的理论框架下得到满意解释. 书中讨论的运动向混沌和湍流转变的机制所采用的主要模型都来源于流体和等离子体实际问题,有理由期望所寻找到的一些动力学机制能够反映物理实际,希冀本书这一初步尝试能够为讨论更复杂的湍流现象提供一些参考.

# 第二章　波动的基本概念

实际系统中的波动一般都是非线性的，线性波是在波动振幅不是很大时对波动的一个近似．认识波动现象，要从线性波开始．本章将扼要介绍有关波动的一些基本概念，在很多专著中对此都有详细和深入的讨论．重温这些概念对于讨论非线性波是非常必要的，然而需要注意的是，它们有一些是在线性波基础上提出的，在试图将它们应用到非线性波之前，有必要对这些概念重新审视．

在波动振幅足够大时，波动的非线性不再能被忽略．从动力学上来说，非线性波与线性波最主要的区别在于非线性波的各个模式运动不是独立的，它们之间存在所谓的“模-模耦合”(mode-mode coupling)，这使得非线性波在传播中表现出许多不同于线性波的特点．建立起非线性波的正确图像，对于进一步分析它的动力学机制非常重要．

本书重点讨论的非线性波方程都有流体和等离子体的背景，因此本章还将用一定的篇幅介绍等离子体中两个重要的线性波动模式——电子等离子体波和离子声波，在第三章中推导几个非线性波方程时要用到这些概念．

## §2.1　线　性　波

### 2.1.1　线性波动方程

光在真空中传播是典型的波动现象，光波电场矢量的幅度 $\phi(\boldsymbol{x},t)$ 演化服从下面的方程

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-c^2\nabla^2\phi=0. \tag{2-1}$$

这里 $c$ 是真空中的光速．在一维空间下方程(2-1)有形式

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=0, \tag{2-2}$$

上述方程关于宗量 $\phi(x,t)$ 是线性的，它们是线性波动方程．方程(2-2)可以等价地写做下面两个方程

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+c\frac{\partial\phi}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial\phi}{\partial t}-c\frac{\partial\phi}{\partial x}=0, \tag{2-3}$$

这两个方程关于时间 $t$ 都有一阶导数，分别描写 $\phi(x,t)$ 以速率 $c$ 沿 $+x$ 和 $-x$ 方向传播的两个分支解．除光波外，还有一些波动现象满足的方程关于时间 $t$ 也有二阶

导数，形式与方程(2-1)或(2-2)类似，如声波，在空间一维情况下它也允许有向前和向后传播的两个分支解.

另外一类线性波动与光波或声波不同，它们只能单向地传播. 例如，由于介质的某种不均匀性，系统的自由能所驱动的线性波存在一个优先方向，波动只能沿着这个方向传播，逆向传播被禁止. 本书后面所述的中性流体中的浅水波(shallow-water wave)和等离子体中的漂移波(drift-wave)在线性近似下都属于这一类. 如果忽略其他效应，只考虑波的传播运动，在一维空间系统中描写这一类波动的演化方程有下面的形式

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \tag{2-4}$$

方程中关于时间 $t$ 的导数是一阶的，$u$ 是波传播的速度，$u>0(<0)$时波动沿$+x(-x)$方向单向传播.

一般地，一维空间系统中的线性波动可由下面的偏微分方程描写

$$L(\phi, \phi_t, \phi_x, \phi_{tt}, \phi_{xx}, \phi_{tx}, \cdots) = 0, \tag{2-5}$$

这里，$L$ 是关于 $\phi$ 的线性函数，下标 $t$,$x$ 分别表示对时间坐标 $t$ 和空间坐标 $x$ 的偏导数. 如果在介质中传播的波可以由线性波动方程描写，这个介质被称为线性介质. 在本书中，除特殊说明外，波动方程的各项系数都假设为常数，与空间和时间坐标无关.

讨论波动问题时，无论是线性波还是非线性波，常采用模式这个概念，它是具有特定波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的波，$\boldsymbol{k}$ 指向波传播的方向，大小为波数 $k$($k=2\pi/\lambda_k$，其中 $\lambda_k$ 是模式的波长). 对有限空间中一个具有周期边界的系统，波数 $k$ 只能取分立值. 例如沿长度为 $L_s$ 的星球赤道传播的波，除波长为 $L_s$ 的基波外，波长为 $L_s/n$ 的分波也可以在系统中传播，因此波数可能取值为 $k_n=2\pi n/L_s$，这里 $n=1,2,\cdots$. 当系统有无穷边界时，各种波长的波都允许在其中传播，谱函数关于波数是连续的.

### 2.1.2　简谐波和线性色散关系

线性波动方程有简谐波形式的解

$$\phi_k(\boldsymbol{x}, t) = \Phi_k e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega_k t)}, \tag{2-6}$$

它的实部是物理上可测量的量. 上式中振幅 $\Phi_k$ 一般可以是复数，即允许简谐波有一个位相，写做 $\phi_k(\boldsymbol{x}, t) = |\Phi_k| e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega_k t + \delta_k)}$，这里位相 $\delta_k = \arctan(\mathrm{Im}\Phi_k/\mathrm{Re}\Phi_k)$. 将式(2-6)的一维空间形式代入方程(2-5)，约简后可找到 $\omega_k$ 与 $k$ 之间必须满足的关系为

$$L(1, -i\omega_k, ik, -\omega_k^2, -k^2, \cdots) = 0, \tag{2-7}$$

这相当于对偏微分方程(2-5)作了从空间和时间导数到波矢量和频率的如下代换：$\partial/\partial x \rightarrow ik$ 和 $\partial/\partial t \rightarrow -i\omega_k$. 由式(2-7)可解出 $\omega_k$ 作为 $k$ 的函数

$$\omega_k = \omega_k(k), \tag{2-8}$$

它就是系统(2-5)的线性色散关系，只有满足该色散关系的简谐波模式才能在系统(2-5)中传播.

如果从色散关系得到的解 $\omega_k(k)$ 为实数，它给出的就是波数为 $k$ 的模式 $\phi_k$ 的振动频率. 在这种情形下模式的幅度在传播中不变，大小没有任何限制，只要满足相应的色散关系，即使振幅无穷大，理论上也允许在介质中传播.

如果有能量流入或流出系统，从色散关系得到的 $\omega_k(k)$ 将是一个复数，记做 $\omega_k = \omega_k^r + i\gamma_k$，其中 $\omega_k^r$ 和 $\gamma_k$ 都是实数. 此时表达式(2-6)的一维形式变为

$$\phi_k(x,t) = \Phi_k(0)e^{\gamma_k t}e^{i(kx-\omega_k^r t)}, \tag{2-9}$$

这里 $\Phi_k(0)$ 是 $t=0$ 时模式的复振幅. 这样，在空间任一点观察频率为 $\omega_k^r$ 的振荡，其振荡包络将按指数 $\gamma_k$ 随时间改变，在 $\gamma_k<0$ 时包络幅度指数衰减，$\gamma_k>0$ 时指数增长. 特别地，如果频率 $\omega_k^r \to 0$，$\phi_k$ 的时间演化部分将单调地增长或衰减，不再有振荡出现.

需要注意的是，只有实数的波动解才在物理上有意义，在采用复模式表达时，原则上应该将平面简谐波解写成下面的形式

$$\phi_k(x,t) = \Phi_k e^{i(kx-\omega_k t)} + \text{c. c.}, \tag{2-10}$$

这里 c. c. 表示复共轭. 当然也可以直接假设模式有实数的形式，如

$$\phi_k(x,t) = A_k \cos(kx - \omega_k t + \delta_k), \tag{2-11}$$

这里 $A_k$，$\delta_k$ 分别是实振幅和位相. 对于线性波动方程来说，将波动解 $\phi_k$ 写做复数形式[如式(2-6)]还是实数形式[如一维空间下的式(2-10)或(2-11)]，所得到的色散关系完全一样. 模式的位相也无关紧要，不影响结果的色散关系. 非线性波则不同，在做模式展开时，是将它们假设为实数形式还是复数形式，每个模式是否允许有可随时间变化的位相，这些都会对波的动力学有重要影响，在第十章中将结合实例对此作进一步分析.

线性波动方程的解具有可加性，这是说，如果一个系统有两个简谐波解，$\phi_{k_1}(\boldsymbol{x},t)$ 和 $\phi_{k_2}(\boldsymbol{x},t)$，那么它们的和，$\phi_{k_1}(\boldsymbol{x},t)+\phi_{k_2}(\boldsymbol{x},t)$，仍然是该系统的解. 因此，线性介质允许它的所有不同波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的简谐波解(2-6)同时在其中独立地传播，相互之间没有任何影响. 这与非线性波动形成鲜明对照，我们将看到，非线性波方程不允许简谐波形式的解，它的解也没有可加性. 在处理一个非线性波动时，也常将它展开为不同波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的分波之和，但这只是形式上的，与所谓解的可加性无关. 以长度 $L_s$ 的一维周期边界情形为例，无论是线性波还是非线性波，我们总可以将波函数 $\phi(x,t)$ 展开为它的所有分波(模式)之和

$$\phi(x,t) = \sum_k \phi_k(t)e^{ikx} + \text{c. c.}, \tag{2-12}$$

这里 $k=2\pi n/L_s(n=0,1,2,\cdots)$，这一展开式是系统的几何允许的，它与波动的物

理没有关系.如果 $\phi(x,t)$ 是线性波,那么它的每个分波都是一维形式下满足系统色散关系的简谐波解,如果 $\phi(x,t)$ 是非线性波,那么这些分波并不是系统的解,它们也不能独立地在系统中传播,因此展开式(2-12)不牵涉解的可加性问题.

一个物体发射或反射的光波一般包含有不同颜色(波数)的模式,如果在到达视觉器官之前光波在线性介质中传播,每个光波模式都不会"感觉到"其他模式的存在,它们之间更不会发生作用,生出另外的颜色(波数)的模式来.声波也是一样.幸而日常生活中遇到的光波和声波大多属于线性波动,才免去了许多麻烦,例如不必担心信号灯颜色在到达行人的视觉器官前出现改变.

### 2.1.3　相速度

如果盯住简谐波模式 $\phi_k e^{i(kx-\omega_k t)}$ 的一个特定位相值,如 $kx-\omega_k t=\varphi_0$,在 $t_0$ 到 $t_1$ 的时间内它的位置从 $x_0$ 移动到 $x_1$,移动速度是 $(x_1-x_0)/(t_1-t_0)=\omega_k/k$,因此

$$v_p(k) = \omega_k/k \tag{2-13}$$

是模式 $k$ 位相运动的速度,称为波动模式的相速度.简谐波模式的传播,也就是其位相的传播.

如果不同波数 $k$ 即不同颜色的波有相同的传播速度,这样的波动是无色散的.如方程(2-2)的色散关系为

$$\omega_k^2 - c^2k^2 = 0, \tag{2-14}$$

由此得到模式 $k$ 的相速度是 $\omega_k/k=\pm c$,它的大小不依赖于波数 $k$,因此光在真空中传播时没有色散发生.

相反,如果不同波数 $k$ 的简谐波具有不同的相速度 $v_p(k)$,那么在介质中传播的这个波是有色散的.如在方程(2-4)中增加关于 $x$ 的三阶导数项得到

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + u\frac{\partial\phi}{\partial x} + a\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3} = 0, \tag{2-15}$$

它仍然是一个线性波动方程,色散关系为

$$\omega_k - uk + ak^3 = 0, \tag{2-16}$$

这里 $a,u$ 是常数,由此得到波的相速度为 $\omega_k/k=u-ak^2$,它随波数 $k$ 改变,因此方程(2-15)描述的是一个有色散的系统,含 $\partial^3\phi/\partial x^3$ 的项是方程的色散项.

水是一种有色散的介质,向水中抛入一个小石子,会看到一圈一圈的波纹从中心传播开来,这是因为初始激发的水表面波一般包含了不同波长的模式,这些模式各自按照色散关系所决定的相速度向外传播,因为波长越长的模式相速度越大,在同样时间内它比短波长的模式传得更远,这才形成了向外扩展的波纹,且越向外波纹越宽.

### 2.1.4　位相在波动中的作用

位相在波动问题中起十分重要的作用,日常所见的波传播,在很多情况下是位

相变化沿空间传播引起的视觉效应，组成介质的物质并没有发生定向流动(当然也有相反的例子，波携带着粒子一起传播). 例如，在麦田中可看到滚滚麦浪向一定方向传播，很清楚，所有植株的根部都没有移动，随时间变化的只是麦杆摆动的位相，当它摆动的幅度足够大时，就会对临近的植株产生压力，迫使其离开竖直向上的平衡位置，这样，位相随时间的变化在相邻植株之间出现了传递. 对每一棵植株来说，它受到风的驱动和临近植株施加的压力，它们与麦杆自身弹性力竞争，造成植株在平衡位置附近来回摆动，由于摆动位相的传播，我们才看到了麦浪向前翻滚的生动画面. 同样，声音在空气中传播并不需要借助空气的定向流动，它是空气粒子疏密相间的一种密度波的传播. 如果观察特定的粒子，它也仅围绕其平衡位置作振动，粒子相对于平衡位置距离的变化沿空间传播才是声音传播的原因. 这个距离可以用一个位相来描述，所以声波也是一种振动幅度或位相的传播现象.

传播方向与介质振动方向相同的波谓之曰纵波，与介质振动方向垂直的谓之曰横波. 前者的例子如声波，后者的例子如将绳索的一头固定而手持另一头摆动时所见到的波动. 地震引起的地震波既有纵波也有横波，两种地震波传播的速度不相同，当横波到来时建筑物会受到更大的破坏. 一些地震还可激起海洋中一种长周期的重力波，这种波的传播速度可高达 200～250 m/s，是普通海浪波的 10～15 倍，足以引起极具破坏力的海啸. 如 1960 年智利大地震引起的重力波不仅横扫了夏威夷等西太平洋岛屿，还在不到 24 h 内就穿越了整个太平洋，引发了远在 20000 km 外日本北海道的海啸，到达时波头高达 6～7 m. 2005 年的苏门答腊大地震引起的重力波也迅速穿过印度洋，袭击了东南亚甚至非洲沿岸，造成巨大伤亡. 上面提到的波传播不必借助介质定向流动这一事实，有助于我们理解重力波何以能像这样以喷气式飞机的速度传播，它所携带的巨大能量何以在传播中衰减得如此之慢.

由此可见，位相在波动问题中是一个非常重要的参量，它的作用在我们讨论非线性波动时可以看得更清楚. 在非线性波中，不同模式的位相之间可以以各种方式合作，单个模式位相的运动状态以及各模式位相之间的合作方式都可能发生突变. 因此，位相在非线性波动中是一个异常活跃的因素，在研究非线性波的动力学时，要特别注意波动模式位相状态的变化，它们在形成花样繁多的波动形态中起着举足轻重的作用. 自然界中的波动特别是湍流，之所以看起来瞬息万变，模式位相起了非常重要的作用.

## §2.2　非线性波

### 2.2.1　非线性波动方程

对大多数实际物理系统中的波动，用线性波方程描写只是波动幅度不是很大

时的一个近似.波在介质中传播时通常会遭遇到一些非线性效应,例如,光在介质中传播时,折射率可能并非常数,而依赖于当地的瞬时光强,这类效应会在波动方程中引入非线性项[14],在第三章中我们还将说明,对于在流体介质中传播的波动,非线性更是系统内在的一种性质.

考虑波函数对时间的导数仅为一阶的情形,在一维空间下将它满足的方程写作下面的一般形式:

$$\phi_t(x,t) = L(\phi,\phi_x,\phi_{xx},\phi_{tx},\cdots) + N(\phi,\phi_x,\phi_{xx},\cdots), \tag{2-17}$$

这里,$L$ 表示关于 $\phi$ 的线性函数,$N$ 表示非线性函数,函数 $L$ 和 $N$ 的各项系数均为常数.在方程(2-17)中,假设待解函数 $\phi$ 有 $\varepsilon$ 的数量级,$\phi\sim\varepsilon\phi$,而非线性函数 $N$ 中各项的数量级为 $\varepsilon^p(p>1)$,那么,当 $\varepsilon\to0$ 时,方程中的非线性项与线性项相比为高阶无穷小,可以被忽略,余下的线性方程 $\phi_t(x,t)=L(\phi,\phi_x,\phi_{xx},\phi_{tx},\cdots)$ 是系统(2-17)很好的近似;随着 $\varepsilon$ 增加,非线性项变得越来越重要,当 $\varepsilon\to1$ 时,它们与线性项可比甚至占优,不再能被忽略,在这种情形下,从方程的线性近似得到的波动解将严重偏离物理实际.现实生活中遇到的大量波动现象,只有在计入非线性效应以后才能得到满意的解释.

### 2.2.2 非线性波动方程的解

非线性波动方程不允许简谐波形式的解,若将式(2-6)的一维空间形式代入方程(2-17),指数因子 $e^{i(kx-\omega_k t)}$ 在两边不能相约.以历史上最早提出来的、也是最著名的 KdV 方程[1,15]

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} - 6\phi\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial^3\phi}{\partial x^3} = 0 \tag{2-18}$$

为例,读者很容易检验这一点,它的导出过程将在下一章中介绍.方程(2-18)中的空间三阶导数项是关于 $\phi$ 的线性项,若再加上一阶导数项如 $u\partial\phi/\partial x$(对于 KdV 方程它总可以通过伽里略变换 $x\to x-ut$ 被消去),在忽略非线性项时就可导出与式(2-16)形式一致的线性色散关系.

虽然简谐波不能在非线性介质中独立地传播,但一些非线性波方程允许其他形式的解析解,例如很多读者已经熟悉的孤立子或激波形式的解等.典型地,对于 $x\to\pm\infty$ 时 $\phi$ 及其导数 $\phi_x,\phi_{xx}$ 趋向 0 的无穷边界问题,KdV 方程(2-18)就有下列形式的解[1]

$$\phi_0(x-ut) = -\frac{1}{2}u\,\mathrm{sech}^2\left[\frac{1}{2}u^{1/2}(x-ut-x_0)\right], \tag{2-19}$$

如图 2-1(a)所示,这里 $u\geqslant0$ 是常数,sech($x$)是双曲正割函数,$x_0$ 是积分常数.如果 $\phi$ 表示密度扰动,那么这个解就说明系统中存在一个密度凹陷,称做腔子(caviton),它以速度 $u$ 沿 $x$ 方向传播.

另一个典型的非线性波方程是正弦戈登(sine-Gordon)方程[15]

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\sin\phi=0, \tag{2-20}$$

从 $\sin\phi$ 的泰勒展开知道,它为方程提供了一个线性项和无穷多个非线性项. 方程(2-20)有纽结(kink)解

$$\phi_0(x-ut)=4\arctan\{\exp[(x-ut-x_0)/(1-u^2)^{1/2}]\}, \tag{2-21}$$

和反纽结(antikink)解

$$\phi_0(x-ut)=4\arctan\{\exp[-(x-ut-x_0)/(1-u^2)^{1/2}]\}, \tag{2-22}$$

它们都有激波的形式,如图 2-1(b)所示;还有呼吸子(breather)解

$$\phi_0(x,t)=4\arctan\{(\tan a)\sin[(\cos a)(t-t_0)]\mathrm{sech}[(\sin a)(x-x_0)]\}, \tag{2-23}$$

这个解因其空间局域化的振动幅度在运动中反复增大和缩小而得名. 这里 $u<1$, $x_0,t_0,a$ 是常数.

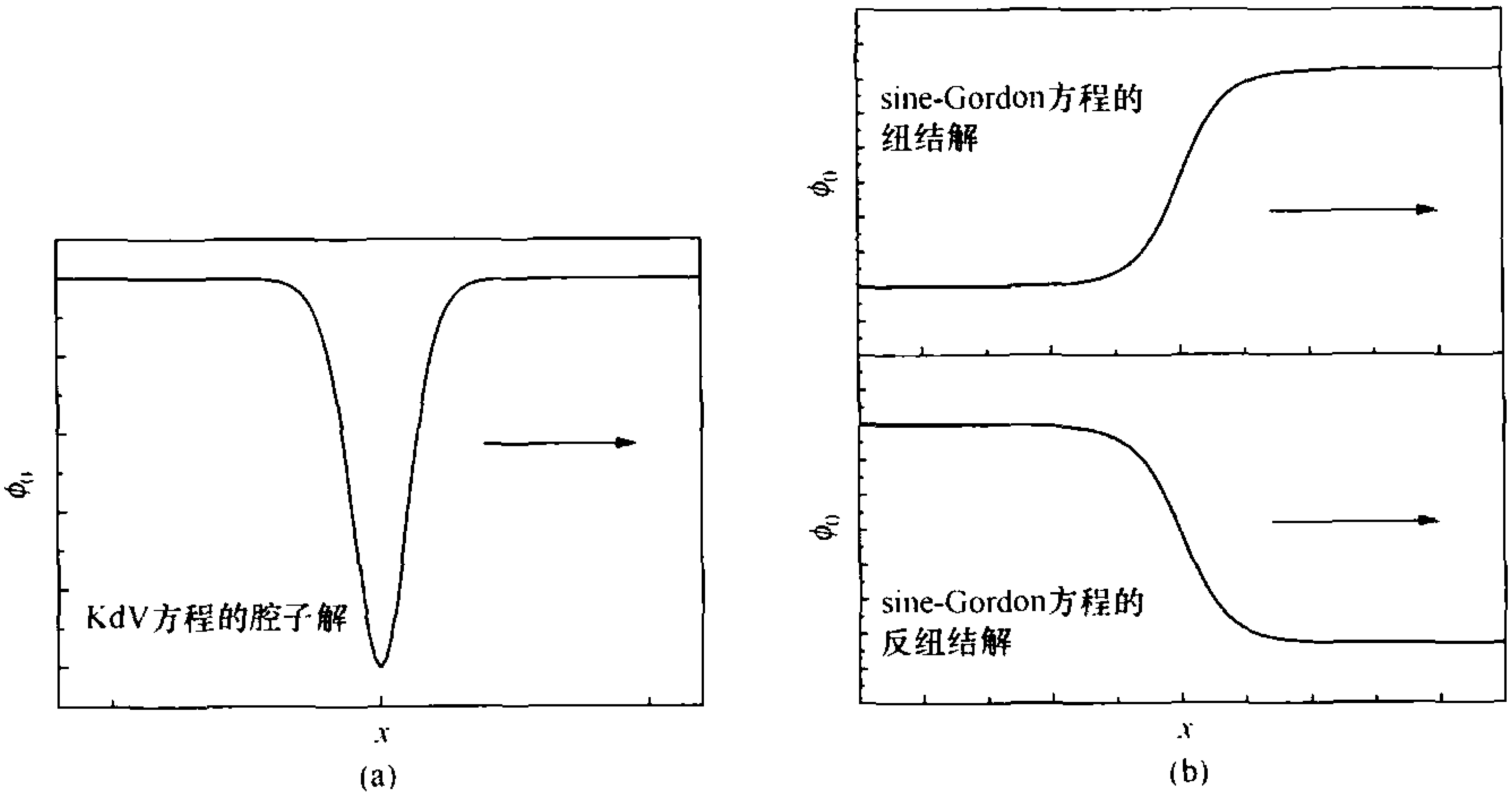



图 2-1　非线性波动方程解析解的实例

像式(2-19)这样的解是以一定速度运动的形状不变的波包(wave packet),波包中包含了不同波数 $k$ 的模式成分,因为是无穷边界,$k$ 连续分布. 在这类解中时间 $t$ 和空间 $x$ 融为一个变量,它们不能被分辨.

非线性波方程能够找到解析解是极为个别的情形,在大多数情况下找不到解析解,并且一般来说波动解也并非唯一地依赖于时间和空间的某个组合变量[如式(2-19)和(2-21)中的 $x-ut$]. 固然找不到解析解不等于它们不存在,但更大的可能性是,对非线性波方程来说,它们的很多解原本就不能用解析函数表达,例如湍流形式的解. 在第七章分析非线性波方程的解在复平面上的奇点性质时,我们会理解其中的原因.

前面已经提到，非线性波动方程的解没有可加性，假设已经找到一个非线性波方程的两个解，分别记为 $\phi_1(x,t)$ 和 $\phi_2(x,t)$，那么这两个解之和，$\phi_1(x,t)+\phi_2(x,t)$，就不再是原波动方程的解. 这样，在非线性介质中波运动的图像完全不同于线性介质中的情形，在线性介质中人们看到的是一个个满足线性色散关系的、独立传播的、无相互作用的简谐波，如果在非线性介质中我们也输入一组满足系统（从忽略方程非线性项得到的）线性色散关系的简谐波，那么，由于简谐波不是非线性波动系统的解，它们不可能互无纷扰地独立传播，相互作用不可避免.

### 2.2.3　非线性引起的谐波激发

设想初始时向非线性介质中输入一个满足系统线性色散关系的简谐波，由于非线性效应，这个简谐波模式在传播过程中将发生畸变，甚至会出现“波碎”（wave break）现象. 为孤立出非线性在波碎中的作用，让我们在 KdV 方程中略去色散项，将余下的方程写做

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}=0, \tag{2-24}$$

这里已将待解函数取作速度 $v(x,t)$. 假设初始时（$t=0$）速度分布有正弦形式，如图 2-2 中虚线所示，从方程(2-24)知，对应 $\partial v/\partial x>0$ 的上升段，在 $v>0(<0)$ 时有 $\partial v/\partial t<0$（$>0$），对应 $\partial v/\partial x<0$ 的下降段，$\partial v/\partial t$ 的符号正好相反. 这样，非线性项总的效果是使波峰向前倾斜，波前变得越来越陡，如图 2-2 中实线所示，最终在波前处速度 $v(x)$ 的空间梯度 $|\partial v/\partial x|$ 增至无穷大，奇异性出现，它导致波完全破碎[16].

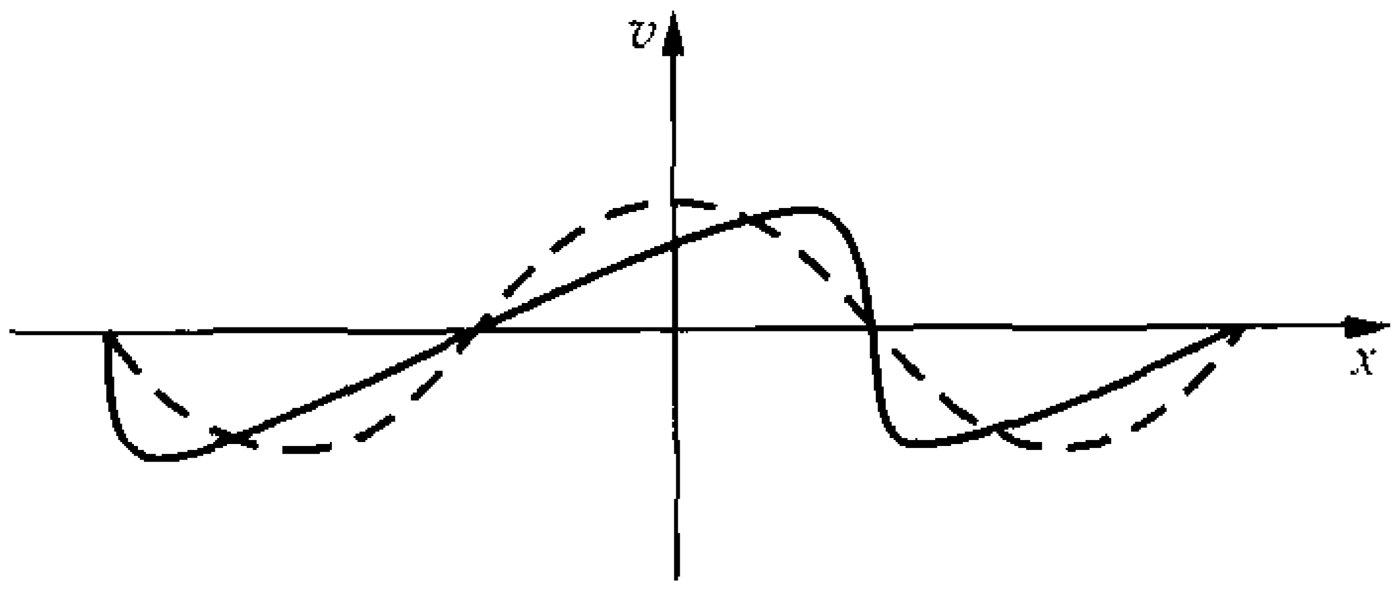



图 2-2　非线性效应引起的波形畸变
（引自文[16]）

简谐波在非线性介质中传输时，无论是波形出现微小畸变还是已经完全破碎，输入波原有的单色性都已经丧失，新的谐波特别是高波数谐波被激发出来，在波数 $k$ 谱中由简谐波的单一谱线演化出更多的谱线. 在用不同波数 $k$ 架构起来的相空间中观察，输入的单色波仅在相空间中一个方向上有投影，经过一段时间传输后，畸变了的波形在其他许多方向上也都出现了大小不等的投影. 这正是非线性波动系统的一个重要性质——它有能力将一个单色波散射到波数 $k$-空间中的不同方向上去.

现以方程(2-24)为例，分析其中的非线性项是如何激发起高次谐波的[16]. 采

用逐级近似的方法，取相应的线性方程(略去方程中的非线性项)的一个解 $v^{(1)}=a\sin kx$ 作为最低阶近似，代入方程(2-24)，在下一阶近似下得到，

$$\frac{\partial v^{(2)}}{\partial t}=-ka^2\sin kx\cos kx=-\frac{ka^2}{2}\sin 2kx. \tag{2-25}$$

这个结果说明，方程的二次非线性项会自动地从 $k=1$ 的基波产生出 $k=2$ 的谐波，它随时间线性增长，幅度很快会达到基波的水平. 如果在最低阶近似下将方程的解假设为形式 $v^{(1)}=a\sin 2kx$，非线性项又会带来 $k=4$ 的谐波，如此等等，没有穷尽. 因此非线性波动方程的解一般不可能通过假设简谐波或其线性组合的形式来寻找到，逐级近似的方法在这里失效了. 从这个例子我们理解到，非线性波内部存在某种散射波矢量的机制，在运动中可以激发起许多新颜色的模式. 这一点在节 2.2.5 讨论模-模耦合时会看得更清楚，系统中那些原本幅度无穷小的谐波有可能通过非线性获得迅速增长，这样的行为是线性色散关系所不能解释的.

### 2.2.4 非线性色散

色散概念原本是在线性波的框架下提出来的，色散关系规定了一定波矢量的模式在通过介质时拥有的振动频率和相速度. 对于线性介质，模式的振动频率与系统内是否还有其他模式在传播没有关系，因为不同波数的模式都是独立振动的，一定波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的模式被允许以一定的频率 $\omega_k$ 在介质中传播. 现在考虑非线性介质，想象也有一个特定波数的试探简谐波模式进入系统，这时会发生什么情况呢? 如果系统中原来已有模式在传播，试探模式将与它们相互作用，如果没有，试探模式也有可能自动地激发出一些新的模式，并与之相互作用. 总之，我们难以将试探模式孤立出来，那么，对非线性波我们还有色散关系这个概念吗?

浏览文献，人们在提到非线性色散这个概念时，都先要将非线性波方程作某种线性化，然后讨论得出的线性波方程的色散关系. 不过在如何对非线性波方程作线性化这个问题上，似乎没有一定之规，全依具体情况而定. 我们知道，对于一个仅依赖于时间的系统，所谓线性化，应该是对它的一个平衡态作微扰，然后取微扰的线性近似，因此，在企图对一个非线性波方程作线性化处理之前，我们应该问，它有没有平衡态? 有什么样的平衡态?

让我们以 sine-Gordon 方程这个特例对非线性色散问题作个初步思考. 将方程写成下面的形式

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-u^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\Omega^2\sin\phi=0, \tag{2-26}$$

与方程(2-20)相比较，这里在有的项前面增加了系数，以便于分析. 方程(2-26)在 $[0,2\pi)$ 区间有常数解 $\phi_0=0$ 和 $\pi$，它们满足 $\partial\phi_0/\partial t=0$，是系统的两个平衡态.

考虑未扰系统处于平衡态 $\phi(x,0)=\phi_0$，假设它受到扰动，扰动量是时间和空间

的函数，可将系统的解写做 $\phi(x,t)=\phi_0+\tilde{\phi}(x,t)$，其中 $\tilde{\phi}(x,t)$ 为扰动量，代入方程(2-26)，得到关于$\tilde{\phi}(x,t)$的线性化方程为

$$\frac{\partial^2\tilde{\phi}}{\partial t^2}-u^2\frac{\partial^2\tilde{\phi}}{\partial x^2}+\Omega^2\cos\phi_0\tilde{\phi}=0. \tag{2-27}$$

在这个特例中，因为 $\phi_0$ 是空间均匀的常数，线性化方程(2-27)允许简谐波解，假设其解形式为 $\tilde{\phi}_k=Ae^{i(kx-\omega_k t)}$，对应平衡态 $\phi_0=0$，得到色散关系

$$\omega_k^2-u^2k^2-\Omega^2=0, \tag{2-28}$$

上式与小幅度假设下作近似 $\sin\phi\approx\phi$ 时从方程(2-26)得到的线性色散关系完全相同，由色散关系(2-28)解得的模式 $k$ 的本征值为

$$\omega_k=\pm\sqrt{u^2k^2+\Omega^2}. \tag{2-29}$$

它们都是实数，表示模式 $k$ 以本征频率 $\pm\sqrt{u^2k^2+\Omega^2}$ 振荡.

另一方面，对应另一个平衡态 $\phi_0=\pi$，从式(2-27)得到色散关系为

$$\omega_k^2-u^2k^2+\Omega^2=0, \tag{2-30}$$

它不同于色散关系(2-28)，由色散关系(2-30)解得的模式本征值为

$$\omega_k=\pm\sqrt{u^2k^2-\Omega^2}, \tag{2-31}$$

如果 $u^2k^2>\Omega^2$，扰动模式 $\tilde{\phi}_k$ 随时间仍作振荡运动，但本征频率的绝对值较之式(2-29)给出的有所减小，如果 $u^2k^2<\Omega^2$，$\omega_k$ 变为纯虚数，对应 $\tilde{\phi}_k$ 的两个分支解分别以指数律 $e^{\mp\gamma_k t}$ 从它们的初始值单调地衰减和增长，速率为 $\gamma_k\equiv\sqrt{|u^2k^2-\Omega^2|}$.

对 $\phi_0=0,\pi$ 这两个平衡态分别作微扰线性化，所导出的色散关系不同，这是因为在平衡态 $\phi_0=\pi$ 附近，系统的非线性项与线性项相比不再能够被忽略. 与此相对照，平衡态 $\phi_0=0$ 是平凡的，关于 $\phi_0=0$ 作微扰线性化所得到的色散关系与系统的线性色散关系完全相同. 在这个例子中，只有非平凡平衡态 $\phi_0=\pi$ 才起到了改变系统色散行为的作用.

这里我们已将非线性波方程(2-26)的色散问题转化为求解对平衡态扰动的本征问题，不过方程(2-26)只是一个可解的特例，因为它有一个常数的非平凡平衡态，关于它的线性化方程有简谐波解. 在一般情况下，非线性波动方程的解依赖于时间和空间变量，最简单的如式(2-19)那样孤立子类型的解 $\phi_0(x-ut)$，它们是以一定速度传播的空间结构，既在空间上非均匀又在时间上非平衡，它们也会像 sine-Gordon 方程的空间均匀平衡态解 $\phi_0=\pi$ 那样影响系统的色散行为吗?

让我们想象在非线性介质中已有一个形为 $\phi_0(x-ut)$的波动解在传播，例如孤立子，当试探模式“企图”通过这个系统时会发生什么情况呢? 注意到孤立子是一个形状和速度都不变的波包，若在跟随波包运动的坐标系 $\xi=x-ut$ 中观察，它不过是一个“冻结”了的空间结构 $\phi_0(\xi)$，这时系统虽然已经从空间均匀态发生对称破缺，在时间上却是一个平衡态，当试探模式进入系统时，该模式的色散行为必然会

受到这个平衡态的影响，就像非平凡平衡态 $\phi_0=\pi$ 改变了方程(2-26)的线性色散那样. 与后者不同的是，这里的非平凡平衡态是空间对称破缺的，它对试探模式更像是起着某种空间势的作用. 如何在空间对称破缺了的平衡态上建立起非线性色散的明晰概念和量化描述，是一个极具挑战性的课题.

说到空间势阱，不禁让人联想起量子力学波方程——薛定谔方程，在笛卡尔坐标系一维空间下它有形式

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=\left[-\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)\right]\psi(x,t), \tag{2-32}$$

这里 $m$ 是粒子的质量，$|\psi(x,t)|^2$ 被赋予的物理意义是 $t$ 时刻在空间点 $x$ 处寻找到粒子的几率. 方程(2-32)关于未知函数 $\psi$ 是线性的，不过右边出现的空间势 $V(x)$ 使它与那些常系数线性波动方程有所不同.

假设波函数有下面的形式[17]

$$\psi(x,t)=\psi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et/\hbar}, \tag{2-33}$$

这里 $E$ 是粒子的能量. 从方程(2-32)得到在势场 $V(x)$ 中粒子能量满足下面的本征方程

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+V(x)\right]\psi(x)=E\psi(x). \tag{2-34}$$

以宽度为 $a$ 的无限深方势阱为例，由方程(2-34)解得粒子能量本征值和相应的归一化波函数分别为 $E_n=\hbar^2\pi^2n^2/2ma^2$ 和 $\psi_n(x)=\sqrt{2/a}\sin(n\pi x/a)$，这里 $0<x<a$，$n=1,2,\cdots$. 这样，处于低能态的粒子有一定几率跃迁到高能态，激发出高波数即短波长的模式. 由此可见，势函数 $V(x)$ 起到了在波数 $k$-空间散射波函数的作用.

前面提到，非线性波动系统有激发高波数模式的能力(其实也可从高波数模式激发出低波数模式，就好像高能态粒子有一定几率回迁到低能态那样)，我们有理由问，这种激发也与某个空间势的散射作用有关吗? 这个猜想不无根据，在试探模式看来，原来在非线性介质中传播的孤立子或其他形式的波包解不就像个空间势场吗? 诚然，经典系统的波函数描写的是实实在在的物理量，如电场涨落，它不同于被赋予几率意义的量子波函数，不过经典和量子波动都由偏微分方程描写，它们在数学上是相通的. 很有可能，正是某种类似于薛定谔方程中的势场在非线性波动系统中起到了散射波矢量的作用，使得系统拥有了激发出不同波长模式的能力. 第八章将结合具体例子对这个问题作更深入的探讨，我们将看到，讨论非线性波的色散问题在数学上与讨论量子系统的本征问题十分相似.

### 2.2.5　模-模耦合

非线性波动方程不允许简谐波独立传播，让我们以 KdV 方程(2-18)为例分析

它的非线性项是怎样引起不同波数 $k$ 模式间出现相互作用的. 为此，将波函数 $\phi(x,t)$ 展开成复模式 $k$ 及其共轭之和

$$\phi(x,t) = \sum_k \phi_k(t) e^{ikx} + \text{c. c.} , \tag{2-35}$$

系统受到的约束决定了波数 $k$ 的可能取值，假设有空间周期 $2\pi$ 边界条件，即 $\phi(x,t)=\phi(x+2\pi,t)$，则 $k$ 可取整数值.

将式(2-35)代入方程(2-18)

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_{k=1}^{\infty}(\phi_k e^{ikx} + \text{c. c.}) + \frac{\partial^3}{\partial x^3}\sum_{k=1}^{\infty}(\phi_k e^{ikx} + \text{c. c.})$$
$$- 6\sum_{m=1}^{\infty}(\phi_m e^{imx} + \text{c. c.})\frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=1}^{\infty}(\phi_n e^{inx} + \text{c. c.}) = 0. \tag{2-36}$$

这里取 $k=0$ 模式为 0. 在对 $x$ 作微分后，上式化为

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{d\phi_k}{dt}e^{ikx} + \text{c. c.}\right) - \sum_{k=1}^{\infty}k^3(i\phi_k e^{ikx} + \text{c. c.})$$
$$- 6\sum_{m=1}^{\infty}(\phi_m e^{imx} + \text{c. c.})\sum_{n=1}^{\infty}(in\phi_n e^{inx} + \text{c. c.}) = 0, \tag{2-37}$$

将方程(2-37)两边乘以 $e^{-ik'x}$，这里 $k'$ 是一个给定波数，对空间坐标 $x$ 在 $2\pi$ 周期上积分，利用

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(k-k')x}dx = \delta_{k,k'} , \tag{2-38}$$

得到波数为 $k'$ 的模式 $\phi_{k'}$ 满足的方程，略去上标“$'$”后为

$$\frac{d\phi_k}{dt} - ik^3\phi_k - 3ik\left(\sum_{m+n=k}\phi_m\phi_n + \sum_{m-n=k}\phi_m\phi_n + \sum_{-m+n=k}\phi_m\phi_n\right) = 0,$$
$$(k = 1,2,\cdots,N;N \to \infty). \tag{2-39}$$

这就是制约模式 $\phi_k(t)$ 随时间演化的方程，式中求和分别对满足 $m+n=k$，$m-n=k$ 和 $-m+n=k$ 的波数进行，在计算这些卷积求和项时曾对指标 $m,n$ 作过交换.

至此，我们已经将关于波函数 $\phi(x,t)$ 的偏微分方程化为关于模式 $\phi_k(t)$ 的一组无穷维耦合的常微分方程. 由于方程(2-39)中求和项的存在，不同 $k$ 的模式方程不能解耦，任一模式的演化，除受到自身的线性色散(如含 $k^3$ 的项)等因素制约之外，还受到其他模式当时状态的影响.

由模式方程(2-39)知道，正是那些求和项起到了激发不同波数模式的作用. 例如，假设系统在初始时 $k=1$ 模式占优，其他模式的幅度无穷小，则通过 $m+n=k$ 的求和项，模式 $k=1$ 可对模式 $\phi_{k=2}(t)$ 的演化作出贡献. 如果 $k=2$ 模式增长得足够大，它又有可能激发出 $k=3$ 和 $k=4$ 模式，新激发出的模式通过 $m-n=k$ 和 $-m+n=k$ 这些求和项又反过来影响到模式 $k=1$ 的演化，如此等等. 就这样，非线性波动系统可以从一个模式开始，激发出越来越多的模式参与运动.

一般地，对于具有二次非线性项的波动，那些满足共振条件 $\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2+\boldsymbol{k}_3=0$ 的3个模式称为共振三波，它们的波矢量形成了图2-3所示的三角关系.如果非线性的阶次更高，共振条件将牵涉更多的模式，如三次非线性引起四波共振等.在等离子体物理中那些满足波矢量共振条件的模式之间的相互作用叫做“模-模耦合”(mode-mode coupling)或“波-波相互作用”(wave-wave interaction).“模-模耦合”是非线性波动中最基本的动力学过程，也是非线性波的表现如此不同于线性波的根本原因.

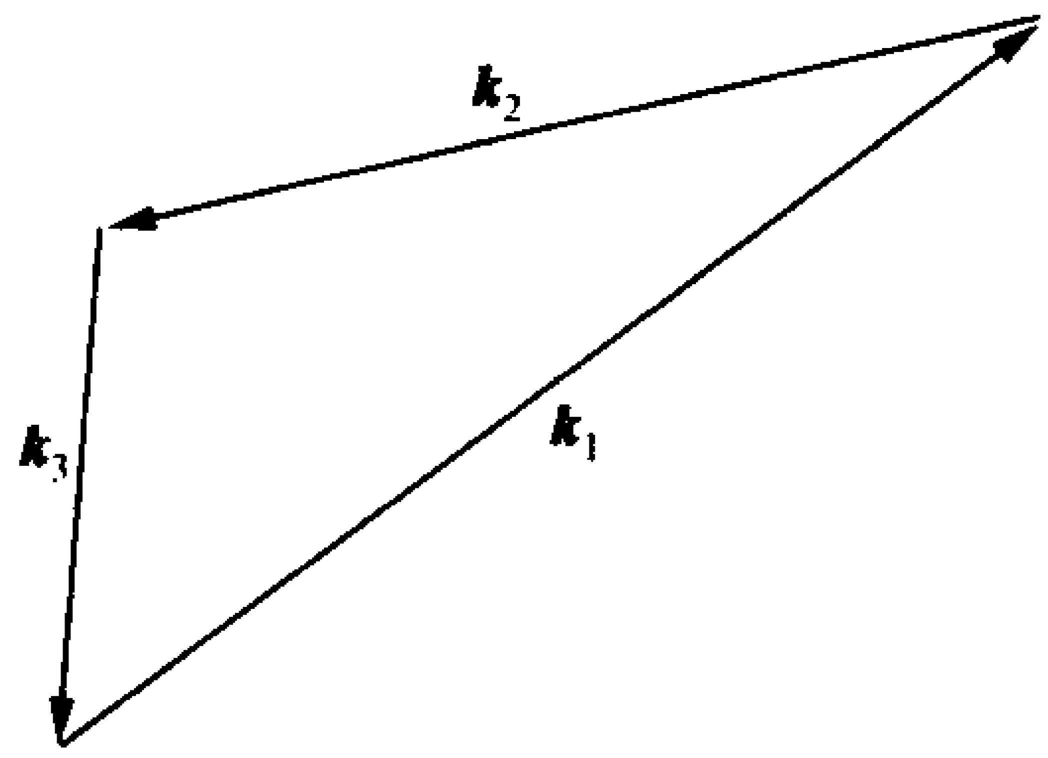



图2-3　满足共振条件 $\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2+\boldsymbol{k}_3=0$ 的3个波矢量示意图

在式(2-35)中将波动解展开为复模式与它们的共轭，这固然是为了保证波动解为实数，同时我们也看到，复共轭部分的加入，使卷积求和项包括了3个部分：$m+n=k$，$m-n=k$ 和 $-m+n=k$.我们知道，共轭的两个分支代表向相反方向传播的模式，对于线性波来说，是否存在另一个分支无关紧要，反正各个模式互不干扰；非线性波就不同了，缺少了共轭的这一分支，就不能描写向相反方向运动的两组模式之间的耦合，不能完整地反映出非线性波的动力学过程.

### 2.2.6　群速度

在实际问题中常观察到高频振荡被低频调制，如图2-4所示，且低频包络以一定的速度运动.

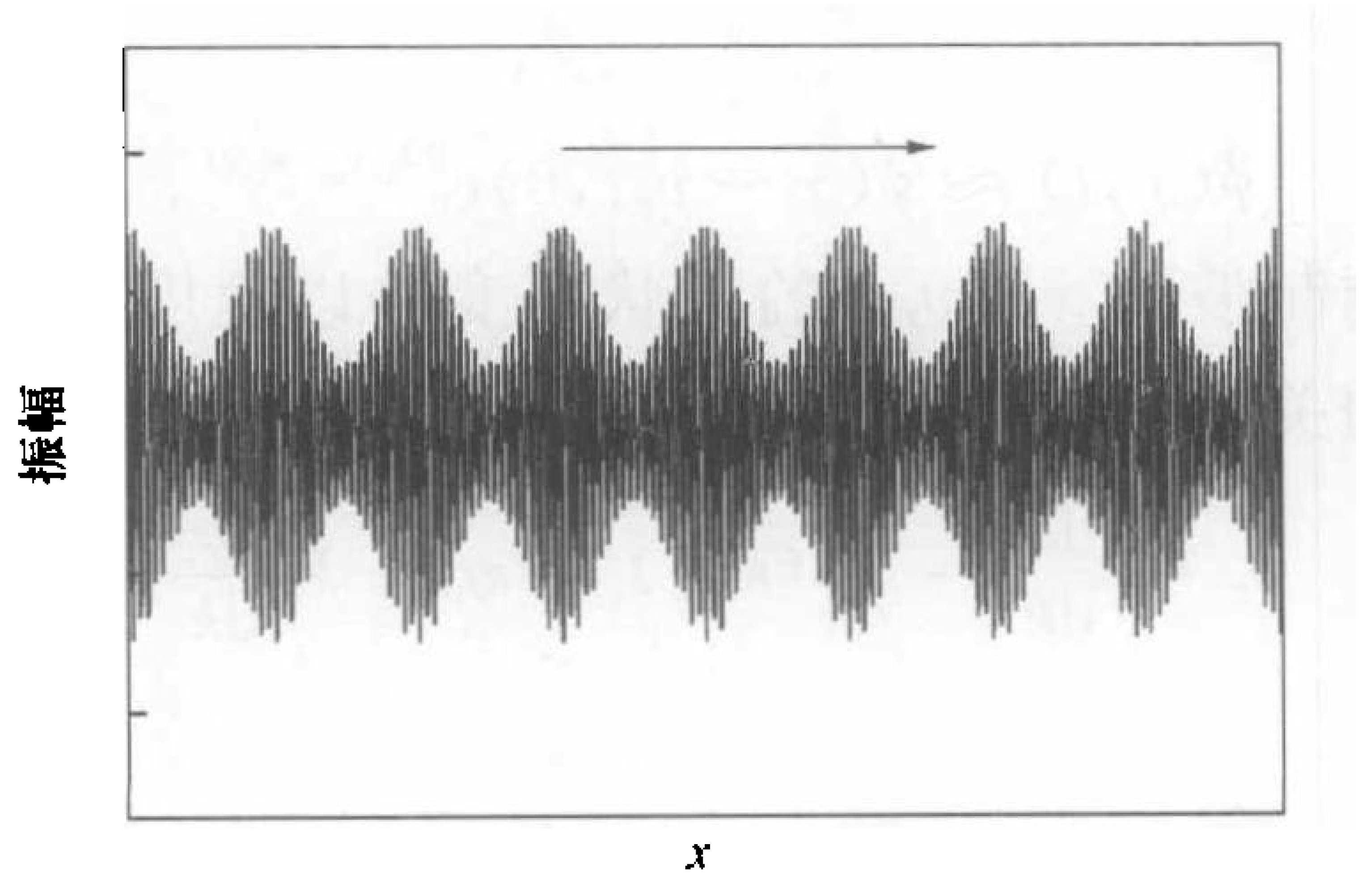



图2-4　受到低频调制的高频振荡，波包以一定的群速度运动

在线性波的框架下解释这个现象的思路是：实际系统中模式的波数和频率都可能出现展宽.以激光为例，它是两个能级上的粒子占有数出现反转时产生的受激辐射，有很好的单色性，即便如此，由于粒子热运动等原因，激光在它的峰值波长和频率附近会有小的分散.分析指出，这一类展宽会造成高频振荡出现以一定速度运动的低频包络.

假设初始时波包由一系列平面简谐波构成，它们有连续变化的波数 $k$ 和频率 $\omega(k)$，将波包在波数空间中展开为[7]

$$\phi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}A(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[kx-\omega(k)t]}\mathrm{d}k, \tag{2-40}$$

其中每个简谐波模式 $k$ 在介质中传播时都需要满足一定的色散关系 $\omega=\omega(k)$，模式的振动频率就由它决定.限于讨论保守系统，模式振幅 $A(k)$ 在传播中不变，它由波包的初始形状 $\phi(x,0)$ 唯一地决定

$$A(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x,0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x. \tag{2-41}$$

为讨论波包 $\phi(x,t)$ 的运动，考虑 $A(k)$ 作为 $k$ 的函数在 $k_0$ 处有单峰这个最简单的情形，如果色散不太大，就可以将模式频率 $\omega(k)$ 在 $k_0$ 附近作展开

$$\omega(k)=\omega_0+\left.\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right|_{k=k_0}(k-k_0)+\cdots, \tag{2-42}$$

式(2-40)变为

$$\begin{aligned}\phi(x,t)&\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}A(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[kx-\omega_0t-\left.\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right|_{k_0}(k-k_0)t\right]}\mathrm{d}k\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}A(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\left(x-\left.\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right|_{k_0}t\right)}\mathrm{d}k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(k_0\left.\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right|_{k_0}-\omega_0\right)t},\end{aligned} \tag{2-43}$$

定义

$$v_\mathrm{g}=\left.\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right|_{k=k_0}, \tag{2-44}$$

式(2-43)改写为

$$\phi(x,t)\approx\phi(x-v_\mathrm{g}t,0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0v_\mathrm{g}-\omega_0)t}, \tag{2-45}$$

这是一个调制振荡，调制波 $\phi(x-v_\mathrm{g}t)$ 的形状不变并以速度 $v_\mathrm{g}$ 运动. $v_\mathrm{g}$ 称为波包的群速度，它与相速度的关系是

$$v_\mathrm{g}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}(kv_\mathrm{p})=v_\mathrm{p}+k\frac{\mathrm{d}v_\mathrm{p}}{\mathrm{d}k}, \tag{2-46}$$

或者用波长 $\lambda$ 表示为

$$v_\mathrm{g}=v_\mathrm{p}-\lambda\frac{\mathrm{d}v_\mathrm{p}}{\mathrm{d}\lambda}. \tag{2-47}$$

我们看到，在上面的推导中将波函数 $\phi(x,t)$ 看做是由波矢量连续变化的一组

单色波组成，它们之间没有相互作用，每个单色波都按照色散关系 $\omega=\omega(k)$ 决定的相速度独立地传播，在色散不大的假设下说明了初始波包可以维持其形状不变，并显示出由色散关系决定的群速度.

在非线性波动系统中，不同波长的模式集合成一个整体以不变的形状和速度运动的现象并不罕见，典型的例子是形式为 $\phi(x-ut)$ 的孤立子解[参见式(2-19)]，像图 2-4 那样的调制振荡也常见，这类波动解其实是非线性系统的一种自组织(self-organization)现象. 以 KdV 方程为例，它含有色散项和非线性项，色散的作用是引起波包分散，因为不同波数的模式有不同的相速度，而非线性项的作用是使波包形状畸变(参考图 2-2)，只有当色散和非线性达到平衡时才出现了如式(2-19)那样以群速度 $u$ 整体运动的孤立子 $\phi(x-ut)$. 在第七章讨论孤立子解的实例时我们甚至会看到，孤立子的运动速度依赖于方程的非线性参数，说明非线性在这个问题上的作用不可忽略. 我们注意到，在导出群速度表达式(2-44)时并没有考虑非线性效应. 在非线性波情况下如何理解群速度表达式(2-44)是一个需要思考的问题，如果根据线性色散关系计算 $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k$，其结果能否解释像孤立子这样的波包群速度？如果将公式(2-44)中的 $\omega(k)$ 理解为非线性色散关系，那么非线性色散关系本身还是个尚未完全解决的问题.

简谐波是不能携带信息的，相速度 $\omega/k$ 的大小因此也不受任何限制，波包却可以携带信息，据此认为群速度 $v_g$ 应不能大于光速. 对于实际物理系统中的线性波动，如光波在等离子体中的传播，可以根据它的色散关系计算出波包的群速度，从而得出它小于真空光速的结果(参考节 2.3.2). 而在非线性系统中波包群速度与色散有怎样的关系还是一个悬而未决的问题，更谈不上以实例说明它小于真空光速.

## §2.3 等离子体中的线性波

作为线性波的例子，本节将介绍等离子体系统中的几个重要波动现象. 等离子体由带电粒子组成，这个基本特点使得它在扰动下容易产生自洽的电场和磁场，电磁力有长程性质，它可引起带电粒子运动出现强关联的集体运动，也就是波动. 在一定条件下，将等离子体电子和离子作为流体处理是一个很好的近似. 为使问题封闭，除流体力学方程外，还需要应用描写电磁场运动的麦克斯韦方程组，这使得等离子体波动问题在数学上显得非常复杂. 不过也正因为等离子体波动涉及电磁力，比起由中性粒子组成的普通流体，等离子体中的波动现象更加丰富，也更易于定量化处理. 在讨论一个具体系统时，从单粒子运动到集体运动的各种特征时间和空间尺度往往非常清楚，这有助于寻找小量，在按小量作近似时，条件也十分明确. 等离

子体的这些特点使得它成为研究波动现象的理想体系. 特别是几十年来人们对等离子体中的线性波动已有相当深入的认识,找到了大量静电的和电磁的线性波动模式,掌握了它们的色散关系,这些都为进一步研究等离子体中的非线性波动提供了很好的基础.

本节将采用等离子体的流体模型讨论在无磁场情况下两个最重要的静电振荡模式,一个是高频运动的电子等离子体波,另一个是低频运动的离子声波,它们都与等离子体电子和离子之间的电荷分离有关,因此需要用电子和离子的流体方程与麦克斯韦方程联立求解来分析这些模式的运动.

### 2.3.1 等离子体的流体描述

在流体模型下[7,12],由中性粒子或带电粒子组成的系统被看做是由分立流体元组成的介质,每个流体元包含了大量粒子,宏观上无穷小微观上足够大,对流体元中微观粒子的运动作统计平均,可定义出流体元的密度、速度、压力和内能等参量,它们都是时间坐标 $t$ 和空间坐标 $\boldsymbol{x}$ 的函数. 流体元质量密度 $\rho(\boldsymbol{x},t)$即单位体积流体元的质量随时间的变化满足连续性方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=0, \tag{2-48}$$

这里 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$是流体元的速度,它随时间的变化与流体元受到的作用力有关,对于非黏性流体,在拉格朗日表象下 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$服从下面的运动方程

$$\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}_{\mathrm{V}}-\nabla p, \tag{2-49}$$

式中 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{V}}$ 是单位体积流体元所受到的作用力(如重力,对带电粒子流还有电磁力),$\nabla p$ 是压力梯度力.

方程(2-49)左边 $\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t$ 是流体元总的加速度,在欧拉表象下它由两部分组成

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}, \tag{2-50}$$

其中 $\partial\boldsymbol{v}/\partial t$ 是局域加速度,这是观察者在空间给定点 $\boldsymbol{x}$ 处所看到的速度 $\boldsymbol{v}$ 随时间的变化率,对于定常流有 $\partial/\partial t=0$;如果流场在空间上非均匀,即使是定常流,同一时刻在空间两个不同点观察,所看到的流速也不相同,由这个原因引起的加速度称为对流加速度,大小为$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$. 为理解对流加速度,想象通过一个狭窄入口处的人流,每个人在行走过程中都会感觉到越来越拥挤,这是因为流场空间不均匀,在垂直于流的方向上速度大小自然也随空间变化,使得每个人都感觉周围行人的密度在不断地增加.

除了连续性方程(2-48)和运动方程(2-49)之外,流体力学方程组还应该包括描写流体元内能或温度随时间和空间变化的方程. 对于无黏性的、不导热的理想流

体,能量方程可由状态方程替代,后者给出流体压力 $p$ 与密度 $\rho$ 之间的关系

$$p\rho^{-\gamma} = \text{const.} \tag{2-51}$$

这里 $\gamma$ 是定压比热与定容比热之比,对绝热压缩过程有 $\gamma=(D+2)/D$,这里 $D$ 是系统自由度的数目,对等温过程有 $\gamma=1$.

对于普通流体,连续性方程(2-48)、运动方程(2-49)和状态方程(2-51)组成了关于密度 $\rho$,速度 $\boldsymbol{v}$ 和压力 $p$ 的封闭方程组;对于等离子体系统通常采用二流体或多流体(如尘埃等离子体)模型,要讨论电子流和离子流的运动,作用力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{V}}$ 包括等离子体中的自洽电场力和磁场力,因而电子和离子的流体力学方程组需要与麦克斯韦方程组联立求解.

描写电磁场运动的麦克斯韦方程组有下面的形式

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \tag{2-52}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{2-53}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \tag{2-54}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi\rho_{\mathrm{q}}, \tag{2-55}$$

这里采用了高斯单位,$c$ 为真空中的光速,$\rho_{\mathrm{q}}$ 和 $\boldsymbol{J}$ 分别是等离子体电荷密度和电流密度.

假设等离子体由电子和单电荷离子组成,在采用二流体近似时,令电子和离子流体元的质量密度分别为 $\rho_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{x},t)=m_{\mathrm{e}}n_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{x},t)$ 和 $\rho_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{x},t)=m_{\mathrm{i}}n_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{x},t)$,速度分别为 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{x},t)$ 和 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{x},t)$ 等,这里,$m_{\mathrm{e}}$ 和 $m_{\mathrm{i}}$ 分别是电子和离子的质量,$n_{\mathrm{e}}$ 和 $n_{\mathrm{i}}$ 分别是它们的数密度,则等离子体电荷密度为

$$\rho_{\mathrm{q}} = e(n_{\mathrm{i}} - n_{\mathrm{e}}), \tag{2-56}$$

电流密度为

$$\boldsymbol{J} = e(n_i\boldsymbol{v}_{\mathrm{i}} - n_{\mathrm{e}}\boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}), \tag{2-57}$$

$e$ 是电子电荷的大小.

这样,关于等离子体电子和离子的连续性方程(2-48)、运动方程(2-49)以及状态方程(2-51),再加上麦克斯韦方程(2-52)～(2-55),一共有 18 个标量方程,其中方程(2-54)和(2-55)分别可由方程(2-53)和(2-52)取散度导出,因此这些方程构成了描写电子和离子的质量密度 $\rho_{\mathrm{e}},\rho_{\mathrm{i}}$,速度 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{e}},\boldsymbol{v}_{\mathrm{i}}$,压力 $p_{\mathrm{e}},p_{\mathrm{i}}$ 以及等离子体电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{B}$ 总共 16 个未知标量函数完整的封闭方程组,可在一定约束条件下求解.

### 2.3.2 等离子体的介电函数

在普通电介质理论中,假设粒子被外加静电场极化时电荷位移的大小正比于场强,由此引进了电位移矢量这一参量,它把介质的极化作用包括进泊松方程,真

空中不再有自由电荷.等离子体也是一类电介质,与绝缘体不同的是,等离子体带电粒子相对自由,需要考虑带电粒子与场的自洽运动.

在讨论等离子体的介电性质时,无论采用流体描述还是统计描述来分析带电粒子的运动[18],总是假设系统存在一个平衡态,对其作微扰,然后再取微扰的线性近似,如在静电场情形,用这样的方法找到电荷密度正比于场强,将泊松方程(2-55)改写为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0, \tag{2-58}$$

其中 $\boldsymbol{D}$ 为电位移矢量,定义如下

$$\boldsymbol{D} = \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \boldsymbol{E}, \tag{2-59}$$

这里 $\underline{\underline{\varepsilon}}$ 是等离子体的介电函数,它已将等离子体带电粒子的作用吸收在其中.一般地,等离子体可以是各向异性的(如在有磁场的情形),相应的式(2-59)中介电函数是一个张量,用双下划线表示.

让我们讨论无外场情况下一维冷等离子体的介电性质.假设它在平衡时是准中性的,离子静止,电子在平衡位置附近受到小扰动,数密度和速度分别为 $n_e(x,t)=n_0+n_{e1}(x,t)$,$v_e(x,t)=v_{e1}(x,t)$,这里 $n_0$ 是平衡态下电子和离子的数密度,电子密度扰动引起的空间电场记做 $E_1(x,t)$,设波数为 $k$ 的扰动模式有形式 $X_1 e^{i(kx-\omega t)}$(这里 $X_1=n_{e1},v_{e1},E_1$),代入方程(2-48),(2-49)和(2-55),近似到微扰的一阶量得到

$$-i\omega n_{e1} + ikn_0 v_{e1} = 0, \tag{2-60a}$$

$$-i\omega m_e n_0 v_{e1} = -en_0 E_1, \tag{2-60b}$$

$$ikE_1 = -4\pi e n_{e1}, \tag{2-60c}$$

由此解得系统的色散关系为

$$\omega^2 - \frac{4\pi n_0 e^2}{m_e} = 0, \tag{2-61}$$

它的解就是等离子体电子的振荡频率或称朗缪尔频率(Langmiur frequency)

$$\omega_{pe} \equiv \sqrt{4\pi n_0 e^2/m_e}. \tag{2-62}$$

这就是说,即使没有外周期驱动,等离子体电子也会自发地出现集体振荡,电荷分离产生的静电力总是力图将电子恢复到平衡位置,而惯性力却阻挡这个回复过程,集体振荡就是这两个力相竞争的结果.

色散关系(2-61)用介电函数表示就是

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} = 0. \tag{2-63}$$

一般地,对于等离子体的简谐波模式,介电函数等于 0 就给出了系统的色散关系

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = 0, \tag{2-64}$$

它决定波在介质中的传播状态.

在上述推导中，制约带电粒子运动的方程中的非线性项[例如对流加速度 $(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$ 这一项，见式(2-50)]作为微扰的高阶量被舍去了，它们的贡献没有包括在结果的介电函数和色散关系中，对上面的例子做这样的近似无疑是合理的，但如果系统受到外力驱动，其内部模式被强烈激发，非线性项的贡献完全可能与线性项可比，在计算介电函数时如何计入其贡献是一个问题.

朗缪尔频率 $\omega_{pe}$ 决定了等离子体局域电中性被破坏的特征时间尺度. 等离子体中的这种集体静电振荡模式是自发的，任何电磁波在其中传播时必将受到它的影响. 当有外来电磁波时，等离子体电子迅速响应，造成电荷分离，而电荷分离形成的自洽电场又力图在 $1/\omega_{pe}$ 的特征时间内恢复电中性，因此，对于频率低于 $\omega_{pe}$ 的电磁波振荡，等离子体总是来得及消除其影响，阻止它在等离子体中的传播. 我们知道，地球 60 km 以上的大气层都处于部分电离或完全电离的状态，电离层的存在正是长波无线电信号不能穿过其中实现传播的原因. 虽然频率高于 $\omega_{pe}$ 的电磁波允许在等离子体介质中传播，朗缪尔振荡仍然可以部分改变电磁波的传播性质，使得它具有不同于在真空中传播时的色散行为.

让我们讨论电磁波在等离子体中传播时，它的运动规律与在真空中传播相比发生了怎样的改变[18]. 将方程(2-52)和(2-53)结合，利用矢量公式 $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$，得到

$$\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})-\nabla^2\boldsymbol{E}=-\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{J}}{\partial t}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2},\tag{2-65}$$

其中电流密度 $\boldsymbol{J}$ 由式(2-57)给出，在忽略离子运动时，它完全由电子运动决定. 假设无磁场的冷等离子体，只考虑电子在扰动电场 $\boldsymbol{E}_1$ 作用下的抖动，速度为

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}_{e1}}{\partial t}=-\frac{e}{m_e}\boldsymbol{E}_1,\tag{2-66}$$

利用表达式(2-57)以及方程(2-66)，从方程(2-65)的线性化方程得到

$$\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E}_1)-\nabla^2\boldsymbol{E}_1=-\frac{4\pi n_0e^2}{m_ec^2}\boldsymbol{E}_1-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}_1}{\partial t^2},\tag{2-67}$$

对电磁波这样的横波，上式左边第一项为零. 考虑空间一维情形，假设方程(2-67)的简谐波解有形式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}$，可得电磁波在等离子体中传播的线性色散关系为

$$\omega^2=k^2c^2+\omega_{pe}^2,\tag{2-68}$$

与电磁波在真空中的色散关系(2-14)相比，可以清楚地看到等离子体电子振荡的影响. 电磁波在等离子体中传播的相速度为

$$v_p=\pm\sqrt{c^2+\omega_{pe}^2/k^2},\tag{2-69}$$

其绝对值大于真空中的光速 $c$，但群速度

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \pm \frac{c}{\sqrt{1+\omega_{pe}^2/k^2c^2}} \tag{2-70}$$

小于 $c$. 在这个实例中,群速度小于真空光速的预期从线性色散关系得到了验证. 当然,这个结论是在线性波近似下得到的.

## 2.3.3　电子等离子体波

在上一小节冷等离子体假设下,电子密度像弹簧振动那样围绕平衡位置运动,现在假设电子流体具有一定的温度,那么热压力将迫使电子密度振荡以波的形式在系统中传播. 让我们导出这样的电子等离子体波(electron plasma wave)的色散关系[12,19].

仍假设离子数密度 $n_i = n_0$ 不随时间空间改变. 电子运动服从连续性方程

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \boldsymbol{v}_e) = 0, \tag{2-71}$$

在热压力 $p_e$ 和因电荷分离产生的自洽静电力的共同作用下,电子的运动方程为

$$m_e n_e \left[\frac{\partial \boldsymbol{v}_e}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_e \cdot \nabla)\boldsymbol{v}_e\right] = -\nabla p_e - e n_e \boldsymbol{E}. \tag{2-72}$$

考虑一维系统,将等离子体电子振荡看做是绝热压缩过程,$\gamma_e = 3$,从状态方程(2-51)得到

$$\nabla p_e = 3T_e \nabla n_e, \tag{2-73}$$

其中 $T_e$ 为等离子体电子的温度. 方程(2-72)中电场 $\boldsymbol{E}$ 由带电粒子运动自洽地决定,服从泊松方程

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi e(n_i - n_e). \tag{2-74}$$

类似于上一小节的推导,在线性近似下得到各扰动量满足下面的方程

$$-\mathrm{i}\omega_k n_{e1} + \mathrm{i}k n_0 v_{e1} = 0, \tag{2-75a}$$

$$-\mathrm{i}\omega_k n_0 v_{e1} = -\frac{e n_0}{m_e}E_1 - \mathrm{i}\frac{3kT_e}{m_e}n_{e1}, \tag{2-75b}$$

$$\mathrm{i}kE_1 = -4\pi e n_{e1}. \tag{2-75c}$$

由此解得线性色散关系为

$$\omega_k^2 = \omega_{pe}^2 + 3k^2 v_{the}^2, \tag{2-76}$$

它决定了系统(2-71)~(2-74)允许出现的本征运动模式. 这里,$v_{the} \equiv \sqrt{T_e/m_e}$ 是电子的热速度,朗谬尔频率 $\omega_{pe}$ 已由式(2-62)给出.

由式(2-76)可见,在上一小节讨论的冷等离子体极限下,朗缪尔振荡模式的相速度变为零,电子密度振荡不能传播,只有 $T_e \neq 0$ 的热电子压力才迫使振荡传播,形成了朗缪尔波. 由式(2-76)可知,朗缪尔波的振荡频率在电子等离子体频率 $\omega_{pe}$ 附近,由于电子质量轻,这是一种高频振荡波.

### 2.3.4 离子声波

等离子体中另一个重要的运动模式是离子声波(ion acoustic wave)[12][19],它与离子密度振荡密切相关. 为讨论它的运动,可将电子和离子都看做为流体,离子流体的连续性方程为

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \boldsymbol{v}_i) = 0, \tag{2-77}$$

无磁场时离子的运动方程为

$$m_i n_i \left[ \frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_i \cdot \nabla) \boldsymbol{v}_i \right] = - \nabla p_i + e n_i \boldsymbol{E}, \tag{2-78}$$

其中 $p_i$ 是等离子体离子的压力,因电荷分离造成的自洽电场 $\boldsymbol{E}(x,t)$服从泊松方程(2-74). 在离子运动的慢时间尺度下,必须考虑电子的运动,并可对电子采用等温状态方程,有比热比 $\gamma_e = 1$. 这样,离子的运动(2-77),(2-78)和电子的运动(2-71),(2-72)通过泊松方程(2-74)耦合,构成封闭的方程组.

下面的作法与导出朗缪尔波的过程类似,就是在平衡态 $n_i(0) = n_e(0) = n_0$, $\boldsymbol{v}_i(0) = \boldsymbol{v}_e(0) = 0$, $\boldsymbol{E}(0) = 0$ 附近作小扰动,得到关于扰动量的线性化方程组

$$\frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \boldsymbol{v}_{e1} = 0, \tag{2-79a}$$

$$m_e n_0 \frac{\partial \boldsymbol{v}_{e1}}{\partial t} = - T_e \nabla n_{e1} - e n_0 \boldsymbol{E}_1, \tag{2-79b}$$

$$\frac{\partial n_{i1}}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \boldsymbol{v}_{i1} = 0, \tag{2-79c}$$

$$m_i n_0 \frac{\partial \boldsymbol{v}_{i1}}{\partial t} = - \gamma_i T_i \nabla n_{i1} + e n_0 \boldsymbol{E}_1, \tag{2-79d}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}_1 = 4\pi e (n_{i1} - n_{e1}). \tag{2-79e}$$

因为电子质量非常小,在最低阶近似下,其运动方程中的惯性项 $m_e n_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{v}_{e1}}{\partial t}$ 与其他项相比可以忽略,得到

$$T_e \nabla n_{e1} + e n_0 \boldsymbol{E}_1 = 0, \tag{2-80}$$

这相当于假设电子的热压力与自洽电场力在瞬间达到了平衡,在离子运动的时间尺度下,对电子运动经常可以采用这样的绝热近似,这在后面还会遇到.

将各扰动量假设为简谐波的形式,考虑最简单的冷离子($T_i = 0$)情形,利用关系式(2-80),在一维空间情况下得到

$$\mathrm{i} k T_e n_{e1} + e n_0 E_1 = 0, \tag{2-81a}$$

$$- \mathrm{i} \omega_k n_{i1} + \mathrm{i} k n_0 v_{i1} = 0, \tag{2-81b}$$

$$- \mathrm{i} \omega_k m_i v_{i1} = e E_1, \tag{2-81c}$$

$$ikE_1 = 4\pi e(n_{i1} - n_{e1}). \tag{2-81d}$$

由式(2-81)有非零解的条件，在长波近似($k \ll \lambda_D^{-1}$)下得到 $\omega_k$ 与 $k$ 之间必须满足下面的关系

$$\omega_k^2 - k^2 T_e/m_i = 0, \tag{2-82}$$

令 $c_s \equiv \sqrt{T_e/m_i}$，最后得到

$$\omega_k = kc_s. \tag{2-83}$$

色散关系(2-83)描述了等离子体中以离子声速 $c_s$ 传播的一种纵波，它就是离子声波.

离子声波和朗缪尔波都是电荷密度的振荡波，也是一种自洽静电场的振荡波. 产生离子声波的物理机制与朗缪尔波的不同，在推导朗缪尔波的色散关系时，假设等离子体离子是静止的，电子在自洽电场力、热压力与惯性力竞争下形成密度振荡波；而在离子声波中，局域电中性被破坏是因离子被扰动造成的，电子比离子更快地响应电场的变化，总是试图恢复电中性，不过它的热压力可以起到抗衡自洽电场力的作用，使得电中性不能得到完全恢复，振荡波由此产生. 在离子声波中，直接驱动离子运动的是自洽电场力，而电场力又与电子热压力达到瞬时平衡，由此可以理解，为什么离子声速 $c_s = \sqrt{T_e/m_i}$ 依赖于离子的质量 $m_i$ 却与离子温度 $T_i$ 无关，反而依赖于电子温度 $T_e$，即使在冷离子 $T_i = 0$ 极限下也允许离子声波传播. 如果假设等离子体离子有一定的温度，基本物理图像不变，只是色散关系(2-83)需要做一点修正.

色散关系(2-76)和(2-83)都是在扰动的线性近似下得到的，如果等离子体没有受到外力作用，它们很好地描写了系统相应的本征运动，如果等离子体受到外力驱动，那么在系统的各种本征模式(包括朗缪尔和离子声模式)中，那些接近外驱动频率的模式最容易被激发，当模式的振动幅度被驱动得足够大时，非线性效应不能再被忽略. 这里所说的非线性效应主要来源于连续性方程中的散度项 $\nabla \cdot (n\boldsymbol{v})$ 和运动方程中的对流项 $(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v}$ 等，在本节所作的近似中这些项被线性化或完全被忽略了.

以激光与等离子体的相互作用为例，在激光入射到非均匀等离子体中时，在光电场频率等于电子等离子体频率 $\omega_{pe}$ 的亚临界密度附近，朗谬尔振荡模式首先被激发，电子随着外电场快速抖动；当抖动的振幅足够大时，流体方程中那些非线性项开始起作用，例如高频的电子振荡会通过对流项 $(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v}$ 的非线性推动一个低频的平均运动，而后者可处于离子声波的响应范围. 这样，等离子体的两个基本静电振荡模式，朗缪尔波和离子声波，将发生耦合，第三章将会对此作进一步的讨论. 物理系统中出现非线性效应可以有各种缘由，对那些适于用流体模型描写的系统来说，最重要的非线性效应正是流体方程本身所蕴涵的. 在下一章中，通过介绍流体和等离子体中几个重要非线性波动方程的导出过程，我们会了解这一点.

# 第三章　实际系统中的非线性波

本章将介绍几个重要的非线性波动方程,它们分别描写由中性粒子组成的普通流体和由带电粒子组成的等离子体中的集体运动现象.流体力学方程组是推导这些非线性波方程的出发点,在等离子体系统中,因为带电粒子的集体运动牵涉到静电或电磁场的运动,流体力学方程组还不完备,需要与麦克斯韦方程组联立求解.

一个波动系统,除与外界可能存在的能量交换之外,影响其动力学行为最重要的内部因素有两个:一是它的线性色散性质,一是它可能的非线性.因此,作为物理研究,首先要问的就是波动模型描写了怎样的色散和非线性行为.本章将说明,正是基于对其色散性质的追问,人们才修正了 KdV 方程,建立起物理上更合理的描写中性流体长波运动的方程.本章接下去将介绍的一些非线性波方程,包括几个等离子体漂移波方程和描写旋转中性流体中波动的方程,都具有与这个长波方程相同的线性色散行为,它们的非线性项也同样都来源于流体力学系统内禀的非线性性质,只是在不同物理和几何条件下表现不同.本章最后将介绍激光在等离子体中的一个传播方程,它与薛定谔方程在形式上的相似与区别,对我们认识非线性波的动力学非常有启发.

在分析中性流体系统和等离子体系统中的非线性波动时,人们发现了一个十分有趣的现象,在这两类不同物理系统中分别独立导出的某些非线性波方程,竟然有完全相同的数学形式,在中性流体中这些方程描写的是重力表面波,而同样的方程在等离子体中却描写带电粒子的集体运动和与之相关的静电场波动,性质不同的非线性波动遵循着完全相同的运动规律.显然,这样的一些非线性波方程具有更加普遍和重要的物理意义,它们的动力学性质也理应受到特别的重视.

## §3.1　流体力学方程的内禀非线性

流体力学方程组具有内禀的非线性性质,这一点特别明显地表现在运动方程(2-49)中,在欧拉表象下该方程有下面的形式

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{m}} - \frac{1}{\rho}\nabla p, \tag{3-1}$$

这里 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{m}}$ 是作用在单位质量流体上的力,$\rho$ 为质量密度.我们看到,等号左边的对流项$(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v}$关于 $\boldsymbol{v}$ 有显式的非线性形式,除非速度场是空间均匀的,一般在空间某

点的流速随时间的变化率总是依赖于该点处速度本身的大小和方向等参量，因此非线性对于运动方程(3-1)来说完全是一个内禀的性质.

连续性方程(2-48)同样具有内禀的非线性，将方程重新写出如下

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=0,\tag{3-2}$$

在空间点 $\boldsymbol{x}$ 处密度 $\rho(\boldsymbol{x},t)$ 的演化不仅依赖于密度 $\rho$ 本身在这一点的状态，而且与当时当地流速 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$ 有关，除 $\boldsymbol{v}$ 等于常数的定常流外，流速 $\boldsymbol{v}$ 一般又通过运动方程(3-1)反过来依赖于密度 $\rho$，因此，散度项 $\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})$ 通常包含了非线性效应.

在实际问题中流体力学方程组中某些项的系数也可能引入非线性效应，例如内能或温度的演化常与热传导或辐射有关，而热传导系数和辐射率本身又可能是温度的非线性函数. 不过相比而言，这一类非线性效应不像前面提到的那些更具深刻的物理内涵，就我们关心的波的动力学而言，那些内禀的非线性性质显得更加重要. 以流体湍流为例，人们早已观察到它有许多普适性质，如强湍流的谱函数在很宽的范围内随波数 $k$ 的变化遵循幂律(power law)等[3]，很难想象这些普适规律会出自不同系统的某些细节，相反，它们应该源于那些植根于流体力学系统本身的非线性性质.

本章将从流体力学方程组出发推导几个典型的非线性波方程，推导过程也证实了上面的分析，它们中的一些非线性项或来源于连续性方程中的散度项 $\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})$，或可追溯到运动方程中的对流项 $(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$. 无论是普通中性流体还是等离子体流体，正是由于它们都有内禀的非线性，这些系统表现出异常丰富的非线性现象，成为探索非线性波的动力学的理想体系. 当然，除了上面提到的这些因素而外，系统的几何也可能引入新的非线性效应，它们对动力学的影响也不可小视. 不过在本书中，我们限于分析周期边界下的非线性波动现象，在自然界这类边界条件最为普遍，如许多恒星和行星表面流体都属于这类情形，将有限边界的系统周期性地延拓，也可用于讨论在无穷大空间中传播的波动.

## §3.2　描写浅水波的 KdV 方程和正规长波方程

在第二章中我们曾直接引用了 KdV 方程，这个方程是为解释孤立子现象建立的. 关于孤立子是如何发现的故事许多人都耳熟能详：1834 年英国人 J. Scott. Russell 为研究小船运动，在 Edinburgh-Glasgrow 一条狭窄河道边骑马行走时注意到，一艘由两匹马拉着迅速行驶的船突然停止后，在船头前堆积起的水头形成了一个光滑水包，它离开船体以每小时 8～9 mile(英里)* 的速度行进，水包约有 30 ft(英尺)*

* 1 mile＝1 609.344 m，1 ft＝0.304 8 m.

长、1 ft 高，在运行了大约 1～2 mile 的距离内一直保持着原来的形状，后来才渐渐消失[1]. 在这次不期而遇之后，发现者对这个后来被称为孤立子的现象又进行了一些实验观察，在此基础上 1895 年 Korteweg 和 de Vries 在浅水波(shallow water wave)假设下导出一个非线性波动方程，成功地解释了孤立子现象，这个方程后来以他们的名字命名，被称为 Korteweg-de Vries 方程或简称 KdV 方程. 毋庸置疑，KdV 方程的建立对人们认识孤立子现象起到了历史性的作用，它是一个最著名的非线性波方程[20,1,2]. 本节将介绍这个方程是如何从流体力学方程组推导出来的，在了解方程物理背景的同时，我们也将看到，推导中包含的近似处理导致了方程在物理上的一些重要缺陷.

KdV 方程描写的是浅水波中的现象，所谓浅水波是指波长远大于水深，且振幅远小于水深的波动. 例如，普通的海上风暴潮和引起海啸的波浪都属于重力表面波，它们的起因不同，引起海啸的波动具有浅水波的特点，而风暴潮则属于深水波. 这似乎有悖于我们的直觉，不过看一下数据就会明白：引起海啸的波动在靠近海岸之前浪头并不高，典型地只有几十厘米到 1 m，波长却达 10～100 km，与 1 km 左右的近岸海洋深度相比，波的幅度很小而波长非常长. 这种浅水波的巨大能量由极高的波速携带，衰减很慢，这一点也容易被肉眼所忽视，在海啸发生之前人们往往有海上"风平浪静"的感觉，茫然不知大祸将临. 相反，普通风暴潮波长的典型尺度是 100 m 左右，远小于海洋深度，其浪头却可高达 7～8 m[21].

## 3.2.1 KdV 方程的导出

下面我们将考虑在未扰时深度为 $h_0$ 的水层中传播的浅水波[16]，波长 $\lambda \gg h_0$，水层高度 $h$ 的扰动 $\Delta h \equiv h - h_0$，有 $|\Delta h| \ll h_0$，如图 3-1 所示.

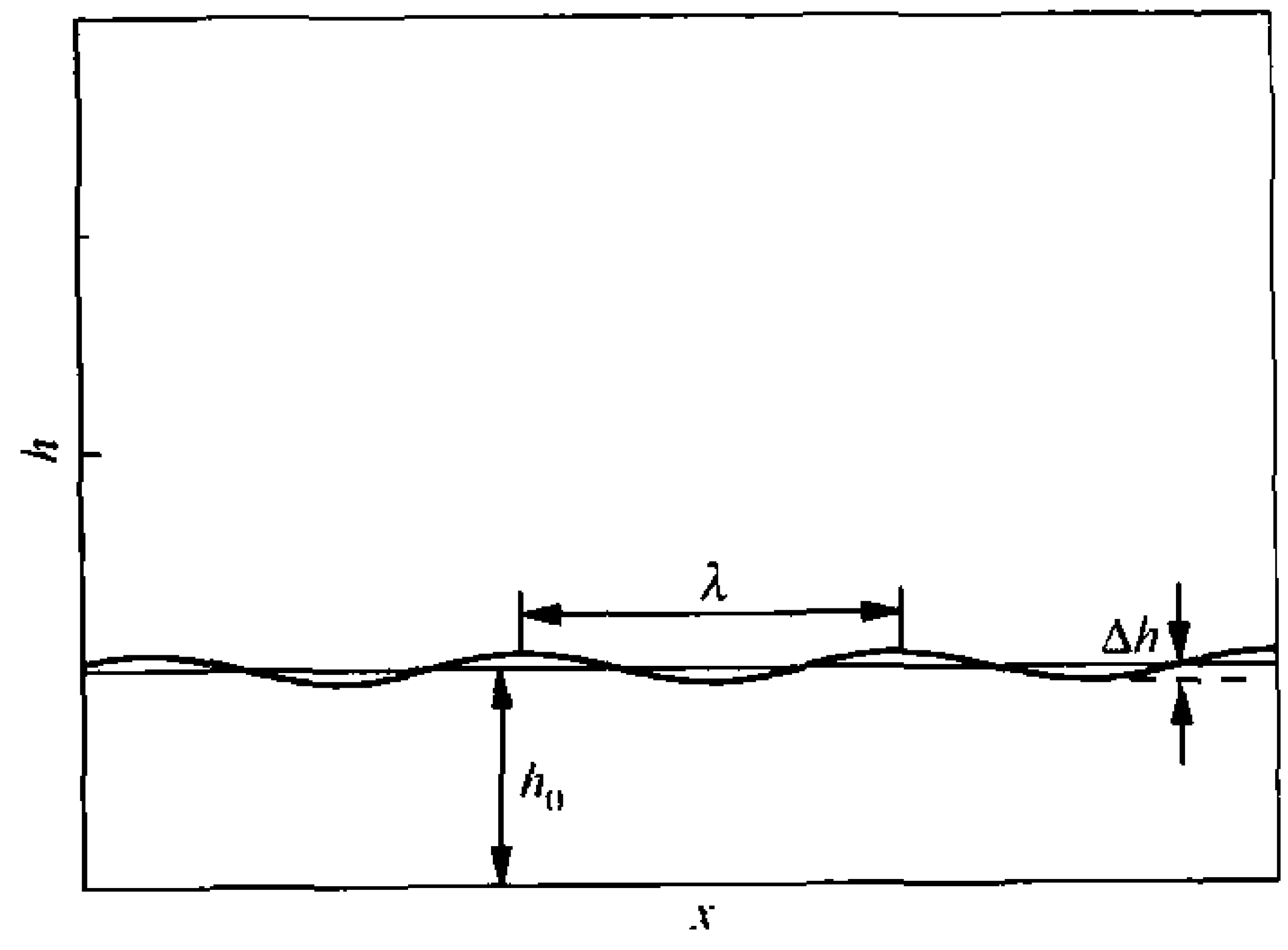



图 3-1 表面波示意图

对于这类浅水波($\lambda \gg h_0$ 和 $|\Delta h| \ll h_0$)，可以忽略沿垂直方向的速度变化. 进一步假设运动在水平面 $Oxy$ 的 $y$ 轴方向均匀，只考虑沿 $x$ 轴方向一维空间的流体运

动.当水层高度发生变化时,对流体元施加的压力 $p$ 发生改变,从运动方程(3-1)得到流体元的速度 $v(x,t)$随时间的变化满足下面的方程

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0, \tag{3-3}$$

因水层高度变化 $\Delta h$ 引起的压力变化为 $\Delta p=\rho g\Delta h$,这里 $g$ 是重力加速度,上式变为

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}+g\frac{\partial h}{\partial x}=0. \tag{3-4}$$

此外,不可压缩的水流还要受到连续性方程(3-2)的制约

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(vh)=0. \tag{3-5}$$

将水波高度 $h$ 与流速 $v$ 之间的函数关系记做 $h=h(v)$,用 $\mathrm{d}h/\mathrm{d}v$ 乘方程(3-4)两边,再与方程(3-5)相减,化简后得到

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}v}=\pm\sqrt{\frac{h}{g}}, \tag{3-6}$$

将上式代入方程(3-4)得

$$\frac{\partial v}{\partial t}+(v\pm\sqrt{gh})\frac{\partial v}{\partial x}=0. \tag{3-7}$$

在小振幅近似下有

$$h\approx h_0+\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}v}v=h_0\pm\sqrt{\frac{h_0}{g}}v, \tag{3-8}$$

代入方程(3-7),精确到二次项得到

$$\frac{\partial v}{\partial t}+c_0\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{3}{2}v\frac{\partial v}{\partial x}=0, \tag{3-9}$$

式中 $c_0\equiv\pm\sqrt{gh_0}$,这里 $\pm|c_0|$ 是线性波沿 $\pm x$ 轴方向的相速度.方程(3-9)已显式地包含了关于 $v$ 的非线性项.

让我们限于考虑沿 $+x$ 轴方向传播的波,约定方程(3-9)中 $c_0>0$.如果忽略非线性项,在余下的线性方程中所有的谐波都具有同样的相速度 $\omega/k=c_0$,不存在色散.因为没有色散,方程(3-9)中非线性项 $v\,\partial v/\partial x$ 将使波形发生如图 2-2 那样的畸变,在波峰前的流体元有更高的向 $+x$ 轴方向运动的速度,波峰后的流体元速度则越来越低,当 $|\partial v/\partial x|$ 趋向无穷时,波速 $v$ 出现空间奇点,非线性终致波碎发生.为了解释孤立子现象,需要假设系统存在一定的色散,它有可能对非线性引起的波形畸变起到平衡作用.

假设介质存在弱的色散,相速度 $\omega/k$ 作为波数 $k$ 的函数应该有怎样的形式呢?首先相速度必须是 $k$ 的偶函数(奇函数对应的不是色散),并且对所有 $k$ 都有正的相速度,以保证各谐波均沿 $+x$ 轴方向行进,这样在小 $k$ 近似下不失一般性可以假

设相速度有下面的形式

$$\omega/k = c_0(1 - k^2/2k_0^2), \tag{3-10}$$

这里 $k_0$ 是系统的特征波数(满足 $k^2 \ll 2k_0^2$),由此得到下面的线性色散关系

$$\omega - c_0 k + c_0 k^3/2k_0^2 = 0, \tag{3-11}$$

作代换 $-\mathrm{i}\omega \to \partial/\partial t$, $\mathrm{i}k \to \partial/\partial x$,再把式(3-9)中的非线性项重新加进去,得到

$$\frac{\partial v}{\partial t} + c_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{c_0}{2k_0^2}\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{3}{2}v\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \tag{3-12}$$

这就导出了描写有弱色散和非线性的浅水波运动方程.在适当的无量纲化变换之后,方程(3-12)化为

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + v\frac{\partial v}{\partial x} = 0. \tag{3-13}$$

方程左边第二项可以通过变换 $x \to x - t$ 消去,上式变为

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + v\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \tag{3-14}$$

这就是 KdV 方程一般常见的形式.

### 3.2.2 KdV 方程在物理上存在的问题

一百多年来,不少数学家和物理学家都对 KdV 方程做了深入研究,发现了方程许多有趣的性质[22,23,20].例如,KdV 方程有孤立子类型的解 $v = v(x - ut)$,它是一个以常速 $u$ 运动且形状不变的波包,两个 KdV 孤立子的碰撞是弹性的,碰撞后仍然按照各自的形状和速度前进,在这个意义上人们常说孤立子很像一个粒子.前面已经提到,这类稳定运动的波包首先是在实际流体中观察到的,而 KdV 方程孤立子解的发现则成功地解释了这一现象.

KdV 方程这些漂亮的特性使它成为最著名的非线性偏微分方程之一,很少有人对它在物理上的意义有所怀疑.后来,T. B. Benjamin,J. I. Borna 和 J. J. Mahony 在试图证明 KdV 方程一类解的存在性时遇到了困难,这类解定义在无穷大空间 $(-\infty, \infty)$ 中并有非周期的初始条件,由此他们觉察到这个方程在物理上有某些缺陷,并指出 KdV 方程作为研究实际物理问题的模型可能存在的问题[24].该文章中有一节采用了“KdV 方程的缺点”(Shortcomings of KdV equation)这样的小标题,认为这个模型并不适合于研究长波问题(an unsuitably posed model for long waves).不过他们的观点似乎并没有受到足够的重视,人们热中于讨论 KdV 方程的优美数学性质,却往往不关心它在物理上是否合理.近几十年来,非线性问题已经越来越多地进入物理学家、化学家甚至生物学家的视野,在处理复杂现象时人们发现线性理论能解决的问题十分有限,非线性现象包括非线性波动成为不得不面对的课题.在这种情况下,建立物理上有意义的恰当模型显得尤为重要.重温这些

学者对 KdV 方程的批评是非常有益的.

就讨论实际物理问题而言,KdV 方程的不足之处在于它的色散项. 从前面的叙述可以看到,这个方程不是在流体力学方程组的框架下自洽地推导出来的,在推导过程中的确曾运用了运动方程和连续性方程,不过这样导出的方程(3-9)中只出现了漂移项 $\partial v/\partial x$ 和非线性项 $v\partial v/\partial x$,KdV 方程(3-14)中非常重要的色散项 $\partial^3 v/\partial x^3$ 是通过修正方程(3-9)对应的线性波色散关系人为地加进去的. 在修正色散关系时,曾经作了小 $k$ 假设($k^2 \ll 2k_0^2$),而在实际系统中,即使在长波占优的情况下,高 $k$ 即短波长模式也可能在运动中起重要作用:如在向湍流转变的过程中会出现能量级联(cascade),即出现从长波向短波模式转移的一个能量流;在一定条件下能量还可能出现逆向级联(inverse cascade),如在托卡马克等离子体(参考节 3.3)中就可出现这样的过程,它导致等离子体中出现长寿命大尺度的结构,这降低了湍流引起的反常输运[25,26]. 显然,在导出 KdV 方程时采用的小 $k$ 近似,已经事先排除了该方程应用于这类问题的可能性.

事实上,KdV 方程作为一个描写长波运动的物理模型,其问题不仅在于它的适用范围,还在于方程本身有非常深刻的缺陷. 文[24]的作者指出,正是 KdV 方程的先天不足使得他们在证明一类解的存在性时,遭遇到难以克服的技术性困难.

为说明 KdV 方程存在的问题,回忆在推导过程中曾作了线性波单向运动(如 $+x$)的假设,小 $k$ 近似就是这个条件要求的,否则若 $k>\sqrt{2}k_0$,根据色散关系(3-11),相速度将变号,这就破坏了线性波单向运动的假设. 遗憾的是,在小 $k$ 假设下得到的方程(3-13)的色散关系却不能保证所有谐波都沿 $+x$ 方向运动. 忽略方程(3-13)中关于 $v(x,t)$ 的非线性项,得到简谐波模式 $k$ 的相速度是

$$\omega_k/k = 1 - k^2. \tag{3-15}$$

显然,如果波数 $k$ 足够大,模式将有负的相速度,$\omega_k/k<0$,这与我们最初的模式正向运动假设背道而驰.

更为严重的是,波的群速度

$$\mathrm{d}\omega_k/\mathrm{d}k = 1 - 3k^2 \tag{3-16}$$

在大 $k$ 时没有下界,这就是说,小尺度结构将逆向运动且速率无上限. 这一结论不仅是非物理的,在对方程作数值计算时也会出现问题. 例如,即使初始时假设了长波结构,计算的舍人误差也不可避免地会引入小尺度结构,这将给计算带来麻烦. 此外,为保证差分格式的稳定性,计算中空间和时间步长等需要满足一定限制条件,它们也可能与导出 KdV 方程时假设的条件发生冲突.

仔细分析方程的推导过程,可以清楚地看到,KdV 方程之所以存在这些问题,是在推导过程中将高波数截断下得到的近似色散关系(3-11)直接推演到连续空间所造成的. 这里的关键步骤是把 i$k$ 改写做 $\partial/\partial x$,经过这一步代换,就从模式 $k$-空

间转换到了坐标 $x$-空间，而在连续坐标 $x$-空间中模式的波数 $k$ 可以趋向无穷大，这破坏了原先的小波数 $k$ 假设，造成了 KdV 方程物理上不合理的色散行为.

### 3.2.3 正规长波方程

在指出 KdV 方程的缺点以后，Benjamin 等人提出了一个新的模型方程来描写长波运动[24]，它有下面的形式

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial^3 v}{\partial t\partial x^2}=0. \tag{3-17}$$

代替 KdV 方程(3-13)中的色散项 $\partial^3 v/\partial x^3$，在方程(3-17)中起色散作用的是时间和空间的混合导数项 $\partial^3 v/\partial t\partial x^2$. 忽略非线性项后，得到系统(3-17)的线性色散关系为

$$\omega_k/k=1/(1+k^2). \tag{3-18}$$

对所有的波数 $k$，由式(3-18)决定的相速度 $\omega_k/k$ 和群速度 $\mathrm{d}\omega_k/\mathrm{d}k$ 不会改变符号并且都是有界的，这就避免了 KdV 方程那样物理上不合理的色散行为. 特别是，群速度随 $k\to\infty$ 趋于零，表明波动解中的小尺度结构几乎不传播，这正是一个物理系统预期应有的性质. 一般在初始波形的设定或者数值计算中总难免会有小尺度的结构出现，如果像 KdV 方程的解那样，尺度越小的空间结构传播速度越高，这在物理上是不可想象的. Benjamin 等人将方程(3-17)命名为 Regularized Long-Wave 方程[27]，可译为正规长波方程，意思是将原来描写长波运动的 KdV 方程经过调整，使之在物理上更合理. 根据文[24]作者名字的第一个字母，一些文献也称方程(3-17)为 BBM 方程.

在文[24]中，作者还讨论了受到外力 $f(x,t)$ 驱动的 BBM 方程，写做

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial^3 v}{\partial t\partial x^2}=f(x,t), \tag{3-19}$$

它描写在一定初始状态 $v(x,0)$ 下系统对外力 $f(x,t)$ 的响应. 作者证明了方程(3-19)的解和方程(3-17)的一样都具有存在性、唯一性等数学上令人满意的性质，建议在讨论弱色散介质中的长波运动时采用这两个更合理的模型.

令人鼓舞的是，对于在非均匀磁化等离子体中传播的漂移波，可以在一定条件下从流体模型出发直接推导出与 BBM 方程形式完全一样的波动方程，在等离子体物理中它被称为一维非线性漂移波方程. 在下一节中我们将给出它的推导过程. 尤为重要的是，方程中混合导数项 $\partial^3 v/\partial t\partial x^2$ 在推导中自动地出现，无需像上面导出方程(3-17)时那样人为地加入. 这或许说明 BBM 方程有相当可靠的物理基础，可以作为讨论长波问题的一个合理模型.

除一维非线性漂移波方程外，在更高维的非均匀磁化等离子体系统中还导出过一些形式更为复杂的非线性波方程，其中一个著名的方程是 Hasegawa-Mima 方

程，它有涡旋(votice)和湍流解．人们惊讶地发现，这个方程与旋转中性流体中著名的 Charney 方程也有相同的形式，后者有所谓的 Rossby 涡旋解[28]．下一节我们将介绍包括这些方程在内的几个重要等离子体非线性波动方程．在中性和等离子体流体中居然导出了形式上完全相同的非线性波方程，这说明两个物理系统中的波动在动力学上是共通的．

## §3.3　等离子体和中性流体中的几个非线性波方程

本节将介绍几个著名的非线性波方程，重点是在不同假设下导出的形式不同的非线性漂移波方程．

让我们从托卡马克(Tokamak)等离子体湍流现象说起，这些现象与漂移波的激发有关．托卡马克是有环形磁场结构的一类受控热核聚变装置，沿它的大环(半径为 $R$)方向施加有主磁场 $B_\varphi$ 和等离子体放电电流 $J$，后者产生沿小环方向的角向磁场 $B_\theta$，且在小环半径 $r$ 处角向磁场强度 $B_\theta(r)$ 正比于以 $r$ 为半径的小圆包围的电流大小，$B_\theta(r)$ 与 $B_\varphi$ 的合成磁场形成嵌套的环面形状，每一个环面都由一根螺旋形的磁力线缠绕而成，称为磁面(见示意图 3-2)．在理想情况下，等离子体带电粒子的运动被约束在这些磁面上．

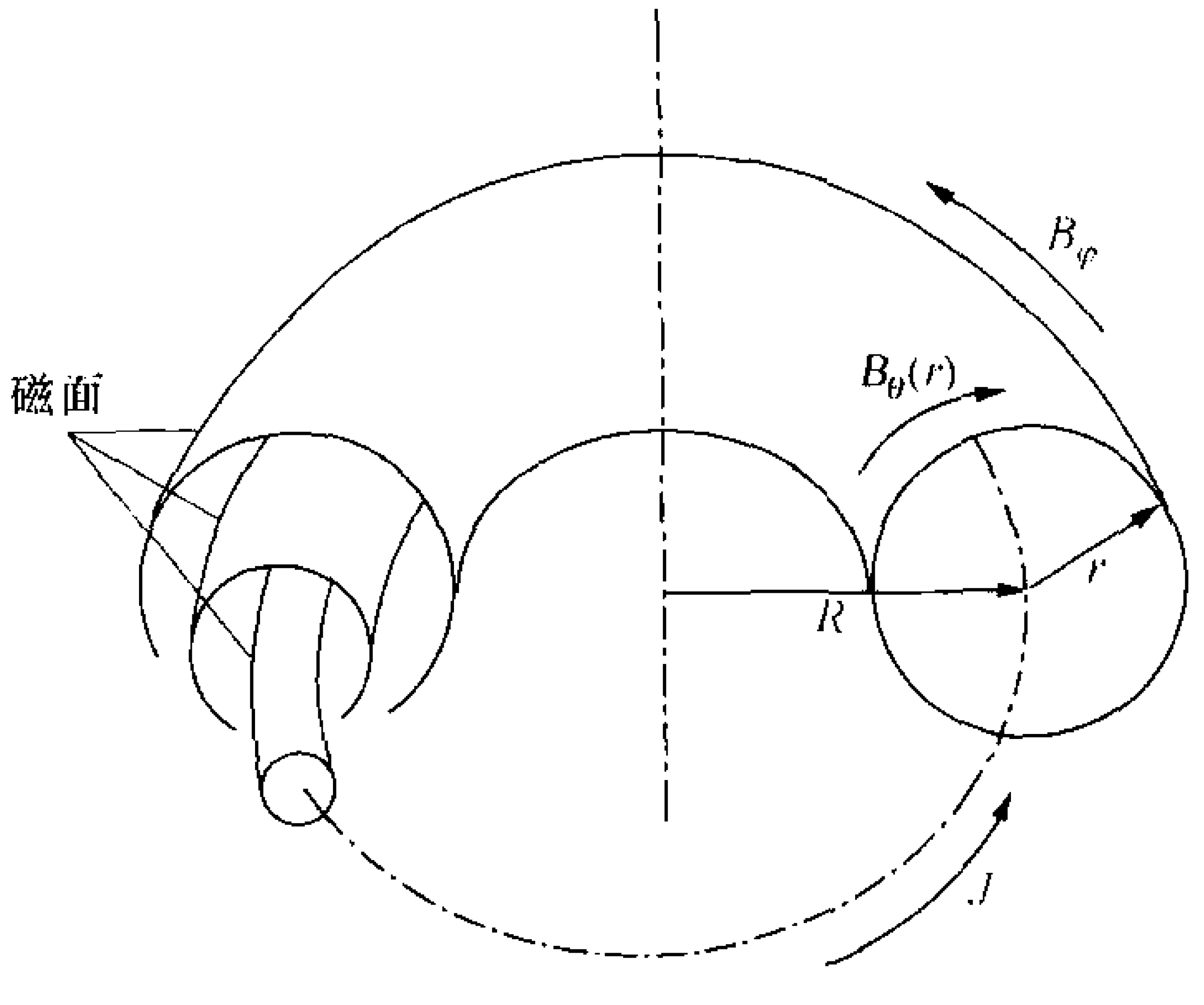



图 3-2　托卡马克磁场位形示意图

人们在 1976—1978 年间采用微波和激光散射测量时发现，在托卡马克等离子体中存在一种小尺度的密度涨落，它所引起的散射谱所在的频率范围与等离子体漂移波的一致，而且频谱非常宽，将谱宽记做 $\Delta\omega$，电场涨落的特征频率记做 $\langle\omega\rangle$，实验观察发现有 $\Delta\omega>\langle\omega\rangle$．图 3-3 给出了在 4 个散射角 $\theta_s$ 处测量的微波频率谱，它们是由波长 $\lambda$ 在 0.4～2.3cm 范围内的密度涨落散射而来的．此时等离子体湍流中粒子密度涨落水平却不大，有 $\sqrt{\langle\delta n^2\rangle}/n_0\ll 1$[29]．这一实验结果迫使聚变科学家重

新思考托卡马克湍流的理论解释，弱湍理论曾是托卡马克湍流的主导理论，在这之后强湍研究提上了日程[30].

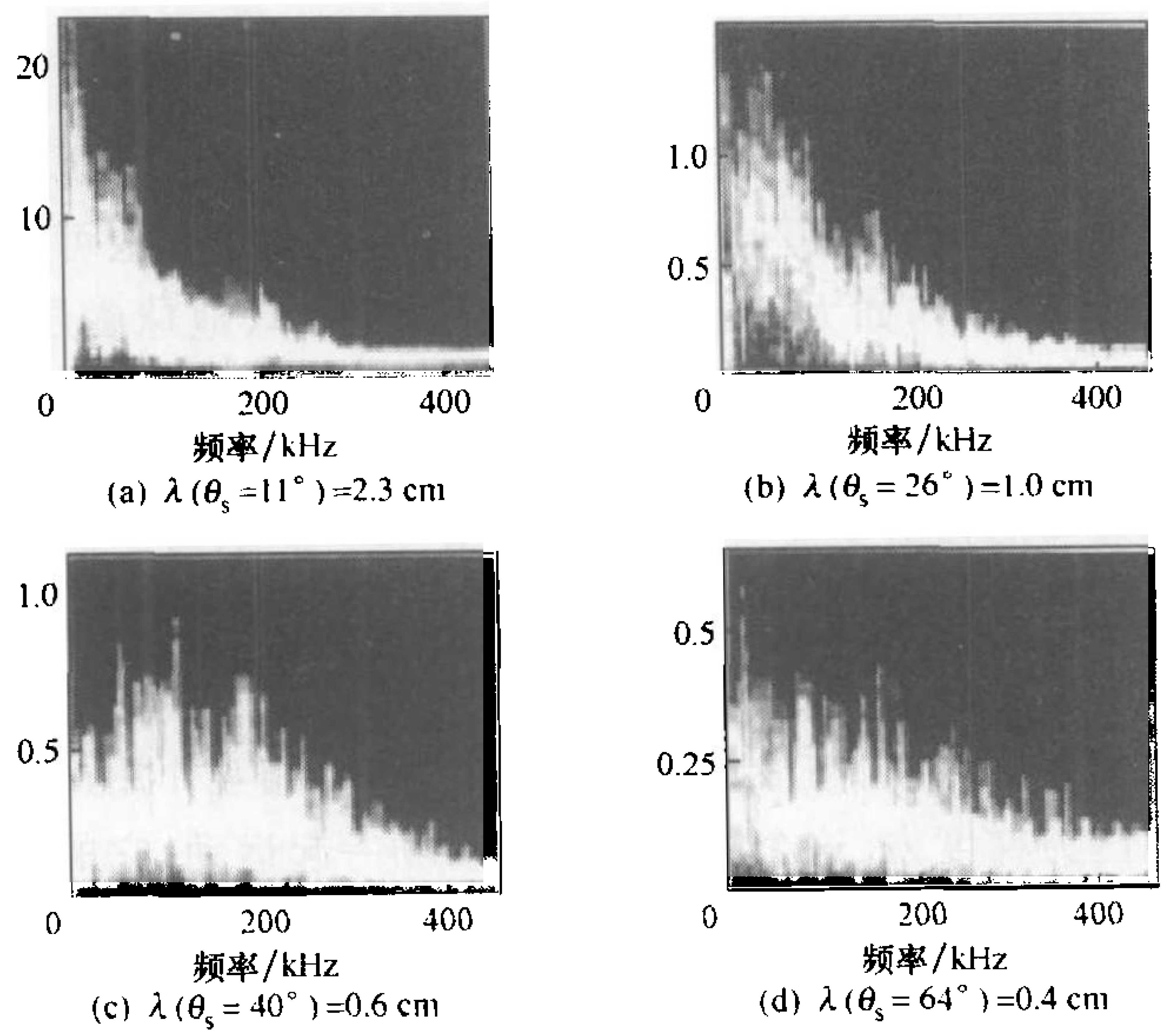



图 3-3　在托卡马克实验装置上测量的微波散射谱，纵坐标正比于散射微波电场强度，任意单位.（引自文[31]）

实验测量早就发现，托卡马克等离子体中存在反常的电子热输运，在很长时间内这个现象一直令人迷惑不解，一般认为它是等离子体微观不稳定性引起的，但又缺乏直接测量证据[31]. 在托卡马克等离子体中，漂移波是低频范围内重要的集体振荡运动，在这个频率范围中测量到宽的散射谱这一事实表明，这类集体运动是引起电子反常热输运的主要原因. 在漂移波最终发展成强湍流运动的同时，等离子体中出现了小尺度的密度涨落，带电粒子在这样的随时间和空间无序变化的湍流静电场中运动时所受到的作用力也是无序的，它们有一定几率被电场极大地加速，从系统中逃逸，从而造成了粒子和热能的集体耗散. 在托卡马克这样的稀薄等离子体中，漂移波湍流引起的粒子和热能的集体输运要比带电粒子二体碰撞引起的输运高出很多个数量级，与前者相比，后者对输运的影响通常可以被忽略[32].

正是在这样的背景下，对于非线性漂移波特别是与之相关的湍流现象的研究，受到了广泛的重视，迅速地发展起来. 在微波测量结果[31]发表后，很快就有学者提出了一个漂移波理论模型来计算电位涨落的谱密度分布，得出的结果符合微波散射观测谱的主要特征[33~35]. 而对漂移波的深入研究，正如下面将会看到的，又揭示出它与中性流体中某些集体运动有许多相似甚至相同的规律[36,30]，这一事实更增强了人们研究非线性漂移波的兴趣，希冀通过这方面的探索，能够加深对湍流特别

是强湍流运动机制的理解,故对漂移波研究的意义已经远远超出了解释托卡马克反常输运这一初衷[31,37,29].

### 3.3.1 非均匀磁化等离子体中的漂移波

漂移波是出现在非均匀磁化等离子体中的一种低频波动,研究表明实验观察到的托卡马克等离子体湍流就是由漂移波所驱动的.漂移波也可能出现在自然界其他一些等离子体系统中,如太阳或其他恒星等离子体、地球磁层等离子体等,这些等离子体与托卡马克等离子体一样都浸在磁场中,它们的密度、温度等参量一般都有空间梯度,这种宏观不均匀性提供了驱动漂移波所需要的自由能.

在进入公式推导的细节之前,让我们先在图 3-4 的平板几何下对漂移波形成的物理机制做个唯象说明[38].图中外加均匀磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 垂直于纸面指向外,等离子体压力梯度 $\nabla p$ 指向 $-x$ 轴方向.如果只考虑电子的运动,平均来说,系统一定会产生一个沿 $y$ 轴方向的电子流,它与沿 $z$ 轴方向的磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 相互作用产生洛伦兹力来平衡沿 $x$ 轴方向的压力梯度力.这个流携带着扰动场一起运动,它的方向就是电子的抗磁漂移速度(diamagnetic drift speed)的方向[18].

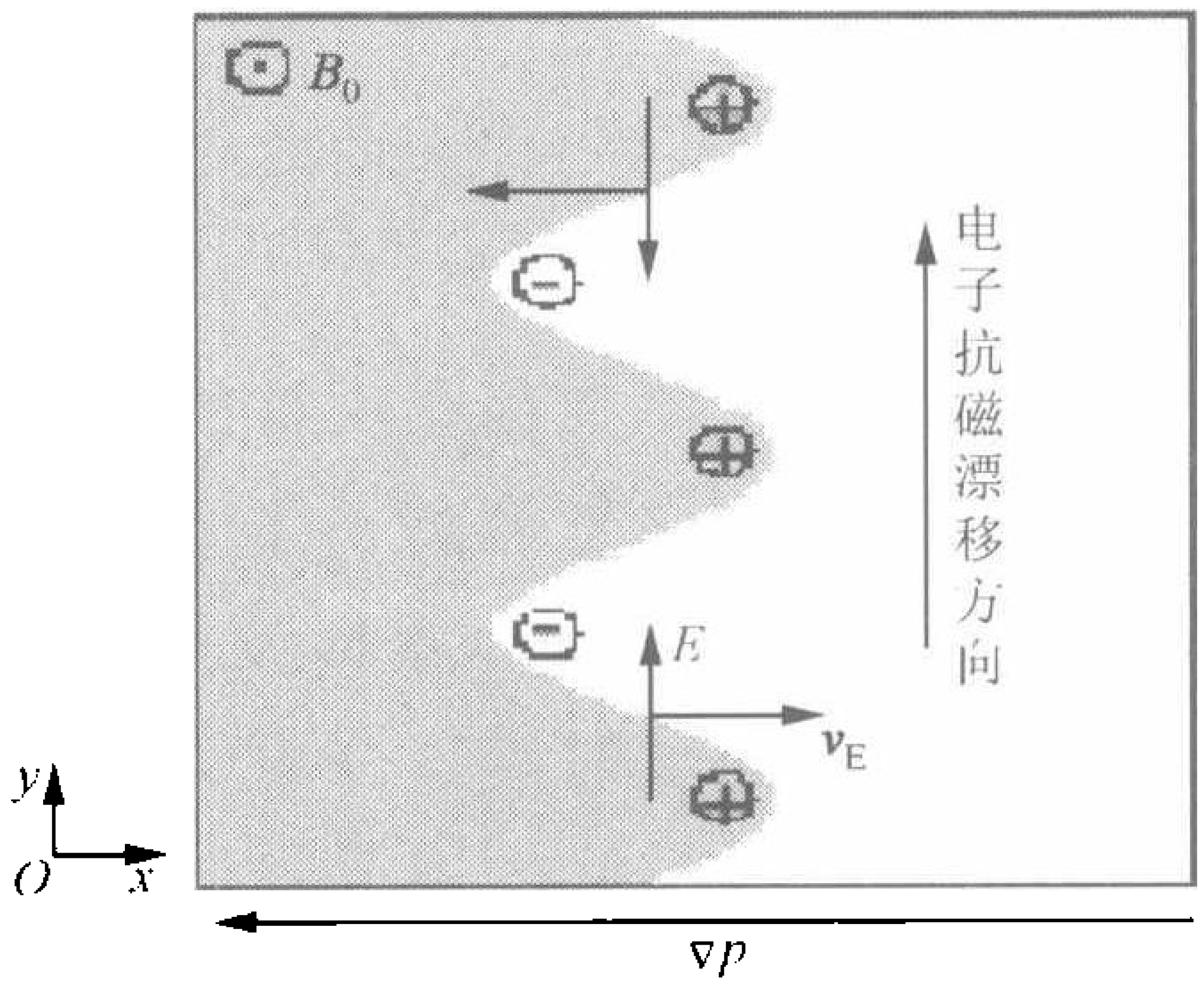



图 3-4 平板几何下漂移波运动的示意图

在图 3-4 的条件下,带电粒子主要的扰动运动是所谓的 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ 漂移.为说明它的机制,我们先回忆在有外加常磁场 $\boldsymbol{B}$ 的等离子体中单个带电粒子的运动轨道[7].速度为 $\boldsymbol{v}$ 的带电粒子围绕磁力线作回旋运动,回旋半径正比于粒子的切向速度,如果此时带电粒子同时又受到电场 $\boldsymbol{E}$ 的作用,那么它在顺电场和逆电场运动的两个旋转半周中将受到相反方向的加速力,这造成粒子的旋转半径在运动中反复地增加和减小,总的效果是粒子回旋运动的导向中心在垂直于磁场和电场的方向上出现漂移.这就是带电粒子的 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ 漂移运动,漂移的大小和方向由下式决定[12]

$$\boldsymbol{v}_\mathrm{E} = \frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{B^2}. \tag{3-20}$$

在我们的情况下没有外加电场，但等离子体带电粒子的集体运动总会产生涨落电场. 假设初始时等离子体有压强扰动，那么系统会建立起扰动电场 $\boldsymbol{E}$，以产生与之抗衡的静电力，这样，在外加磁场和扰动电场的共同作用下带电粒子将在垂直于磁场的方向上产生 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ 漂移，如图 3-4 所示. 扰动沿电子抗磁漂移方向传播，形成了漂移波.

$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ 漂移之所以特别引起重视，是因为所有带电粒子都以相同的速度和方向漂移. 容易说明，粒子的质量、电荷量以及电荷的正负号等因素，在回旋的加速半周和减速半周精确地互相抵消，结果漂移速度(3-20)只依赖于电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{B}$，而与粒子参数无关. 因此，$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ 漂移不会引起电荷分离，带电粒子系统也就不会产生任何静电恢复力来阻止这种漂移扰动，这使得这类漂移波成为托卡马克以及其他很多等离子体系统中最重要的低频波动之一.

## 3.3.2　由等离子体流体描述导出漂移波方程

由于考虑的物理因素各有不同，在文献中出现了不同形式的漂移波方程，本小节将首先导出带电粒子漂移速度的表达式，并在此基础上介绍推导漂移波方程的一般步骤，在下面几小节中再在不同条件下推导形式各异的漂移波方程. 漂移波是一种低频波动，因此需要同时考虑离子和电子的运动.

质量为 $m_i$，数密度为 $n_i$，电荷为 $e$ 的离子运动方程是

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}=-\frac{1}{m_i n_i}\nabla p_i-\frac{e}{m_i}\nabla\varphi+\frac{e}{m_i}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B},\tag{3-21}$$

这里 $\mathrm{D}/\mathrm{D}t\equiv\partial/\partial t+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)$，$p_i$ 是等离子体离子的压强，$\varphi$ 是等离子体涨落电场的电位，已取真空光速 $c=1$，并假设外加常磁场沿 $z$ 轴方向，$\boldsymbol{B}=B\hat{z}$.

让我们限于讨论低频扰动，$\omega\ll\Omega_i$，这里 $\Omega_i\equiv eB/m_i$ 是离子围绕磁力线的回旋频率. 为寻找离子在垂直于磁场方向的漂移速度，暂时忽略 $\mathrm{D}\boldsymbol{v}/\mathrm{D}t$，用 $\boldsymbol{B}$ 叉乘方程(3-21)两边，注意到 $\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{v}_{\perp}B^2$，就可以得到垂直于磁场方向的离子速度的最低阶近似

$$\boldsymbol{v}_{\perp}=-\frac{1}{B^2}\nabla\varphi\times\boldsymbol{B}-\frac{1}{n_i eB^2}\nabla p_i\times\boldsymbol{B},\tag{3-22}$$

$\boldsymbol{v}_{\perp}$ 包括两部分贡献，式(3-22)右边第一项是离子的 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ 漂移速度

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{E}}\equiv-\frac{1}{B^2}\nabla\varphi\times\boldsymbol{B},\tag{3-23}$$

它是外加磁场与扰动电场共同作用的结果，第二项是与离子压强有关的漂移速度

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{D}}\equiv-\frac{1}{n_i eB^2}\nabla p_i\times\boldsymbol{B}.\tag{3-24}$$

在得到这两个漂移速度时，忽略了离子的局域加速度 $\partial\boldsymbol{v}/\partial t$ 和对流加速度

$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$,即认为在垂直于磁场 $B\hat{z}$ 方向上离子的压力梯度力、静电力和洛伦兹力在瞬间达到了平衡.如果把不平衡因素考虑进去,可将在最低阶近似下得到的 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ 漂移速度 $\boldsymbol{v}_E$[参见式(3-23)]代入运动方程(3-21)的左边,得到

$$-\frac{1}{B^2}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\nabla\varphi\times\boldsymbol{B})=-\frac{1}{m_i n_i}\nabla p_i-\frac{e}{m_i}\nabla\varphi+\frac{e}{m_i}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}, \tag{3-25}$$

再次用 $\boldsymbol{B}$ 叉乘方程的两边,垂直速度 $\boldsymbol{v}_{\perp}$[参见式(3-22)]被修正为

$$\boldsymbol{v}_{\perp}=-\frac{m_i}{B^2 e}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\nabla_{\perp}\varphi-\frac{1}{n_i B^2 e}\nabla p_i\times\boldsymbol{B}-\frac{1}{B^2}\nabla\varphi\times\boldsymbol{B}. \tag{3-26}$$

这里和下面$\nabla_{\perp}$的下标"⊥"表示只取垂直于磁场方向的分量.与式(3-22)相比,$\boldsymbol{v}_{\perp}$中除 $\boldsymbol{v}_E$ 和 $\boldsymbol{v}_D$ 漂移外,还多出了因电场随时间变化引起的漂移项

$$\boldsymbol{v}_P=-\frac{m_i}{B^2 e}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\nabla_{\perp}\varphi, \tag{3-27}$$

称为极化漂移,它包括来自 $\partial/\partial t$ 和来自对流项$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)$的两部分贡献,即 $\boldsymbol{v}_P=\boldsymbol{v}_{P1}+\boldsymbol{v}_{P2}$,它们分别是

$$\boldsymbol{v}_{P1}=-\frac{1}{\Omega_i B}\frac{\partial}{\partial t}\nabla_{\perp}\varphi, \tag{3-28}$$

和

$$\boldsymbol{v}_{P2}=-\frac{1}{\Omega_i B}(\boldsymbol{v}_E\cdot\nabla_{\perp})\nabla_{\perp}\varphi. \tag{3-29}$$

在得到 $\boldsymbol{v}_{P2}$表达式(3-29)时,对流项中已作近似$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\approx(\boldsymbol{v}_E\cdot\nabla)$.

我们知道,$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ 漂移 $\boldsymbol{v}_E$ 不会引起电荷分离,也就不会产生阻止漂移运动的静电场,它是最重要的一种漂移运动,与之相比,在压力梯度 $\nabla p_i$ 不是很大时,后者引起的漂移 $\boldsymbol{v}_D$ 可以忽略.这样在讨论离子对静电场扰动的响应时,在垂直于磁场方向上有三个重要的离子漂移运动,它们分别是:$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ 漂移 $\boldsymbol{v}_E$,极化漂移 $\boldsymbol{v}_{P1}$ 和 $\boldsymbol{v}_{P2}$.其中最重要的是 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ 漂移,所有讨论漂移波的工作都计入了这个基本要素,在此基础上,或选取不同的极化漂移,或考虑其他一些物理和几何因素,则可分别得到不同形式的漂移波方程.

有了离子的漂移速度,再利用离子运动所满足的连续性方程

$$\frac{\partial n_i}{\partial t}+\nabla\cdot(n_i\boldsymbol{v})=0. \tag{3-30}$$

在磁场 $\boldsymbol{B}=B\hat{z}$ 的情形,只讨论垂直于磁场平面上的漂移运动,有 $\boldsymbol{v}\approx\boldsymbol{v}_{\perp}$(在有磁剪切时,离子速度将会有一个小的平行分量 $\boldsymbol{v}_{/\!/}$,在节 3.3.5 中将考虑这个情形),式(3-30)中的散度项因此变为 $\nabla_{\perp}\cdot(n_i\boldsymbol{v}_{\perp})$.如果忽略 $\nabla p_i$ 引起的漂移,通过关系式(3-26)可将漂移速度 $\boldsymbol{v}_{\perp}$ 表示为 $\varphi$ 的函数,若在离子数密度 $n_i$ 与 $\varphi$ 之间也建立起一定的关系,那么从连续性方程(3-30)就可以导出关于扰动电位 $\varphi(x,t)$满足的方程了.

我们知道，因离子数密度 $n_i$ 受到扰动所造成的电荷分离和电场力，不可避免地将引起电子的迅速响应，因此，与第二章中离子声波的推导一样，这里讨论离子漂移引起的低频运动模式，必须同时考虑电子的运动. 从电子运动方程，忽略洛伦兹力有

$$m_e n_e \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}_e}{\mathrm{D}t} = -\nabla p_e + n_e e \nabla \varphi. \tag{3-31}$$

由于质量轻，电子对势场 $\varphi(\boldsymbol{x},t)$ 的任何变化都非常敏感，在离子运动的时间尺度上，可忽略方程(3-31)左边的惯性项，认为电子压力梯度力 $\nabla p_e$ 与电场力 $n_e e\nabla\varphi$ 在瞬间达到平衡分布，这就是在第二章中讨论离子声波时采用过的绝热电子近似. 由此得到，电子数密度 $n_e$ 对于电位 $\varphi$ 的任何变化将立即按玻尔兹曼规律重新分布为

$$n_e \approx n_0(\boldsymbol{x})\exp[e\varphi/T(\boldsymbol{x})], \tag{3-32}$$

这里 $n_0$ 是未扰等离子体(电子和离子)的数密度，$T(\boldsymbol{x})$ 是等离子体温度. 如果电场扰动幅度不太大，可假设电子的响应是线性的，有

$$n_e \approx n_0(\boldsymbol{x})[1 + e\varphi/T(\boldsymbol{x})]. \tag{3-33}$$

另一方面，等离子体中因电荷分离产生的静电场由泊松方程描写

$$\nabla^2\varphi = 4\pi e(n_e - n_i), \tag{3-34}$$

利用泊松方程(3-34)再结合电子的玻尔兹曼分布(3-32)或它的线性近似(3-33)，可以在离子密度 $n_i$ 与电位 $\varphi$ 之间建立起联系. 作为最低阶的近似，也可以认为在所考虑的低频运动时间尺度下，电场力总是将等离子体很好地保持在准中性状态，因此有

$$n_i \approx n_e. \tag{3-35}$$

这样，根据准中性条件(3-35)再加上电子密度 $n_e$ 的分布(3-32)或(3-33)，也可以在离子密度 $n_i$ 与涨落电位 $\varphi$ 之间建立联系.

无论采用哪种方式，都可将离子密度 $n_i(\boldsymbol{x},t)$ 写做 $\varphi(\boldsymbol{x},t)$ 的函数，代入连续性方程(3-30)，该方程中出现的离子速度 $\boldsymbol{v}$ 则可以近似取做它的漂移速度 $\boldsymbol{v}_{\perp}$［参见式(3-26)］，后者也都是 $\varphi(\boldsymbol{x},t)$ 的函数(忽略压力梯度项)，这样，我们就可以导出因离子漂移运动引起的静电势 $\varphi$ 随时间 $t$ 和空间 $\boldsymbol{x}$ 演化的方程，即漂移波方程.

### 3.3.3　一维非线性漂移波方程

按照上面推导漂移波方程的一般步骤，让我们首先导出与 BBM 方程(3-17)形式相同的方程，即等离子体物理中的一维非线性漂移波方程. 为此目的，仍假设在 $z$ 轴方向有常磁场 $\boldsymbol{B}=B\hat{\boldsymbol{z}}$，等离子体在 $x$ 轴方向压强是非均匀的，非均匀性不仅来自未扰等离子体数密度 $n_0$ 的梯度 $\nabla n_0 = -\left|\frac{\mathrm{d}n_0}{\mathrm{d}x}\right|\hat{\boldsymbol{x}}$，还来自它的温度梯度 $\nabla T = -\left|\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right|\hat{\boldsymbol{x}}$，

这里已假设电子和离子温度相等.在这样的条件下,只需讨论带电粒子在垂直于磁场平面中的运动.在推导过程中,除必不可少的 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ 漂移速度 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{E}}$ 外,还计入了极化漂移速度中的 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{P1}}$ 部分.

将离子的连续性方程

$$\frac{\partial n_{\mathrm{i}}}{\partial t}+\nabla_{\perp}\cdot(n_{\mathrm{i}}\boldsymbol{v}_{\perp})=0 \tag{3-36}$$

左边的散度项改写为

$$\nabla_{\perp}\cdot(n_{\mathrm{i}}\boldsymbol{v}_{\perp})=\nabla_{\perp}n_{\mathrm{i}}\cdot\boldsymbol{v}_{\perp}+n_{\mathrm{i}}\nabla_{\perp}\cdot\boldsymbol{v}_{\perp}, \tag{3-37}$$

其中垂直速度 $\boldsymbol{v}_{\perp}$ 可近似用它的漂移速度替代,即有 $\boldsymbol{v}_{\perp}=\boldsymbol{v}_{\mathrm{E}}+\boldsymbol{v}_{\mathrm{P1}}$.利用 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{E}}$ 的表达式(3-23)和 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{P1}}$ 的表达式(3-28),则式(3-37)右边第二项近似为

$$n_0\nabla_{\perp}\cdot(\boldsymbol{v}_{\mathrm{E}}+\boldsymbol{v}_{\mathrm{P1}})=n_0\nabla_{\perp}\cdot\left(-\frac{\nabla_{\perp}\varphi\times\boldsymbol{B}}{B^2}-\frac{1}{\Omega_{\mathrm{i}}B}\frac{\partial}{\partial t}\nabla_{\perp}\varphi\right), \tag{3-38}$$

因为

$$\nabla_{\perp}\cdot(\nabla_{\perp}\varphi\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot(\nabla_{\perp}\times\nabla_{\perp}\varphi)-\nabla_{\perp}\varphi\cdot(\nabla_{\perp}\times\boldsymbol{B})=0, \tag{3-39}$$

式(3-38)的贡献仅为

$$-\frac{n_0}{\Omega_{\mathrm{i}}B}\frac{\partial}{\partial t}\nabla_{\perp}^2\varphi, \tag{3-40}$$

我们看到,这正是我们期望的时间与空间的混合导数项.

再计算式(3-37)右边第一项,其中 $\boldsymbol{v}_{\perp}$ 可用 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{E}}$[参见式(3-23)]近似,而忽略极化漂移 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{P1}}$ 的贡献,因此有

$$\nabla_{\perp}n_{\mathrm{i}}\cdot\boldsymbol{v}_{\perp}\approx-\frac{1}{B^2}\nabla_{\perp}n_{\mathrm{i}}\cdot(\nabla_{\perp}\varphi\times\boldsymbol{B}), \tag{3-41}$$

根据准中性条件(3-35)有 $n_{\mathrm{i}}\approx n_{\mathrm{e}}$,再假设绝热电子对静电势 $\varphi$ 有线性响应(3-33),可将式(3-41)右边的离子密度 $n_{\mathrm{i}}$ 表示为涨落电位 $\varphi$ 的函数

$$n_{\mathrm{i}}\approx n_{\mathrm{e}}\approx n_0(x)\left[1+\frac{e\varphi}{T(x)}\right], \tag{3-42}$$

这里 $T(x)$是等离子体(电子和离子)的温度.考虑到未扰等离子体温度 $T(x)$和密度 $n_0(x)$是空间非均匀的,式(3-41)这一项变为

$$\nabla_{\perp}n_{\mathrm{i}}\cdot\boldsymbol{v}_{\mathrm{E}}=-\frac{1}{B}\left(n_0'\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{n_0eT'}{T^2}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right), \tag{3-43}$$

式中上标“′”表示 $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$,在导出式(3-43)时,已对其中非线性部分采用了 $|\partial\varphi/\partial y|\gg|\partial\varphi/\partial x|$ 近似.

利用式(3-42)并将散度项(3-37)的两部分贡献式(3-40)和(3-43)一并代入连续性方程(3-36),得到

$$\left(\frac{eB}{T}-\frac{m_{\mathrm{i}}}{eB}\nabla_{\perp}^2\right)\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{n_0'}{n_0}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{e}{T}\frac{T'}{T}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0, \tag{3-44}$$

令 $\rho_s \equiv c_s/\Omega_i$，这里 $c_s=(T/m_i)^{1/2}$ 是离子声速，导出无量纲涨落电位 $\phi=e\varphi/T$ 满足如下形式的方程[39][40]

$$(1-\rho_s^2\nabla_\perp^2)\frac{\partial\phi}{\partial t}+\kappa_n c_s\rho_s\frac{\partial\phi}{\partial y}-\kappa_T c_s\rho_s\phi\frac{\partial\phi}{\partial y}=0, \tag{3-45}$$

这是在等离子体物理中常见的方程形式，式中

$$\kappa_n=-(\mathrm{d}n_0/\mathrm{d}x)/n_0,\quad \kappa_T=-(\mathrm{d}T/\mathrm{d}x)/T.$$

方程(3-45)描写的是具有密度梯度和温度梯度的非均匀磁化等离子体中因带电粒子漂移引起的涨落电场 $\phi$ 随时间和空间的变化，其中含 $\partial\phi/\partial y$ 的项来自 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ 漂移，它的系数给出了静电波沿 $y$ 轴的漂移速度，来自极化漂移 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{Pl}}$ 的是时间和空间的混合导数项 $\frac{\partial}{\partial t}\nabla_\perp^2\phi$，由于温度有空间梯度，$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ 漂移还带来一个非线性项 $\phi\partial\phi/\partial y$.

对方程(3-45)中的时间和空间变量进一步作无量纲化变换：$t=\kappa_n^{-1}c_s^{-1}t$，$\nabla_\perp=\rho_s^{-1}\nabla_\perp$，并标度 $\phi=\eta_e^{-1}\phi$，这里 $\eta_e\equiv\kappa_T/\kappa_n$ 为密度梯度与温度梯度的特征尺度之比，再假设 $|\partial\phi/\partial y|\gg|\partial\phi/\partial x|$，方程简化为空间一维形式，将坐标 $y$ 改写为 $x$，最后得到

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}-\frac{\partial^3\phi}{\partial t\partial x^2}+\frac{\partial\phi}{\partial x}-\phi\frac{\partial\phi}{\partial x}=0. \tag{3-46}$$

方程(3-46)与 BBM 方程(3-17)的形式完全一致，特别是其中的时间和空间混合导数项 $-\partial^3\phi/\partial t\partial x^2$ 与 BBM 方程中的如出一辙，不过方程(3-46)中这一项是直接从等离子体流体基本方程导出的，它源自于带电粒子的极化漂移 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{Pl}}$. 由于混合导数项的存在，方程(3-46)自动给出了线性色散关系(3-18)，它正是文[24]的作者从物理上考虑提出的一个合理色散形式. 需要强调的是，$\partial^3\phi/\partial t\partial x^2$ 这一项的系数是负定的，它是推导方程(3-46)自然得到的结果，不依赖于无量纲化参数的选择(方程左边后两项可因无量纲化参数的选择改变符号). 混合导数项的负定系数正是 BBM 方程和一维非线性漂移波方程在数学上稳定所必需的，若这一项的系数为正，从方程得到的线性相速度(3-18)将变为 $k/(1-k^2)$，它在波数 $k$ 空间有奇点，导致方程不稳定，好在这个问题不会真的在物理上发生.

BBM 方程(3-17)是中性流体在长波假设下导出的重力表面波满足的一个方程，一维非线性漂移波方程(3-46)是在低频假设下导出的非均匀磁化等离子体中涨落静电场的波动或者带电粒子密度涨落的集体运动满足的方程，等离子体中的波动不像表面波那样容易直接用肉眼观察，在测量漂移波引起的等离子体湍流时，需要采用微波和激光等手段. 尽管两种波动在性质上有如此巨大的差异，它们的运动规律却惊人地一致. 这个事实提供了一个例证，说明不同物理系统中，制约粒子的集体运动可能存在着一些共同的规律，也许，更多这样的规律在等待我们去寻

找;这个事实也表明,BBM 方程或一维非线性漂移波方程在物理上有内在的合理性,无论用于描写流体力学中的长波或是等离子体中的低频漂移波,它都是一个重要物理模型,较之 KdV 方程,它的非线性动力学更加值得我们去深入探究.

除了在节 3.2.2 中已经指出的之外,BBM 方程和一维非线性漂移波方程与 KdV 方程还有一些重要差别,例如,在 KdV 方程中也可以加上类似于方程(3-46)中正比于 $\partial\phi/\partial x$ 的漂移项,不过它总可以通过伽里略变换被消除,在动力学上不起实质性的作用. 而同样的变换却不能将一维非线性漂移波方程(3-46)中的漂移项消除,这一项对系统的动力学性质起到举足轻重的作用. 关于这一点,我们在后面讨论以方程(3-46)为基础建立的动力学模型时可以看得更清楚.

此外,方程(3-46)在可积性(integrability)方面与 KdV 方程也表现出差异,有关问题将在第七章中讨论. 简而言之,KdV 方程拥有无穷多个运动积分来约束它的轨道运动,它是一个可积(integrable)系统,只存在时间和空间上有规的相干波动解;而一维非线性漂移波方程(3-46)很可能不是完全可积的,它没有足够的运动积分来约束无穷维相空间中的轨道,因此允许有随时空复杂变化的波动解,在动力学上较之 KdV 方程有更丰富的行为,亟待认识.

### 3.3.4 Hasegawa-Mima 方程

除一维非线性漂移波方程(3-46)外,还有很多工作考虑高维空间中的漂移波运动[41,42]. 描写漂移波在垂直于磁场平面上运动最著名的非线性波方程是长谷川米马(Hasegawa-Mima)方程[34~36,2,5],在推导这个方程时,除 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ 漂移和极化漂移 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{P1}}$ 的作用之外,还包括了 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{P2}}$ 的影响,后者带来了非线性效应. 我们记得,方程(3-46)中的非线性项是由等离子体的温度梯度引起的,这个作用没有被包括在 Hasegawa-Mima 方程中.

与上一小节类似,在推导中要将离子连续性方程(3-36)的散度项中的离子速度用其漂移速度近似,不过这一次漂移速度取做 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{E}}+\boldsymbol{v}_{\mathrm{P}}$,这里 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{P}}\equiv\boldsymbol{v}_{\mathrm{P1}}+\boldsymbol{v}_{\mathrm{P2}}$. 利用公式(3-23),(3-28)和(3-29),连续性方程(3-36)中的散度项变为

$$\nabla_{\perp}\cdot[n_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{v}_{\mathrm{E}}+\boldsymbol{v}_{\mathrm{P}})]=\nabla_{\perp}\cdot\Big\{-\frac{n_{\mathrm{i}}}{B^2}\nabla_{\perp}\varphi\times\boldsymbol{B}-\frac{n_{\mathrm{i}}}{\Omega_{\mathrm{i}}B}\Big[\frac{\partial}{\partial t}\nabla_{\perp}\varphi+(\boldsymbol{v}_{\mathrm{E}}\cdot\nabla_{\perp})\nabla_{\perp}\varphi\Big]\Big\}, \tag{3-47}$$

与式(3-38)相比,式(3-47)中只增加了与 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{P2}}$ 有关的项,它是

$$-\frac{n_{\mathrm{i}}}{\Omega_{\mathrm{i}}B}\nabla_{\perp}\cdot[(\boldsymbol{v}_{\mathrm{E}}\cdot\nabla_{\perp})\nabla_{\perp}\varphi]\approx-\frac{n_0}{\Omega_{\mathrm{i}}B^2}\nabla_{\perp}\cdot[(\hat{\boldsymbol{z}}\times\nabla_{\perp}\varphi\cdot\nabla_{\perp})\nabla_{\perp}\varphi]$$
$$=-\frac{n_0}{\Omega_{\mathrm{i}}B^2}[\varphi,\nabla_{\perp}^2\varphi], \tag{3-48}$$

这里已利用泊松括号

$$[A,B]=\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial y}=\hat{z}\cdot(\nabla_{\perp}A\times\nabla_{\perp}B). \tag{3-49}$$

在上一节中已经计算了式(3-47)中与 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{E}}$ 和 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{P1}}$ 有关的项[分别见式(3-43)和(3-40)],这里无须重新计算,只需将 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{E}}$ 和 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{P1}}$ 的贡献以及式(3-48)一起代入连续性方程(3-36),去掉温度梯度的作用,类似于上一小节的推导,对无量纲 $\phi=e\varphi/T$ 得到

$$[1-\rho_{\mathrm{s}}^{2}\nabla_{\perp}^{2}]\frac{\partial\phi}{\partial t}+\rho_{\mathrm{s}}c_{\mathrm{s}}\kappa_{n}\frac{\partial\phi}{\partial y}-\rho_{\mathrm{s}}^{3}c_{\mathrm{s}}[\phi,\nabla_{\perp}^{2}\phi]=0. \tag{3-50}$$

在适当的无量纲化下,得到

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t}\nabla_{\perp}^{2}\phi+v_{\mathrm{d}}\frac{\partial\phi}{\partial y}-[\phi,\nabla_{\perp}^{2}\phi]=0. \tag{3-51}$$

这里 $v_{\mathrm{d}}(v_{\mathrm{d}}=c_{\mathrm{s}}\rho_{\mathrm{s}}\kappa_{n})$是漂移速度.

方程也可以写做下面的形式

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t}\nabla_{\perp}^{2}\phi+v_{\mathrm{d}}\frac{\partial\phi}{\partial y}-\hat{z}\cdot[\nabla_{\perp}\phi\times\nabla_{\perp}\nabla_{\perp}^{2}\phi]=0. \tag{3-52}$$

方程(3-51)或(3-52)就是著名的 Hasegawa-Mima 方程[31][35][36][43]. 在节 3.3.6 中我们将介绍,对旋转中性流体的 Rossby 涡旋可以导出形式与之相同的方程. 这个方程与方程(3-45)相比,同样有正比于 $\partial\phi/\partial y$ 的一项,它描写线性波向 $y$ 轴方向的漂移,混合导数项$\frac{\partial}{\partial t}\nabla_{\perp}^{2}\phi$ 也是相同的,它对系统线性色散行为起了关键作用. 两个方程有这些相同点当然不足为奇,因为它们本来分别都是计入了离子漂移速度 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{E}}$ 和 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{P1}}$ 推导出来的. 方程(3-51)或(3-52)与方程(3-45)相比差别在于它们的非线性项,方程(3-45)的非线性项与有温度梯度时的 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ 漂移有关,而方程(3-51)或(3-52)的非线性项则来自于极化漂移速度 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{P2}}$,它是离子运动方程中对流项$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$ 的贡献;除来源不同外,方程(3-45)的非线性项已近似为一维空间的,但方程(3-51)或(3-52)的非线性项却不可能作这样的简化,从泊松括号$[\phi,\nabla_{\perp}^{2}\phi]$的表达式(3-49)可以看到,Hasegawa-Mima 方程描写的是漂移波在垂直于磁场的二维$(x,y)$平面上的运动,研究表明,这个方程以及等离子体很多方程,如剪切 Alfvén 漂移波等,都有涡旋解[5,44~46].

### 3.3.5 与离子声波耦合的漂移波方程

以上两小节都假设了等离子体中有沿 $z$ 轴方向的常磁场,实际情况有时还要更复杂些. 前面已经知道,托卡马克环形装置沿放电的大环方向有一个外加的强磁场 $\boldsymbol{B}_{\varphi}$,同时放电电流又产生沿小环方向的角向磁场 $\boldsymbol{B}_{\theta}(r)$,因此合成磁场的磁力线 $\boldsymbol{B}_{\varphi}+\boldsymbol{B}_{\theta}(r)$像螺旋线那样缠绕成二维环状. 由于角向磁场沿半径 $r$ 从中心向外逐渐

增加，如果在小半径上相邻两点 $r$ 和 $r+\Delta r$ 处观察，它们的磁力线方向之间有一个小的夹角，这就是所谓的磁剪切(magnetic shear). 如果没有磁剪切，带电粒子的漂移运动被限制在垂直于磁场的平面上，在有磁剪切的情况下，漂移速度将出现一个平行于磁场方向的小分量. 这样，可将漂移速度写做 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_{\perp}+\boldsymbol{v}_{/\!/}$，这里下标"⊥"和"//"分别表示垂直和平行于磁力线的速度分量，有 $|\boldsymbol{v}_{/\!/}|\ll|\boldsymbol{v}_{\perp}|$. 下面我们将看到，由于速度的这个平行分量，在垂直于磁场平面上的漂移波运动将与沿磁力线的离子声波耦合，使得漂移波实际上变成了空间三维的运动.

当离子速度存在平行分量时，连续性方程(3-36)中的散度项写做 $\nabla\cdot(n_i\boldsymbol{v})=\nabla_{\perp}\cdot(n_i\boldsymbol{v}_{\perp})+\nabla_{/\!/}\cdot(n_i\boldsymbol{v}_{/\!/})$，记 $\boldsymbol{J}_i=n_i\boldsymbol{v}_{/\!/}$ 为沿平行方向的离子流密度，离子的连续性方程变为

$$\frac{\partial n_i}{\partial t}+\nabla_{/\!/}\cdot\boldsymbol{J}_i+\nabla_{\perp}\cdot[n_i(\boldsymbol{v}_E+\boldsymbol{v}_P)]=0. \tag{3-53}$$

从离子的运动方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=-\frac{1}{m_i n_i}\nabla p_i-\frac{e}{m_i}\nabla\varphi+\frac{e}{m_i}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}, \tag{3-54}$$

得到在平行方向的流 $\boldsymbol{J}_i$ 由下面的方程制约

$$\frac{\partial \boldsymbol{J}_i}{\partial t}+\frac{1}{m_i}\nabla_{/\!/}p_i+\frac{n_i e}{m_i}\nabla_{/\!/}\varphi+(\boldsymbol{v}_E\cdot\nabla_{\perp})\boldsymbol{J}_i=0. \tag{3-55}$$

上式左边含 $\nabla_{/\!/}p_i$ 和 $\nabla_{/\!/}\varphi$ 的两项分别描写在平行于磁力线方向上离子的压力梯度和电场力的作用，在第二章中我们已经知道，它们构成了驱动离子声波的两个要素，因此，如果没有左边最后一项，方程(3-55)描写的是沿磁力线方向传播的离子声波，它通过静电场 $\varphi(\boldsymbol{x},t)$ 与在垂直磁场平面上的漂移波运动耦合；左边最后一项 $(\boldsymbol{v}_E\cdot\nabla_{\perp})\boldsymbol{J}_i$ 来自离子运动方程对流项 $(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$ 中平行分量的贡献，其中括弧中的离子速度 $\boldsymbol{v}$ 已用漂移速度 $\boldsymbol{v}_E$ 近似. 这样，在有磁剪切的位形下，系统的运动需要由方程(3-53)和(3-55)联立描述.

类似于前面的推导，应用准中性条件和绝热电子近似，可以将离子密度 $n_i$ 用涨落电位 $\varphi$ 表示，从方程(3-53)和(3-55)可以导出涨落电位 $\varphi$ 和平行流的大小 $J_i$ 满足的方程组，这里我们略去推导过程，直接将它们的无量纲形式写成

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t}\nabla_{\perp}^2\phi+\frac{\partial J_i}{\partial z}+\frac{\partial \phi}{\partial y}-[\phi,\nabla_{\perp}^2\phi]=0, \tag{3-56a}$$

$$\frac{\partial J_i}{\partial t}+\frac{\partial \phi}{\partial z}+[\phi,J_i]=0. \tag{3-56b}$$

在没有平行流 $\boldsymbol{J}_i$ 时，关于 $\phi$ 的方程就是 Hasegawa-Mima 方程(3-51)，我们记得，它描写垂直于磁力线平面上的漂移波运动，有涡旋解；方程组(3-56)中的两个方程通过线性项 $\partial J_i/\partial z$ 和 $\partial\phi/\partial z$ 相互耦合，漂移波的能量可以通过耦合流向平行于磁力线的方向，推动离子声波，反过来离子声波的能量也可以馈入漂移波；除通

过两个线性项耦合而外,离子声波还可以通过非线性项$[\phi, J_i]$与漂移波发生能量交换,对漂移波运动起调节作用. 在磁剪切位形下方程(3-56)出现的这些耦合作用使得漂移波能量可以在三维空间中流动,而在方程(3-46)和(3-51)中,漂移波能量分别只能沿一维前后流动和在二维平面上转移.

### 3.3.6 旋转中性流体中的 Charney 方程

人们注意到,描写等离子体漂移波的 Hasegawa-Mima 方程与描写中性流体中 Rossby 涡旋的 Charney 方程[28]有相同的数学形式[30]. Rossby 涡旋是出现在旋转中性流体中的一种波动现象,在自然界中极为广泛地存在,也可以在实验室中人工产生. 如行星在旋转过程中带动着覆盖它的流体(大气和海洋)一起转动,在这些一般表现为湍流的流体运动中人们却常常观察到高度有序的相干结构稳定运行,其中最著名的当属"木星大红斑"(Great Red Spot of Jupiter),它是一个逆时针旋转的大尺度椭圆形的涡旋结构,颜色有时鲜红有时略淡,涡旋结构沿纬线方向长达 $2.5\times10^7$ m,经线方向跨度则有 $1.2\times10^7$ m,尺度之大足可以容纳两个地球. 自大约 300 年前首次被发现以来,木星大红斑一直稳定地运行,十分引人瞩目. 还有土星上的棕斑(Brown Spot)和海王星上的大黑斑(Great Dark Spot)也都是行星表面大尺度相干结构的典型例子. 其中遥远海王星上的大黑斑是在旅行者 2 号(Voyager-2)飞临时才得以发现的,它沿经线长 $1.2\times10^7$ m,沿纬线宽 $8\times10^6$ m,和海王星的相对尺度与大红斑和木星的相对尺度差不多. 这些涡旋运动的特点是波长与行星尺度可比,自转频率却小于行星的旋转频率(与之对照,非均匀磁化等离子体中的漂移波频率远小于离子的拉摩回旋频率),它们多数逆时针旋转,也有少数顺时针旋转,绕自转轴旋转速度要比它的整体运动快得多,一般认为它们都属于浅水波现象[47]. 为纪念瑞典裔美国气象学家 Carl Gustav Rossby 于 20 世纪 30～40 年代在研究行星大气和海洋中大尺度相干结构中作出的杰出贡献[48,49],人们后来将这类旋转流体中的涡旋运动命名为 Rossby 涡旋,也称为 solitary Rossby vortex[47,50,51,53].

旋转流体中为什么会出现大尺度相干结构? 为回答这个问题,让我们推导旋转流体中流体元所满足的运动方程. 在普通物理中知道,在旋转坐标系中任何运动的客体都会受到科里奥利力的作用,假设行星以角速度 $\Omega$ 围绕 $\hat{z}$ 轴旋转,在二维水平面上有质量为 $m$ 的客体以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动,它受到的科里奥利力为 $-2m\Omega\hat{z}\times\boldsymbol{v}$. 当一个质量密度为 $\rho$ 的流体元同时受到科里奥利力和重力的作用时,它的速度 $\boldsymbol{v}$ 满足下面的方程[52]

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t} = -g\nabla H + f\boldsymbol{v}\times\hat{z}, \tag{3-57}$$

这里 $f\equiv2\Omega$, $g$ 是重力加速度, $H$ 是流体层高度, $\nabla$ 是沿水平面的梯度算符. 将方程

(3-57)与描写在静电力和洛伦兹力共同作用下离子的运动方程(3-21)比较,就可以发现,方程(3-21)中离子所受到的洛伦兹力$(e/m_i)\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$这一项与方程(3-57)中流体元因星体旋转所受到的科里奥利力$f\boldsymbol{v}\times\hat{\boldsymbol{z}}$这一项相对应,而离子受到的压力与电场力项$-\frac{1}{m_i n_i}\nabla p_i-\frac{e}{m_i}\nabla\varphi$可以与流体元受到的重力项$-g\nabla H$对应,因此我们完全可以参照导出漂移波方程时采用的方法来推导 Rossby 波所满足的方程.

作为最低阶的近似,先忽略式(3-57)左边的惯性项,并用$\hat{\boldsymbol{z}}$叉乘方程的两边,得到在垂直于$\hat{\boldsymbol{z}}$方向上流体元的运动速度为

$$\boldsymbol{v}_{\text{geo}}=-\frac{g}{f}\nabla h\times\hat{\boldsymbol{z}}, \tag{3-58}$$

这里,已将流体层高度写做$H=H_0(x)+h(x,y,t)$,$h$是相对于平均高度$H_0$的变化. $\boldsymbol{v}_{\text{geo}}$称为地转(geostrophic)速度,它恰好与等离子体漂移波问题中的$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$漂移速度$\boldsymbol{v}_E$对应[参考式(3-23)],显然,漂移波中的涨落静电场$\varphi$就对应 Rossby 波中流体层高度变化$h$. 在 Rossby 问题中,$\boldsymbol{v}_{\text{geo}}$是科里奥利力与重力达到平衡时流体元在垂直于旋转轴方向上的速度,恰如在等离子体漂移波问题中$\boldsymbol{v}_E$是洛伦兹力和电场力(忽略含$\nabla p$的项)到达平衡时流体元在垂直于磁场方向上的漂移速度.

有了这些对应关系,推导旋转流体层高度扰动$h$满足的波动方程就与推导 Hasegawa-Mima 方程没有什么两样了. 扼要地说,在更高一阶近似下还要考虑运动方程(3-57)中 $\mathrm{D}/\mathrm{D}t$ 一项的贡献,在垂直于旋转轴的平面上单位流体元总的速度近似为

$$\boldsymbol{v}_\perp=-\frac{g}{f}\nabla_\perp h\times\hat{\boldsymbol{z}}-\frac{g}{f^2}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\nabla_\perp h, \tag{3-59}$$

右边第一项就是$\boldsymbol{v}_{\text{geo}}$,因为$\mathrm{D}/\mathrm{D}t=\partial/\partial t+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)$,后一项的贡献包括两部分,它们都可近似表示为$h$的函数,推导过程与导出极化漂移速度$\boldsymbol{v}_{P1}$[见(3-28]和$\boldsymbol{v}_{P2}$[见(3-29)]类似,这里不再具体写出. 将找到的$\boldsymbol{v}_\perp$作为$h$的函数表达式代入连续性方程,就可导出层高变化$h$所满足的波动方程.

事实上,推导 Rossby 波满足的方程甚至比 Hasegawa-Mima 方程的推导过程还要简单些,因为前者描写的是中性流体中的波动现象,没有等离子体系统中因扰动出现的电荷分离以及与之相关的电场力作用. 在等离子体漂移波方程的推导中,先得利用准中性条件$n_i\approx n_e$将离子密度$n_i$和电子密度$n_e$联系起来,再假设电子密度$n_e$对电位$\varphi$的变化有绝热响应(例如电子密度有玻尔兹曼分布或近似地随电位线性变化),以便在离子密度$n_i$与涨落电位$\varphi$之间建立联系,有了这些关系,才能借助离子$n_i$的连续性方程导出关于$\varphi$的波动方程. 在中性流体中不需要建立这些复杂的关系,假设流体不可压缩,可以直接利用流体层高度$H$满足的连续性方程

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\nabla\cdot(H\boldsymbol{v})=0, \tag{3-60}$$

将从式(3-59)计算出的垂直速度 $\boldsymbol{v}_z$ 的表达式代入方程中的散度项,经化简和无量纲化得到 $h=h/H_0$ 满足下面的方程[30]

$$(1-\nabla^2)\frac{\partial h}{\partial t}+v_R\frac{\partial h}{\partial y}-[h,\nabla^2 h]=0, \tag{3-61}$$

它描写中性旋转流体中的 Rossby 涡旋,这里 $v_R=c_g\rho_R\frac{\partial}{\partial x}\ln\left(\frac{f}{H_0}\right)$,$c_g=(gH_0)^{1/2}$,$\rho_R=c_g/f$ 分别是 Rossby 速度,重力波速度和 Rossby 半径.

最早 Charney 导出旋转流体中的波动方程

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 h-h)-[(\nabla h\times\hat{z})\cdot\nabla]\left(\nabla^2 h-\ln\frac{H_0}{f}\right)=0 \tag{3-62}$$

有略微不同的形式[27][30],不过只要注意到泊松括号的表达式(3-49),容易找出方程(3-61)与(3-62)各项之间的对应. 一些学者还将 Charney 方程推广,计入了不同的非线性效应. 当非线性效应与色散平衡时,这些方程有稳定的涡旋解,称为 Rossby 孤立涡旋,这解释了在行星大气和海洋以及实验室中观察到的大尺度的涡旋结构[50].

正像 BBM 方程与等离子体一维非线性漂移波方程不可思议地有相同形式那样,Charney 方程(3-61)与 Hasegawa-Mima 方程(3-51)在形式上也完全相同,它们都有涡旋解,尽管一个描写的是普通中性流体的运动,一个是带电粒子的集体运动. 除关于函数的一阶时间导数外,两个方程都有一个正比于一阶空间导数的项,它决定了波定向运动的速度;它们还都有一个关于时间空间的混合导数项,从相应的线性色散关系知道,尺度越小的模式传播得越慢,这个结果与我们的日常经验是一致的——一粒石子在水中激起圈圈涟漪,越在外圈的越宽,说明长波模式传播得更快. 此外,Charney 方程与 Hasegawa-Mima 方程的非线性项都由形式相同的泊松括号表示,它们都源自运动方程中的对流项$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$,在本章开始时我们已经指出,这一项体现了流体力学方程的内禀非线性. 在中性流体的 Rossby 波和等离子体的漂移波之间还可以找到许多对应关系,例如 Rossby 波中的重力波速度 $c_g\equiv(gH)^{1/2}$对应漂移波中的离子声速 $c_s\equiv(T_e/m_i)^{1/2}$,Rossby 速度 $v_R$ 对应漂移速度 $v_d$,Rossby 半径 $\rho_R\equiv c_g/f$ 对应离子的惯性尺度 $\rho_s\equiv c_s/\Omega_i$ 等,在文[30]中详细比较了这两个系统参量之间的对应关系,有兴趣的读者可以参考.

### 3.3.7 非线性薛定谔方程

对于均匀无界等离子体,如果没有外力驱动,自发振荡的幅度不会发展得很大,非线性效应一般不重要. 像漂移波这样的非线性起显著作用的波动,是因为系统有空间非均匀性持续驱动的缘故. 在一些情况下,系统也可能有外部能量不断泵入,如果它在系统内部激发起的波动振幅足够大,非线性效应将同样变得十分重

要[54]. 激光与等离子体相互作用就是有外驱动的一个例子，激光作为外驱动电磁波在等离子体中传输时激发起朗谬尔和离子声振荡，发展出空间相干或湍流的运动，湍流中的能量级联还会造成输入电磁波的反常耗散[55,56]. 这些现象只有在考虑了非线性效应时才能获得满意的解释.

激光与等离子体相互作用在激光聚变以及激光加速带电粒子等实际问题中有非常重要的意义[57]. 以激光聚变为例，通常先有预脉冲融化靶丸表面形成一个等离子体晕层，在晕层中等离子体密度有空间梯度 $n_e(x)$，如图 3-5 所示. 在理想情况下可假设晕层等离子体已被完全电离，此后主脉冲进入晕层.

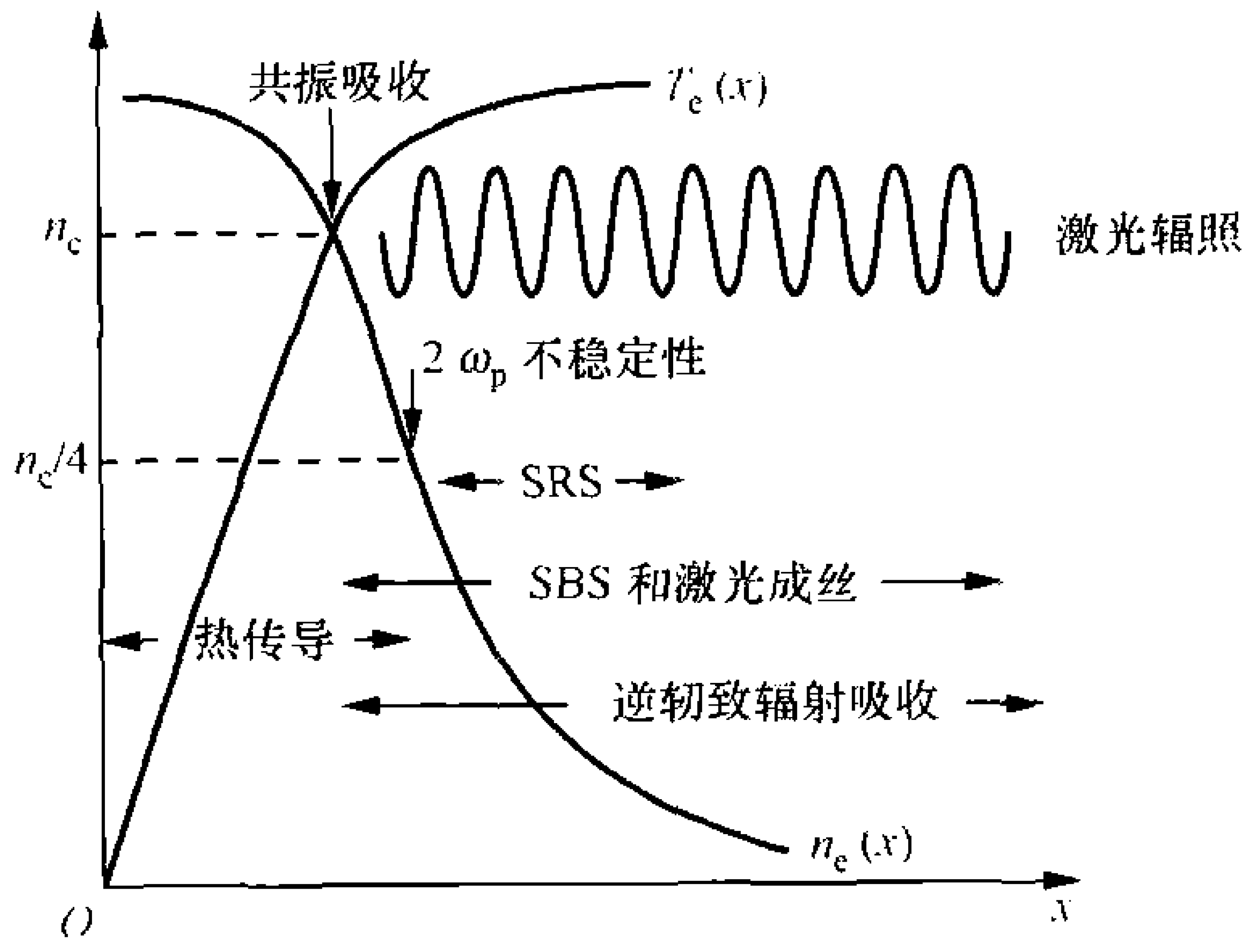



图 3-5　等离子体晕层中电子密度分布 $n_e(x)$ 和温度分布 $T_e(x)$ 示意图
（引自文[57]）

在晕层中等离子体电子通过逆轫致辐射（inverse bremsstrahlung）吸收光电场能量，在激光电场振荡频率 $\omega_L$ 约等于电子等离子体频率 $\omega_{pe}=(4\pi n_e e^2/m_e)^{1/2}$ 的亚临界电子密度 $n_e=n_c$ 附近，光电场激起朗缪尔波，共振吸收（resonance absorbtion）发生，激光与等离子体相互作用的其他物理过程还包括受激拉曼散射（stimulated Raman scattering，SRS）、受激布里渊散射（stimulated Brillouin scattering，SBS）和激光成丝（filamentation）以及在 $n_c/4$ 处发生的所谓 $2\omega_p$ 不稳定性等[55]. 图 3-5 是在晕层中等离子体电子密度分布 $n_e(x)$ 和温度分布 $T_e(x)$ 的示意图，图中还标出了几个主要物理过程发生的空间区域. 下面我们讨论在临界面 $n_e\approx n_c$ 附近激光的传播.

当激光入射到等离子体中时，电子因其极轻的质量对激光电场振荡最为敏感，在激光的高频电场 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}+\text{c. c.}$ 和电子热压力的共同作用下电子的速度 $\boldsymbol{v}$ 随时间的变化为

$$n_e m_e\left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\right]=-\nabla n_e T_e-n_e e\boldsymbol{E}. \tag{3-63}$$

在最低阶近似下，忽略对流项 $(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$ 和热压力项 $\nabla n_e T_e$，电子在高频电场驱动下快速地抖动，速度为

$$v_0 = \frac{eE_0}{\mathrm{i}m_e\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{c.\,c.} \tag{3-64}$$

将电子高频抖动速度 $v_0$ 代入运动方程(3-63)中的对流项，在较慢的时间尺度上对电子高频抖动作平均，得到

$$-n_e m_e \langle (v_0 \cdot \nabla) v_0 \rangle = -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\nabla\frac{|E_0|^2}{4\pi}, \tag{3-65}$$

这里 $\omega_{pe}=(4\pi n_e e^2/m_e)^{1/2}$ 是电子等离子体频率，因为对流项是非线性的，它的时间平均(用尖括号表示)不等于零. 因此，如果在较长的时间尺度上观察，这相当于电子又受到了一个平均作用力，称为“有质动力”(ponderomotive force)，由式(3-65)表达[58][55]. 这样，由于等离子体介质的非线性性质，当激光入射其中时，电子受到的作用力除高频分量外还有一个低频分量，相应地电子运动速度可写做 $v=v_0+v_1$，其中 $v_0$ 是随光电场高频抖动的速度，$v_1$ 是有质动力引起的低频运动速度，它体现非线性的平均作用.

高频驱动力直接引起等离子体电子相对于离子抖动，在这个时间尺度下离子来不及响应，这造成了电荷分离和力图恢复电中性的静电场振荡，从第二章我们知道，由这种机制推动的波动属于电子等离子体波亦即朗缪尔波. 因此，在亚临界密度 $n_c$ 附近，由于电子对激光能量的强烈吸收，朗缪尔波的幅度可以发展得很大. 另一方面，引起有质动力的电子平均运动却有低频时间尺度，离子来得及响应，这就可能推动等离子体中另一种基本运动模式——离子声波. 这样，激光高频电场不仅直接驱动电子等离子体波，还推动了离子声波的发展，等离子体的两个基本振荡模式，朗缪尔波和离子声波，同时被激发，它们之间的耦合可随之出现.

非线性引起的有质动力有低频时间尺度，这可以解释为什么在激光与等离子体相互作用中常常出现慢时间尺度的集体运动. 例如，通过有质动力或通过增强碰撞吸收，在激光强度剖面上会出现小的热斑点，它使得等离子体膨胀，在等离子体密度下降时，折射指数上升，光波被折射到低密度区，这种不稳定性的结果导致激光束分裂成较高强度的丝状，这就是激光成丝现象，如果这个过程波及到整个光束，就出现了激光自聚焦(self-focusing). 在激光成丝处，带电粒子被高频电磁场排开，形成了腔子即密度凹陷[59]. 关于这类成丝现象有很多实验和计算机模拟研究[60,61]，不仅是激光，用微波作泵浦源，在放电等离子体中也观察到腔子[62].

采用等离子体流体模型，结合麦克斯韦方程组，导出由激光驱动的等离子体静电波动所满足的方程，已成功地解释了激光成丝现象. 这里我们采用文[55]中的方法来引出描写激光在等离子体中的传播方程，其思路是利用朗缪尔波和离子声波的色散关系，考虑密度扰动和有质动力的修正，再将所得的色散关系推演到连续空间. 整个推导过程物理图像清晰，避免了冗长的公式.

在第二章中已经知道，朗缪尔波是等离子体电子以纵波形式传播的一种密度

振荡，它是一种静电振荡波，振荡频率 $\omega_e$ 接近电子等离子体频率 $\omega_{pe}$，并与电子热速度 $v_{the}=\sqrt{T_e/m_e}$ 有关，我们将它的色散关系重新写在这里

$$\omega_e^2=\omega_{pe}^2+3k^2v_{the}^2. \tag{3-66}$$

我们还知道，离子声波也是纵波，它以离子声速 $c_s=\sqrt{T_e/m_i}$ 传播，满足色散关系

$$\omega_s^2=c_s^2k^2. \tag{3-67}$$

有了这两个基本运动模式，现在的问题是在激光的驱动下，朗缪尔波和离子声波的幅度增大时，它们的色散性质(3-66)和(3-67)将出现怎样的改变，这里只考虑临界密度 $n_c$ 附近的情形.

首先分析离子运动对朗缪尔波色散关系(3-66)的影响.假设等离子体中已有离子声波存在，它是离子密度的低频涨落运动，考虑到等离子体是准中性的，电子密度涨落一定也有低频成分，它将修正色散关系(3-66).在电子等离子体振荡的时间尺度下，可以认为所关心的低频密度涨落如此之慢，以致于就像在平衡态时那样足以改变电子等离子体频率 $\omega_{pe}$.这样，我们可以假设电子密度在临界面附近出现了慢时间尺度的扰动，有 $n_e=n_c+\delta n$，且 $|\delta n|\ll n_c$，它引起电子等离子体频率 $\omega_{pe}$ 改变，色散关系(3-66)因此修正为

$$\omega_e^2=\omega_{pe}^2\left(1+\frac{\delta n}{n_c}\right)+3k^2v_{the}^2. \tag{3-68}$$

将频率和波矢量转换到时空变量，在空间一维下作代换 $\omega_e\to \mathrm{i}\partial/\partial t, k\to -\mathrm{i}\partial/\partial x$，从色散关系(3-68)得到在高频激光电场 $\boldsymbol{E}_0$ 驱动下等离子体介质临界面附近的静电场涨落 $E_1$ 满足下面的方程

$$\frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2}-3v_{the}^2\frac{\partial^2 E_1}{\partial x^2}=-\omega_{pe}^2\left(1+\frac{\delta n}{n_c}\right)E_1. \tag{3-69}$$

其次分析有质动力对离子声波色散关系(3-67)的影响.在第二章中已经说明，假设在离子运动的时间尺度上，电子受到的静电力与热压力达到平衡，离子声波就是由电子热压力通过电场力所驱动的.在有激光驱动的情况下，由于非线性效应不可忽略，电子高频抖动的平均作用使电子又受到一个慢变的有质动力[参考式(3-65)]，因此若在离子运动时间尺度上看电子的运动，电场力不仅需要平衡电子热压力，还要额外地平衡来自对流项的有质动力，或者说有质动力和电子热压力一起通过电场力驱动了离子的波动.在考虑了这个效应以后，原来在忽略 $\partial/\partial t$ 情况下从电子运动方程(3-63)得到的平衡关系(2-80)式被修正为

$$n_e e\boldsymbol{E}_1+\nabla n_e T_e=-\nabla\frac{|\boldsymbol{E}_1|^2}{4\pi} \tag{3-70}$$

这里已将有质动力表达式(3-65)中的电场取作等离子体的涨落电场 $\boldsymbol{E}_1$，并认为它的振动频率 $\omega_e$ 近似等于电子的朗缪尔频率 $\omega_{pe}$.

有了在离子运动的时间尺度下电子等离子体近似的平衡关系(3-70)，我们几

乎不需要重复第二章中的推导，只要将相应于 $\nabla n_e T_e$ 的这一项用 $\nabla(n_e T_e + |\boldsymbol{E}_l|^2/4\pi)$ 替代，以此修正离子声波的色散关系(3-67)，再转换到时空变量，就可以得到离子密度涨落 $\delta n$ 所满足的方程. 在一维空间下它有下面的形式

$$\frac{\partial^2 \delta n}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 \delta n}{\partial x^2} = \frac{1}{4\pi m_i} \frac{\partial^2}{\partial x^2} |E_l|^2. \tag{3-71}$$

在上面的推导中已作准中性假设，在慢时间尺度上没有区分离子和电子的密度涨落.

方程(3-69)和(3-71)一起构成描写在激光驱动下等离子体中电场扰动 $E_l$ 和离子密度扰动 $\delta n$ 的非线性方程组. 除方程(3-69)中 $\delta n$ 与 $E_l$ 的耦合之外，系统的非线性主要来自方程(3-71)中与有质动力有关的项 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}|E_l|^2$，我们记得有质动力是电子运动方程中的对流项 $(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$ 关于电子高频抖动作时间平均得到的，在这里，流体力学系统的内禀非线性又一次显示了它在波动问题中的重要作用.

现在将振荡电场 $E_l(x,t)$ 中的快变部分分离出来，令

$$E_l = \tilde{E}(x,t)e^{-i\omega_{pe}t} + \text{c.c.}, \tag{3-72}$$

其中 $\tilde{E}(x,t)$ 是随时间慢变的振幅，代入方程(3-69)，忽略关于时间 $t$ 的二阶导数项，得到

$$2i\omega_{pe} \frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} = -3v_{the}^2 \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial x^2} + \omega_{pe}^2 \frac{\delta n}{n_c}\tilde{E}. \tag{3-73}$$

同时方程(3-71)变为

$$\frac{\partial^2 \delta n}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 \delta n}{\partial x^2} = \frac{1}{4\pi m_i} \frac{\partial^2}{\partial x^2} |\tilde{E}|^2. \tag{3-74}$$

方程(3-73)和(3-74)构成了关于 $\tilde{E}$ 和 $\delta n$ 的封闭方程组.

对方程作无量纲化后，得到

$$i\frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} = \delta n\tilde{E} - \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial x^2}, \tag{3-75a}$$

$$\frac{\partial^2 \delta n}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \delta n}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} |\tilde{E}|^2. \tag{3-75b}$$

式(3-75)就是著名的扎哈罗夫(Zakharov)方程，它描写激光在等离子体中传播时，在离子运动的时间尺度上，场的运动与物质运动的非线性相互作用[63]. 扎哈罗夫方程也可以用更严格的方式从电子和离子的连续性方程、运动方程、状态方程，以及将电子和离子运动关联起来的泊松方程，在一定近似下推导出来，详细推导过程可参见文[59]和[64].

假设 $\delta n(x,t)$ 有定态，满足 $\partial\delta n/\partial t = 0$，从方程(3-75b)有

$$-\delta n = |\tilde{E}|^2, \tag{3-76}$$

代入式(3-75a)，得到

$$i\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}+|E|^2E=0. \tag{3-77}$$

式中已去掉了 $E$ 上的波浪号，式(3-77)就是著名的非线性薛定谔方程[59,15].

非线性薛定谔方程(3-77)因形式上酷似薛定谔方程(2-32)而得名，薛定谔方程描写量子力学波函数 $\psi(x,t)$ 的运动，由于微观世界中的测不准原理，$|\psi|^2$ 在物理上被赋予几率的意义，而非线性薛定谔方程(3-77)中的波函数 $E(x,t)$ 是等离子体中振荡电场的慢变包络. 抛开物理上的巨大反差，两个方程形式上的相似确实非同凡响. 当然，薛定谔方程(2-32)关于波函数 $\psi$ 是线性的，所以在量子力学中遇到的都是线性空间，只是势函数 $V(x)$ 的出现起到了在波矢量空间中散射波函数的作用；方程(3-77)却是一个真正意义上的非线性波动方程，其中 $|E(x,t)|^2$ 这一因子也可以像薛定谔方程的势函数 $V(x)$ 那样散射波函数，只是这个势函数是系统自组织形成的，一般随时间和空间改变，它的出现是因为在等离子体这个非线性介质中，激光的折射指数正比于光电场振荡幅度平方 $|E|^2$ 的缘故[65]. 像这样因非线性引出"势阱"的例子，在后面章节中我们还将遇到.

假设方程(3-77)具有下面形式的解，

$$E(x,t)=e^{i\Omega t}f(x), \tag{3-78}$$

这里 $\Omega$ 是一个频率参数，得到

$$f(x)=(2\Omega)^{1/2}\operatorname{sech}(\Omega^{1/2}x), \tag{3-79}$$

它是非线性薛定谔方程的一个包络孤立子(envelope soliton)解[59]. 这个解表明，在垂直于光传播方向的截面上激光电场的高频振荡的振幅被调制成孤立子形状，见图 3-6.

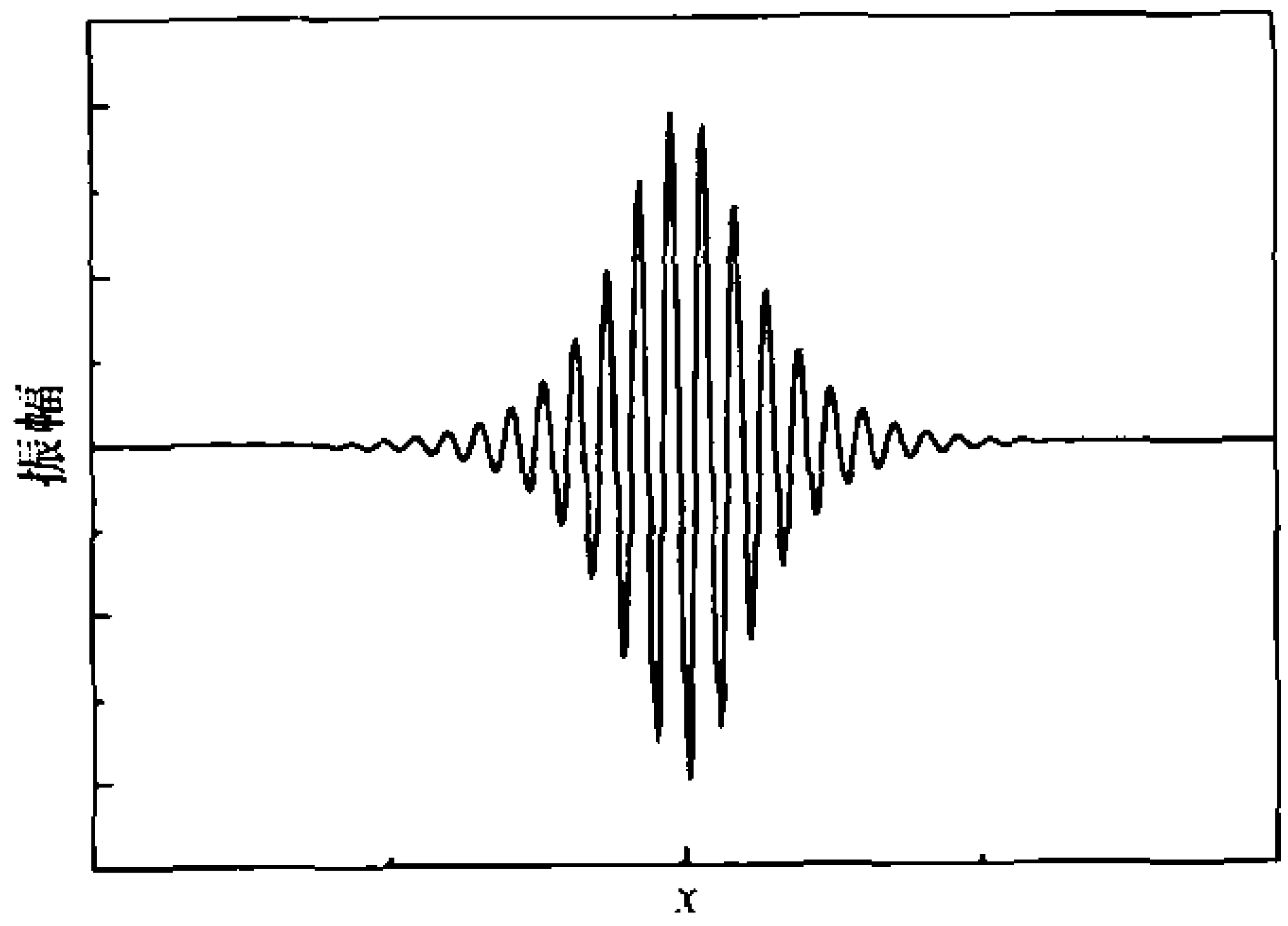



图 3-6　非线性薛定谔方程的包络孤立子解示意图

从式(3-76)得到

$$\delta n(x)=-2\Omega\operatorname{sech}^2(\Omega^{1/2}x), \tag{3-80}$$

这说明，在高频电场出现空间局域化的地方，场的压力将离子排开形成了密度的腔子. 这些结果很好地解释了实验观察到的激光在等离子体中传播时的自聚焦或成

丝现象.

本章介绍了几个非线性波方程，其中描写一维和二维中性流体重力表面波的方程分别与描写等离子体漂移波的方程形式完全相同，尽管它们是从完全不同的物理考虑出发推导出来的. 显然，这些由偏微分方程描写的非线性波的动力学一定也有非常典型的意义. 然而，浏览有关专著，一般用于讨论非线性动力学所采用的模型都是映射方程或常微分方程，它们描写的是待解函数仅依赖于时间的非线性系统，能否将这些时序系统的理论应用于分析由偏微分方程描写的非线性波动系统呢?

其实，正如第二章中已说明的，如果将非线性波在形式上展开为模式之和，这些模式所满足的就是一组相互耦合的非线性常微分方程. 以 KdV 方程(2-18)为例，将函数 $\phi(x,t)$ 按照式(2-35)的形式展开之后，模式 $\phi_k(t)(k=1,2,\cdots,N;N\to\infty)$ 的演化满足方程(2-39)，它是一个非线性常微分方程组，其中关于不同 $k$ 的模式方程相互耦合. 另一方面，在下两章中将看到，非线性动力学理论重点讨论的一类系统由以下形式的常微分方程组描写

$$\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x},\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_M), \tag{3-81}$$

这里和后面用下划线表示高维相空间中的矢量，如 $\underline{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_N)^{\mathrm{T}}$ 是有 $N$ 个分量的列矢量，$\underline{F}$ 是有 $N$ 个分量的非线性代数算符，此外 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_M$ 是 $M$ 个控制参量. 显然，像式(2-39)那样的模式方程组，除了有无穷维之外，与式(3-81)在形式上没有什么差别. 完全有理由相信，时序系统的有关理论应该能够应用于分析非线性波的动力学，只要我们将波动放在它的模式空间 $\{\phi_k(t)\}$ 中观察.

从第四章开始，我们先用两章的篇幅简要介绍时序系统的非线性动力学理论，再试图将这些理论应用于分析非线性波的动力学. 物理学的发展从来就得益于数学研究的成果，在讨论线性现象时，线性代数、矩阵理论等早已成为物理学家得心应手的工具，近年来人们又将非线性数学的研究成果大量应用于物理学、化学和生物学等各个领域. 其实，宇宙也许本来就有数学的结构，不仅天体运行遵循着优美的数学框架，复杂系统极有可能也如此. 无怪乎数学家自 19 世纪末就开始探索的非线性问题，到 20 世纪后期受到了物理学家的广泛关注. 让我们怀着孩童般的好奇心进入这个“别有洞天”，期望它能引导我们去解开波动现象的种种谜团.

# 第四章　时序系统非线性动力学简介(I)——哈密顿系统

自本章开始，我们将逐步深入讨论非线性系统的动力学，首先介绍时序系统非线性动力学的一些理论，进而将这些理论应用于分析非线性波动问题. 解析和数值研究已经表明，空间延展系统中许多现象，无论是被认为有粒子特征的孤立子，还是在时间和空间上都迅速变化的湍流，都与系统的非线性性质密切相关. 波动系统由偏微分方程描写，我们已经知道，不管是线性还是非线性波动，它们的模式所满足的其实都是常微分方程. 因此，模式空间是时序系统的非线性动力学和波动系统的非线性动力学之间的天然桥梁. 几十年来，关于时序系统的非线性动力学已发展得日臻成熟，为进一步探索非线性波的动力学提供了理论基础.

本章将先介绍保守哈密顿系统的一般理论，有耗散的问题放在下一章讨论. 读者很快就会明白为什么我们选择哈密顿系统作为讨论非线性波的动力学问题的出发点，在很多情况下，作为非线性波动的“元过程”，即所谓的波-波相互作用或称为模-模耦合，常常可以化为一个哈密顿系统，第六章将有这方面的例子. 在连续介质中非线性波的运动包含无穷多相互作用的模-模耦合过程，它们的运动规律要在由波动模式所构建的相空间中进行分析，而哈密顿系统理论给出的正是在相空间中轨道运动的基本规律.

非线性动力学理论关心系统运动所谓的 generic 性质，在韦伯英文大词典中，“generic”这个词的第一个解释是：“of, applicable to, or referring to all the members of a genus, class, groups, or kind;general”，这就是说，非线性动力学理论所要揭示的是不同非线性系统普遍显示出来的共性，尽管这些共性必须通过一个个特例来展现. 当外部条件连续变化时，如果动力学行为只出现数量上的改变，在性质上与原来的仍属于同一类，从非线性动力学的观点来看，这种改变并不很重要，只有运动行为出现性质上的突变才特别受到重视，因此，它特别关注的实际上是非线性系统运动状态出现突变，以及与之相关的现象和规律.

学习过分析力学的读者都知道，一个哈密顿系统的相空间由它的正则动量和正则坐标共同支撑，它们是共轭变量，相互依存不可分割. 事实上，一个简谐波模式就可以用哈密顿量描写，其正则动量和正则坐标这一对共轭变量，分别是模式的两个特征变量——振幅和位相——的函数，还有一些由相互耦合的模式组成的非线性系统也可以用哈密顿量描写，这些模式的振幅和位相的运动通过哈密顿系统的正则动量和正则坐标相互关联. 在本书第六章以后讨论波-波相互作用和非线性波

的动力学时，我们会注意到，波动模式振幅和位相的运动常常密不可分，例如它们有时会在同一个临界参数处发生状态突变，哈密顿系统理论或许有助于我们理解这一现象，尽管这些复杂系统不属于哈密顿问题.

## §4.1 哈密顿系统理论

### 4.1.1 哈密顿方程

考虑一个有 $N$ 个自由度的哈密顿系统，哈密顿量 $H(\underline{q},\underline{p})$ 是正则坐标 $\underline{q}$ 和正则动量 $\underline{p}$ 的函数，但不显式地依赖于时间 $t$，因此哈密顿量 $H(\underline{q},\underline{p})$ 作为系统的能量是一个不变量. 这里 $\underline{q}$ 和 $\underline{p}$ 各有 $N$ 个分量

$$\underline{q} = (q_1, q_2, \cdots, q_N)^{\mathrm{T}}, \tag{4-1a}$$

$$\underline{p} = (p_1, p_2, \cdots, p_N)^{\mathrm{T}}, \tag{4-1b}$$

它们构成了 $2N$ 维的相空间，每一对 $(q_i, p_i)$ 构成了相空间的一个自由度.

正则坐标和正则动量随时间 $t$ 的演化服从哈密顿方程

$$\dot{\underline{q}} = \nabla_{\underline{p}} H, \tag{4-2a}$$

$$\dot{\underline{p}} = -\nabla_{\underline{q}} H. \tag{4-2b}$$

设初始时轨道位于相空间中某一点 $(\underline{q}(0), \underline{p}(0))$，此后系统在相空间中的运动轨道由方程(4-2)决定[66].

### 4.1.2 相体积

哈密顿系统在相空间中的体积元由正则坐标和正则动量定义为

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}q_1 \mathrm{d}q_2 \cdots \mathrm{d}q_N \mathrm{d}p_1 \mathrm{d}p_2 \cdots \mathrm{d}p_N, \tag{4-3}$$

利用哈密顿方程(4-2)容易证明，由一组初始点 $(\underline{q}(0), \underline{p}(0))$ 决定的相体积在运动过程中保持不变[67]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \mathrm{d}V = \int_V \sum_i \left\{\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i}\right\} \mathrm{d}V = 0. \tag{4-4}$$

哈密顿系统在这一点上与下一章讨论的耗散系统完全不同，后者的相体积在运动中不断收缩，处于相空间一定范围内的所有初始轨道点，随时间演化最终都将落在一个相体积为零的几何结构上，这个几何结构叫做吸引子(attractor). 哈密顿系统没有吸引子，要了解一个哈密顿系统的动力学行为，原则上所选取的轨道初始点 $(\underline{q}(0), \underline{p}(0))$ 需要遍历整个相空间.

下面让我们首先介绍可积哈密顿系统理论，主要内容选自 1978 年在美国物理学会讨论非线性动力学的一个学术会议上 M. V. Berry 题为“Regular and irregular motion”的报告[68].

### 4.1.3 运动常数和可积哈密顿系统

哈密顿系统理论中一个重要概念是可积系统，所谓一个有 $N$ 个自由度的哈密顿系统是完全可积的，是指这个系统存在 $N$ 个独立的、解析的、单值的第一积分，它们是关于$(\underline{q},\underline{p})$的 $N$ 个函数，

$$F_m(\underline{q},\underline{p}),\quad 1\leqslant m\leqslant N, \tag{4-5}$$

$F_m$ 沿系统的每条轨道都是常数. 对于所考虑的保守系统，哈密顿量 $H(\underline{q},\underline{p})$作为能量，它本身可以被当做一个运动常数，沿系统的任何轨道都有

$$H(\underline{q},\underline{p})=E, \tag{4-6}$$

这里 $E$ 是一个常数. 因此，系统的能量提供了对运动的一个约束，在 $2N$ 维相空间$(\underline{q},\underline{p})$中，轨道只能在 $2N-1$ 维的能量面上运动，它由初始条件唯一地决定. 如果初始时系统的轨道从相空间中某个点$(\underline{q}(0),\underline{p}(0))$出发，它以后的轨道就被约束在这个点所在的能量面上，跨越能量面运动是被禁止的. 由于这个原因，数值模拟哈密顿系统对计算精度的要求十分苛刻，因为误差会导致轨道离开原来的能量面，造成运动中的假象. 在企图用数值模拟分析哈密顿系统的动力学时要特别小心，一般常采用辛算法[69]，以保证模拟结果的可信度.

### 4.1.4 正则变换

将一个有 $N$ 个自由度的完全可积哈密顿系统的 $N$ 个运动常数记作

$$F_m(\underline{q},\underline{p})=f_m, \tag{4-7}$$

这里 $f_m$ 是常数，$m=1,2,\cdots,N$，这些运动常数必须是独立的，对所有的$\{m,n\}$要满足下面的关系：

$$[F_m,F_n]=0, \tag{4-8}$$

式中采用的泊松括号为

$$[F_m,F_n]\equiv\nabla_{\underline{p}}F_m\cdot\nabla_{\underline{q}}F_n-\nabla_{\underline{p}}F_n\cdot\nabla_{\underline{q}}F_m. \tag{4-9}$$

从式(4-7)的 $N$ 个方程，原则上可以解出正则动量 $\underline{p}$ 作为正则坐标 $\underline{q}$ 和运动常数$\{f_m\}$的函数.

这样，我们可以建立一个新的相空间表象，将运动常数$\underline{F}=(F_1,F_2,\cdots,F_N)^{\mathrm{T}}$取做新的正则动量

$$\underline{\bar{p}}=\underline{F}, \tag{4-10}$$

再寻找一个与新正则动量 $\underline{\bar{p}}$ 共轭的新正则坐标 $\underline{\bar{q}}$，以保证在这个新表象下$(\underline{\bar{q}},\underline{\bar{p}})$也满足形式不变的哈密顿方程(4-2). 在分析力学中已经证明，满足这个要求的变换是一个正则变换，它要求新坐标和老坐标之间服从下面的关系：

$$\underline{p}\cdot\mathrm{d}\underline{q}-\underline{\bar{q}}\cdot\mathrm{d}\underline{\bar{p}}=\mathrm{d}U, \tag{4-11}$$

这里 d$U$ 是一个全微分. 正则变换的产生函数 $U$ 可以有 4 种不同的选取方法[66]，式(4-11)中已假设 $U$ 是老坐标和新动量的函数，$U=U(\underline{q},\underline{\bar{p}})$.

现在假设已经找到了产生函数 $U(\underline{q},\underline{\bar{p}})$ 的形式，完成了这个变换. 因为在新表象中正则动量 $\underline{\bar{p}}$ 是运动常数，根据哈密顿方程(4-2)有，

$$\dot{\underline{\bar{p}}} = 0 = -\nabla_{\underline{\bar{q}}} H, \tag{4-12}$$

因此在新表象下系统的哈密顿函数 $H$ 不依赖于正则坐标 $\underline{\bar{q}}$，可写做 $H=H(\underline{\bar{p}})=H(\underline{f})$. 另一方面，从关于新正则坐标 $\underline{\bar{q}}$ 的哈密顿方程有

$$\dot{\underline{\bar{q}}} = \nabla_{\underline{\bar{p}}} H(\underline{\bar{p}}) = \nabla_{\underline{f}} H(\underline{f}) = \text{const.}, \tag{4-13}$$

对时间积分，得到

$$\underline{\bar{q}}(t) = \nabla_{\underline{f}} H(\underline{f})t + \underline{\delta}, \tag{4-14}$$

式中 $\underline{\delta}$ 是 $N$ 个积分常数.

至此，我们已经解出了新正则坐标 $\underline{\bar{q}}$ 作为时间 $t$ 的函数，不过还需要将 $\underline{\bar{q}}$ 用老的正则坐标 $\underline{q}$ 表示，问题才能完全得解. 在分析力学中知道，这个关系可以通过产生函数 $U$ 找到，仍将产生函数取作老正则坐标 $\underline{q}$ 和新正则动量 $\underline{\bar{p}}$ 的函数，后者现已取作运动常数 $\underline{f}$，我们有[66]，

$$\underline{\bar{q}} = \nabla_{\underline{f}} U(\underline{q},\underline{f}). \tag{4-15}$$

在式(4-14)中已经显式地解出新正则坐标 $\underline{\bar{q}}$ 随时间 $t$ 的演化，现在又找到了它与老正则坐标 $\underline{q}$ 之间的关系(4-15)，尽管这个关系可能是个隐函数，我们也可以说，问题原则上已经完全得解. 这个解可以写做 $\underline{q}=\underline{q}(t;\underline{f},\underline{\delta})$，它依赖于 $N$ 个运动常数 $\underline{f}$ 和 $N$ 个积分常数 $\underline{\delta}$. 在这个意义上说，经典力学中所有精确可解的问题都是可积的.

### 4.1.5　可积哈密顿系统的运动流形

上面的分析可概括为，一个有 $N$ 个自由度的保守哈密顿系统，它的相空间有 $2N$ 维，能量面有 $2N-1$ 维，如果这个哈密顿系统包括能量在内有 $N$ 个独立的运动常数，那么它是完全可积的. 因为受到了 $N$ 个条件(4-7)的约束，系统的运动轨道被束缚在 $2N$ 维相空间的 $N$ 维子空间中，所以由完全可积哈密顿系统的运动轨道在相空间中所划出的几何结构，称为流形(manifold)，最多也只有 $N$ 维，它小于能量面的维数. 因为受到 $N$ 个条件的约束，在 $2N$ 相空间中 $N$ 维流形上运动的可积系统的轨道是完全被决定的，没有多余的自由度供轨道选择，它们不可能出现无序运动.

下面的问题是，可积哈密顿系统的运动流形，记为 $\mu$，究竟有什么样的拓扑结构? 这个问题在数学上已经解决，对于有 $N$ 个自由度的可积哈密顿系统，它的流形 $\mu$ 是 $2N$ 维相空间中的一个 $N$ 维环. 为证明这一点，对应于每一个运动常数 $f_m$，

在相空间中建立一个矢量场

$$\underline{V}_m \equiv (\nabla_{\underline{p}} F_m, -\nabla_{\underline{q}} F_m), \tag{4-16}$$

它有 $2N$ 个分量. 给定方程(4-7)中的一组运动常数$\{f_m\}$,就决定了一个运动流形 $\mu$,因为 $F_m$ 是光滑和独立的,故在每一个流形 $\mu$ 上,$\underline{V}_m$ 都是光滑和独立的. 此外,根据式(4-9),对所有$(m,n)$有

$$\underline{V}_m \cdot (\nabla_{\underline{q}} F_n, \nabla_{\underline{p}} F_n) = [F_m, F_n] = 0, \tag{4-17}$$

即矢量 $\underline{V}_m$ 与流形 $\mu$ 的所有法线垂直,或者说 $\underline{V}_m$ 平行于流形 $\mu$.

限于讨论有界运动,轨道可接近的相空间维数是有限的,$\mu$ 是一个紧致流形(compact manifold),按照拓扑学的定理:一个可用 $N$ 个光滑的独立的矢量场所"平行化"的紧致流形一定是一个 $N$ 维环(a compact manifold "parallelizable" with $N$ smooth independent vector fields must be an $N$-torus),我们就知道,可积哈密顿系统的运动流形 $\mu$ 是在 $2N$ 维相空间中的一个 $N$ 维环[68]. 关于这个问题,读者还可参考 Arnol'd 的专著[70]中的引理:"Let $M^n$ be a compact connected differentiable $n$-dimensional manifold, on which we are given $n$ pairwise commutative and linearly independent at each point vector fields, then $M^n$ is diffeomorphic to an $n$-dimentional torus."

另一方面,如果运动常数的数目小于系统自由度数,亦即一个有 $N$ 个自由度的哈密顿系统只有 $k<N$ 个运动积分,那么这个系统不是完全可积的. 这 $k$ 个运动常数对运动构成了 $k$ 个约束,因此轨道将被束缚在 $2N$ 维相空间中的 $2N-k$ 维流形上,与完全可积系统相比,它的运动轨道有更大的自由度,允许伸展到高于 $N$ 维的相空间,这为出现无序运动提供了可能.

### 4.1.6 作用量-角变量坐标系

可积哈密顿系统的运动流形被称做不变流形(invariant manifold)或不变环(invariant torus),这里"不变"指的是如果轨道从环面上某点出发,这条轨道将永远保持在这个环面上. 作为生活在三维空间中的人类,很难想象一个 $N$ 维环有什么样的形状,好在 $N=1,2$ 时的不变环很容易画出来,一维环就是在相空间中的一条封闭曲线,二维环的示意图见图 4-1(a),轨道既要沿大环又要沿小环转动,在环面上任何一点轨道的方向都是唯一的,它指向环面的切线方向. 作为对比,在图 4-1(b)中给出球形拓扑的例子,在两个极点处矢量场没有确定的方向,它们是两个拓扑奇点.

因为流形为拓扑环,描写可积哈密顿系统运动的一个自然坐标系是作用量-角变量(action-angle)坐标系. 为此,让我们定义从老正则坐标$(\underline{q},\underline{p})$到新正则坐标$(\underline{\bar{q}},\underline{\bar{p}})$的产生函数为

$$S(\underline{q},\underline{\bar{p}}) = \int_{\underline{q}_0}^{\underline{q}} \underline{p}(\underline{q},\underline{\bar{p}}) \cdot \mathrm{d}\underline{q}, \tag{4-18}$$

如选择运动常数$\underline{f}$为新正则动量$\underline{\bar{p}}$，由式(4-7)找到$\underline{p}(\underline{q},\underline{f})$，可将产生函数写做$S(\underline{q},\underline{f})$的形式.

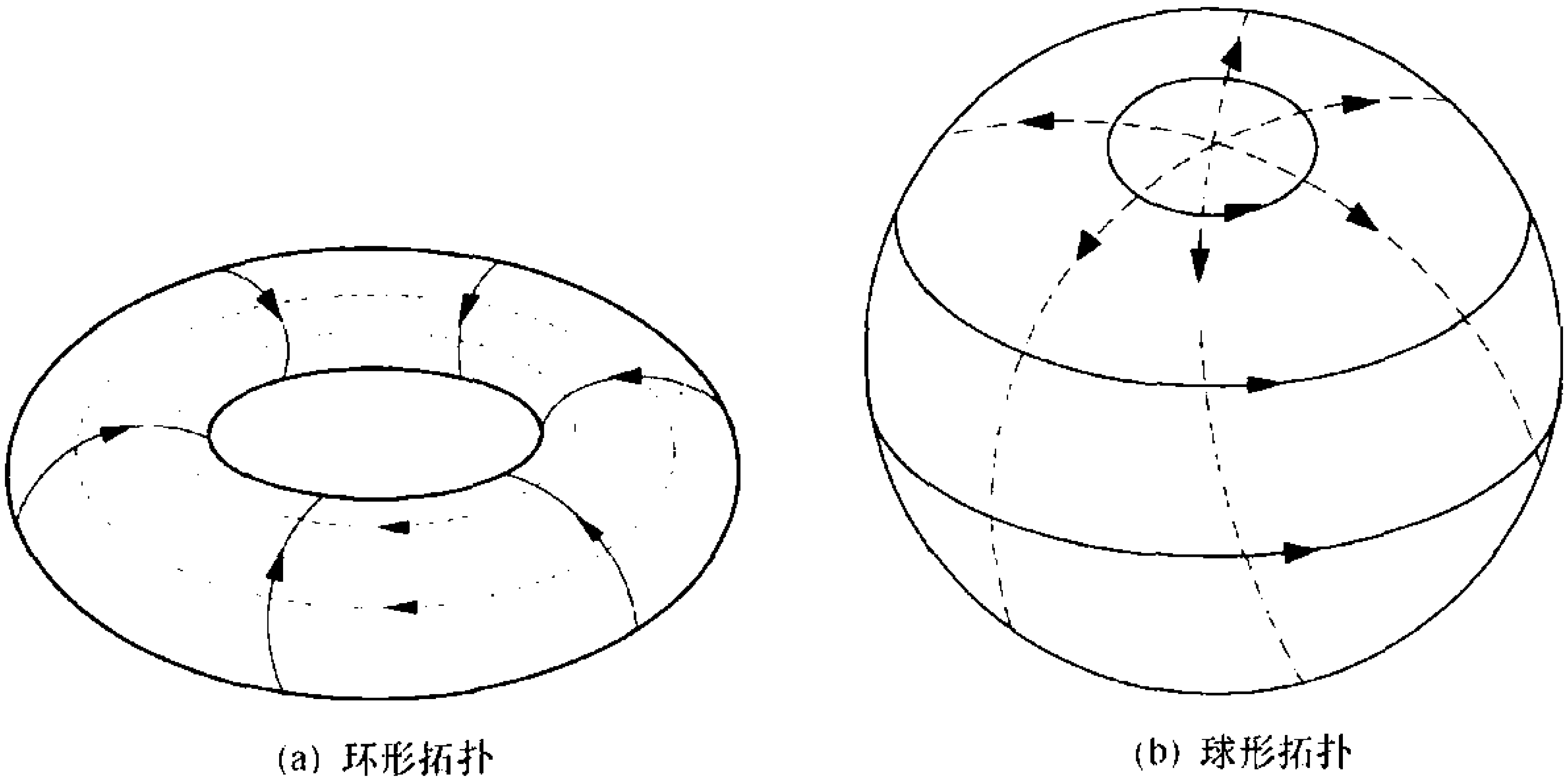



图 4-1 环形拓扑和球形拓扑示意图

根据分析，粗略地说，$S$应该是局域单值的，因此，如果在运动流形$\mu$上有一个$\underline{q}_0 \to \underline{q}_0$的闭合回路，当这个回路可以收缩到一个点时，$S$的积分值将变为0. 不过在一个$N$维环形拓扑上，将有$N$个不可约回路(irreducible contour)，它们不能收缩到一个点，如图 4-2 所示.

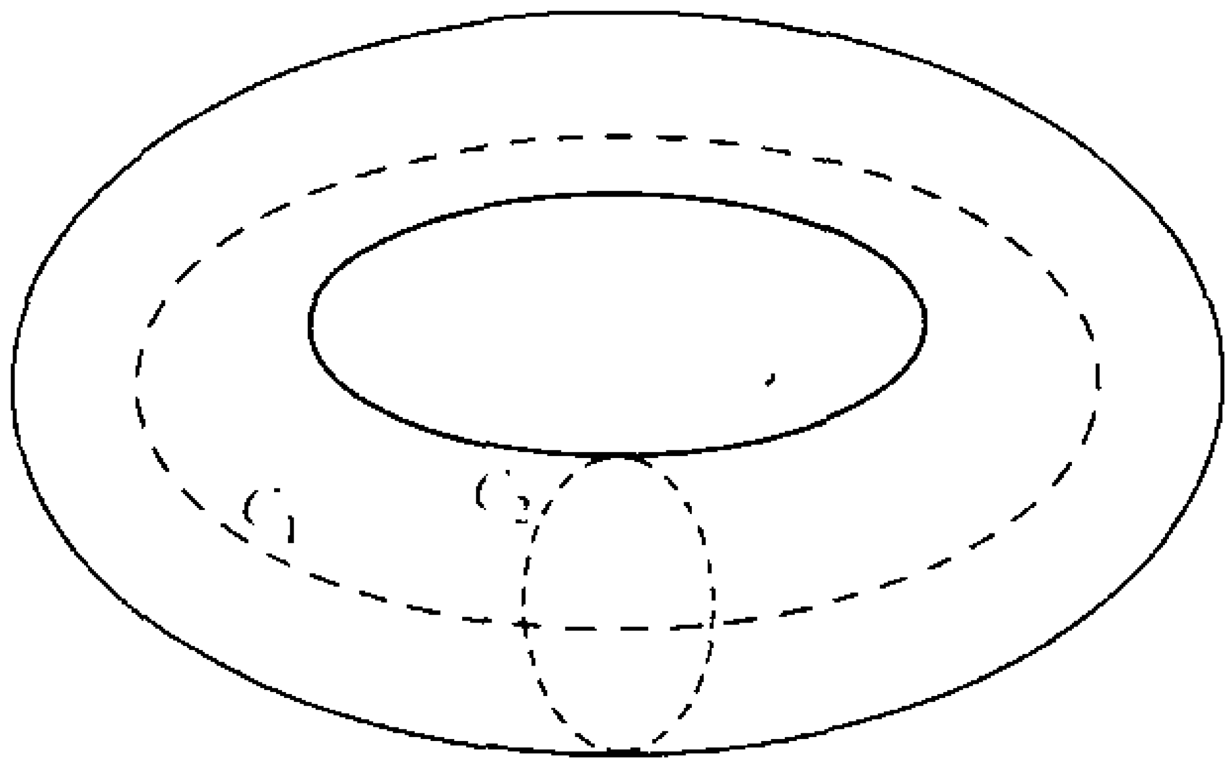



图 4-2 二维环上沿大环和小环方向的两个不可约回路$c_1$，$c_2$(虚线)示意图

沿大环的回路$c_1$和沿小环的回路$c_2$是二维环的两个不可约回路，产生函数$S$沿这样的不可约回路积分时将会获得一个非零的增量，我们可以利用它们来定义$N$个新的正则动量. 如第$i$个正则动量定义为

$$I_i \equiv \frac{1}{2\pi}\oint_{\gamma_i} \underline{p}(\underline{q},\underline{f}) \cdot \mathrm{d}\underline{q}, \tag{4-19}$$

式中积分沿环形拓扑的第$i$个不可约回路$\gamma_i$进行，可以说明，积分的结果等于回路$\gamma_i$在$N$个平面$q_1p_1$，$q_2p_2$，…，$q_Np_N$上的投影面积之和除以$2\pi$. 这样定义的$N$个正则动量$(I_1, I_2, \cdots, I_N)$被称为作用量(action)，它们通过式(4-19)由$N$个运动常

数$(f_1,f_2,\cdots,f_N)$决定，反过来这 $N$ 个作用量也决定了 $N$ 个运动常数. 对于保守系统，哈密顿量本身是一个运动常数，利用这 $N$ 个作用量可将其表示为 $H=H(\underline{I})$，这里 $\underline{I}=(I_1,I_2,\cdots,I_N)^{\mathrm{T}}$.

作用量 $\underline{I}$ 决定了一个不变环面 $\mu$，与作用量 $\underline{I}$ 共轭的正则坐标是角坐标 $\underline{\theta}=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_N)^{\mathrm{T}}$，它们决定了轨道点在环面上的位置. 从式(4-15)知，角坐标可由产生函数 $S(\underline{q},\underline{I})$求得

$$\underline{\theta}=\nabla_{\underline{I}}S(\underline{q},\underline{I}),\tag{4-20}$$

可以说明，围绕 $\mu$ 的任何一个不可约回路 $\gamma_i$ 旋转一周，相应角坐标 $\theta_i$ 的增量是 $2\pi$，而 $\theta_j(j\neq i)$不变，这也是 $\underline{\theta}$ 被称为角变量的原因.

在作用量-角变量坐标系下，将原来线性无关的 $N$ 个运动常数$\{f_m\}$分别表示为 $N$ 个作用量$(I_1,I_2,\cdots,I_N)$的函数

$$f_m=f_m(I_1,I_2,\cdots,I_N)\quad(m=1,2,\cdots,N),\tag{4-21}$$

相应地，哈密顿量也写做 $N$ 个作用量的函数

$$H(I_1,I_2,\cdots,I_N).\tag{4-22}$$

这时，哈密顿方程保持形式不变，第 $i$ 个作用量和角变量满足下面的方程

$$\dot{I}_i=-\frac{\partial H}{\partial\theta_i}=0,\tag{4-23a}$$

$$\dot{\theta}_i=\frac{\partial H}{\partial I_i}=\text{const.}\tag{4-23b}$$

由式(4-23)积分得

$$I_i=\text{const.},\tag{4-24a}$$

$$\theta_i(t)=\omega_i(\underline{I})t+\text{const.},\tag{4-24b}$$

这里

$$\omega_i(\underline{I})=\frac{\partial H(\underline{I})}{\partial I_i}\tag{4-25}$$

是在环上运动的第 $i$ 个特征频率$(i=1,2,\cdots,N)$. 在第六章讨论波-波相互作用的哈密顿系统时，我们将会一再看到系统被变换到作用量-角变量坐标系的例子.

上面的这些结果被概括在刘维尔-阿诺德(Liouville-Arnol'd)定理中[71]，该定理说，一个有 $N$ 个自由度的哈密顿系统，如果它有 $N$ 个线性无关的、可对易的，即满足条件(4-8)的第一积分 $f_m(m=1,2,\cdots,N)$，并且运动是有限的，那么：

(1) 系统的轨道位于一个 $N$ 维环的表面上；

(2) 运动是条件周期(conditionally periodic)的，它有 $N$ 个特征频率

$$\omega_i=\omega_i(f_1,f_2,\cdots,f_N);\tag{4-26}$$

(3) 决定在环面上坐标位置的角变量满足方程

$$\dot{\theta}_i=\omega_i(f_1,f_2,\cdots,f_N),\tag{4-27}$$

将方程积分得到

$$\theta_i = \omega_i t + \text{const.}, \tag{4-28}$$

以上各式中 $i=1,2,\cdots,N$.

其他表象下的正则动量和正则坐标也都可以用作用量和角变量表示，即

$$\underline{q} = \underline{q}(\underline{I},\underline{\theta}), \tag{4-29a}$$

$$\underline{p} = \underline{p}(\underline{I},\underline{\theta}). \tag{4-29b}$$

将它们展开成角坐标 $\underline{\theta}$ 的周期函数，有

$$\underline{q}(t) = \sum_{\underline{m}} q_{\underline{m}}(\underline{I})e^{i\underline{m}\cdot\underline{\theta}(t)}, \tag{4-30a}$$

$$\underline{p}(t) = \sum_{\underline{m}} p_{\underline{m}}(\underline{I})e^{i\underline{m}\cdot\underline{\theta}(t)}. \tag{4-30b}$$

这里矢量 $\underline{m}$ 有 $N$ 个取整数值的分量，求和对它所有的可能取值进行. $q_{\underline{m}}$，$p_{\underline{m}}$ 分别是对应特定的 $\underline{m}$ 取值时，正则变量 $\underline{q}$，$\underline{p}$ 在 $\underline{\theta}$ 各方向上的投影系数，因为 $\underline{q}$，$\underline{p}$ 都是实数，展开系数满足条件

$$q_{\underline{m}}^* = q_{-\underline{m}}, \quad p_{\underline{m}}^* = p_{-\underline{m}}. \tag{4-31}$$

从方程(4-28)知角变量 $\theta_i(t)$ 以特征频率 $\omega_i(\underline{I})$ 运动，这样，通过式(4-30)的展开系数就可以了解正则变量 $\underline{q}(t)$，$\underline{p}(t)$ 以这些特征频率运动的状态.

### 4.1.7 可积系统的例子

研究表明，有三类哈密顿系统是完全可积的[72]：

(1) 仅有一个自由度的哈密顿系统，

(2) 哈密顿方程关于 $\underline{q}$，$\underline{p}$ 是线性的系统，

(3) 虽然哈密顿方程是非线性的，但可以被分解成非耦合的一个自由度的哈密顿系统.

下面是可积哈密顿系统的几个简单例子.

**例 4-1** 谐振子系统，哈密顿量为

$$H(q_1,p_1,q_2,p_2,\cdots,q_N,p_N) = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{p_i^2}{2}+\frac{\omega_i^2 q_i^2}{2}\right], \tag{4-32}$$

它有 $N$ 个运动常数，分别是每个振子的能量

$$F_i = \frac{p_i^2}{2}+\frac{\omega_i^2 q_i^2}{2}, \tag{4-33}$$

因此系统(4-32)是完全可积的. 谐振子之间没有耦合，每个振子在各自的相空间 $(q_i,p_i)$ 中沿一个椭圆轨道运动，它们是系统的 $N$ 个不可约回路 $\{\gamma_i\}$.

第 $i$ 个作用变量为

$$I_i = \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_i} p_i \mathrm{d}q_i = \frac{1}{2\pi}\oint \sqrt{2(F_i-\omega_i^2 q_i^2)}\mathrm{d}q_i = \frac{F_i}{\omega_i}, \tag{4-34}$$

它等于该振子运动的椭圆轨道所包围的面积除以 2π. 哈密顿量(4-32)可用作用量 $(I_1, I_2, \cdots, I_N)$ 表示为

$$H(I_1, I_2, \cdots, I_N) = \sum_{i=1}^{N} \omega_i I_i. \tag{4-35}$$

相应的哈密顿方程是

$$\dot{I}_i = 0, \tag{4-36a}$$

$$\dot{\theta}_i = \omega_i. \tag{4-36b}$$

其中 $i=1,2,\cdots,N$. 将式(4-36a)对时间 $t$ 积分,得到谐振子系统(4-32)在不变环上运动的 $N$ 个作用量 $I_1, I_2, \cdots, I_N$,它们的值不随时间改变,完全由轨道初始所处的环面位置决定. 将方程(4-36b)积分,得到角变量 $\theta_1(t), \theta_2(t), \cdots, \theta_N(t)$ 分别以频率 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_N$ 围绕不可约回路旋转.

对于波动系统来说,一个不变振幅的简谐波模式 $A_k e^{i\omega_k t}$ 就是一个独立谐振子,若定义作用量 $I_k = A_k^2/2$ 和角变量 $\theta_k = \omega_k t$,则模式的运动可以用哈密顿方程(4-36)描写. 描写 $N$ 个简谐波模式运动的哈密顿量就是式(4-35),每一个独立的简谐波模式 $(A_k, \omega_k)$ 对应一个作用量-角变量对 $(I_k, \theta_k)$,其中正则坐标 $\{I_k\}$ 决定了简谐波模式轨道所在的环面,$\{\theta_k\}$ 则是环上的一组循环坐标. 由此可见,简谐波模式的振幅和位相通过作用量和角变量构成了哈密顿系统中一对共轭变量. 本章开始时我们已经指出了这一点,只是在简谐波情况下,这种共轭关系简单地分别表现在每个振动模式上,显得平凡无奇.

**例 4-2**　质量 $m$、摆长 $l$ 的单摆运动,它的哈密顿量是

$$H = \frac{p^2}{2ml^2} - mgl\cos q, \tag{4-37}$$

这里 $g$ 是重力加速度. 因为只有一个自由度,哈密顿系统(4-37)是完全可积的,哈密顿量 $H$ 作为能量,是系统唯一的运动常数. 对于给定能量 $H(q,p)=E$,正则动量 $p$ 可以用正则坐标 $q$ 表示为

$$p(q,E) = \sqrt{2ml^2(E + mgl\cos q)}, \tag{4-38}$$

相应的哈密顿方程是

$$\dot{q} = \frac{p}{ml^2}, \tag{4-39a}$$

$$\dot{p} = -mgl\sin q, \tag{4-39b}$$

或

$$\ddot{q} = -\frac{g}{l}\sin q. \tag{4-40}$$

单摆的动量方程(4-39b)是一个非线性方程,只要对 $\sin q$ 作泰勒展开,就能看

出这一点，因此单摆是一个非线性振子. 关于单摆的运动规律，相信读者在学习普通物理时已经很熟悉了，现在回忆它，是要强调，单摆虽然简单，它的运动却包含了非线性振子的一些典型特征.

图 4-3 是单摆运动的相图，只画了 $q$ 在 $(-\pi,\pi)$ 区间的部分. 在给定能量 $E$ 时，动量 $p$ 随幅角 $q$ 周期变化，由式(4-39)决定的轨道在相图上是一个一维不变环. 单摆的周期运动分为两类，如果能量 $E<mgl$，单摆作来回的摆动，幅角的大小 $|q|$ 小于 $\pi$，轨道在相图上是一个椭圆；如果 $E>mgl$，幅角 $q$ 可以穿越 $[-\pi,\pi]$ 区间，这时单摆运动处于转动状态，$p>0$ 和 $p<0$ 时旋转方向相反. 考虑 $q$ 的主值，轨道随时间周期变化，流形依然有一维环形拓扑.

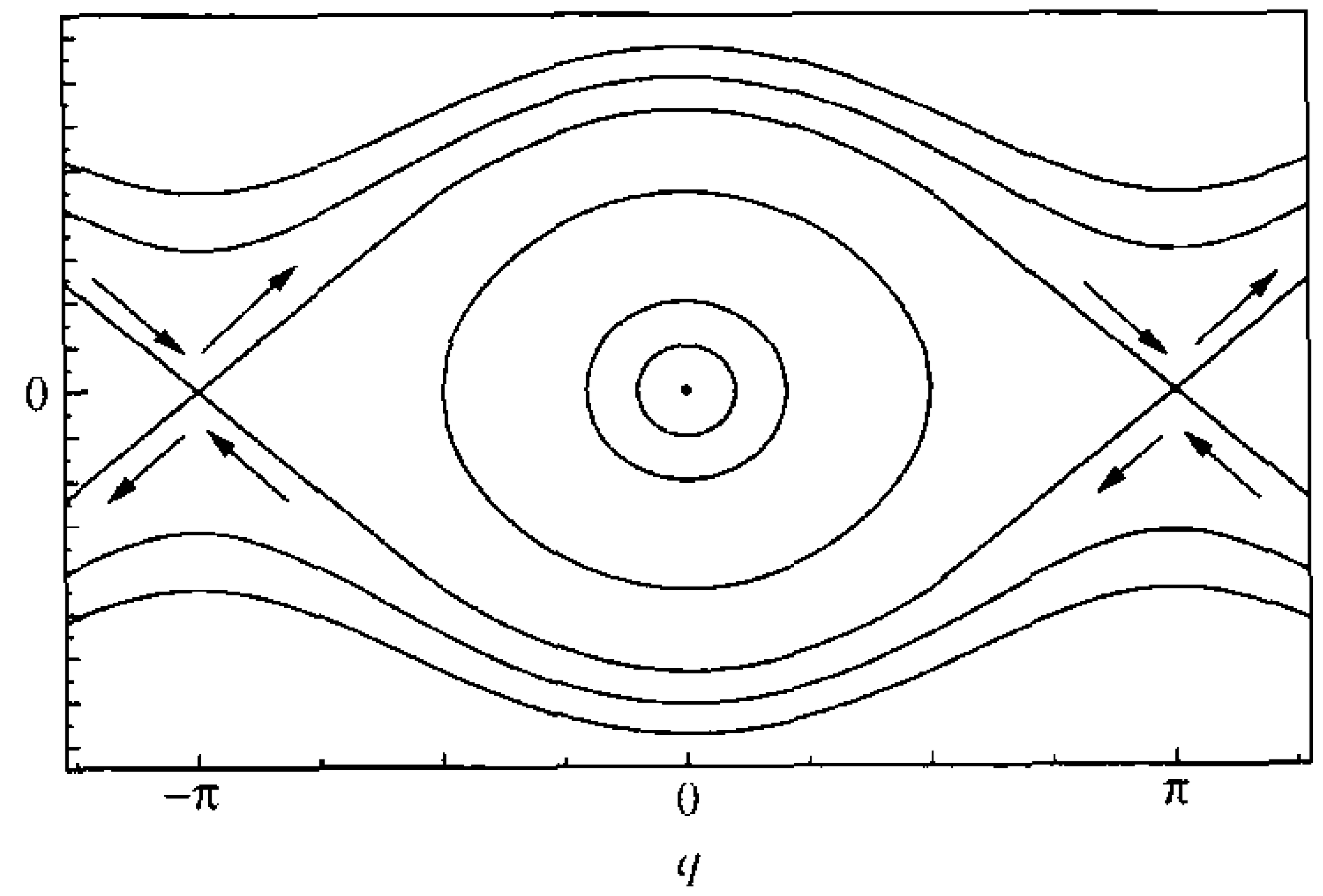



图 4-3 单摆的相图

相图 4-3 上有几个点很特殊，一个是点 $(q=0,p=0)$，对应 $E=-mgl$；另两个是点 $(q=\pm\pi,p=0)$，对应 $E=mgl$. 从运动方程(4-39)知，它们都是系统的平衡态或定态，满足方程

$$\dot{q}=0,\quad \dot{p}=0. \tag{4-41}$$

初始位于这些相点的状态不随时间改变，在动力学理论上这样的相点叫做系统的不动点(fixed point).

不动点 $(q=0,p=0)$ 在相图 4-3 上处于一组椭圆的中心，在数学上称做椭圆点(elliptic point)，它对应单摆下垂时的稳定平衡状态. 如果受到小扰动，摆垂将围绕这个平衡位置摆动，无穷小的阻尼力都会使摆垂最终回到这个平衡位置.

不动点 $(q=\pm\pi,p=0)$ 对应摆杆竖直向上时摆垂的平衡位置，经验告诉我们，这个平衡状态经不起扰动，无穷小的扰动都将引起摆垂离开这个平衡态. 在相图 4-3 上有两条曲线将点 $(q=-\pi,p=0)$ 和点 $(q=+\pi,p=0)$ 连接起来，这两条曲线称为分界线(separatrix)，它们将单摆的摆动和转动这两个运动状态所占据的相空间区域分割开来. 受到无穷小的扰动时，依赖于扰动作用力施加的方向，摆垂沿着这两条分界线之一离开不动点 $(q=\pm\pi,p=0)$，所以从这个不动点出发有两条不稳定轨道，在图 4-3 中用从不动点向外的箭头标记. 如果有一个无穷小扰动在 $t=0$

时引起摆垂沿 $q$ 增加的方向离开不动点$(-\pi,0)$，那么它将在 $t\to+\infty$ 时沿上半平面的分界线到达不动点$(+\pi,0)$（在分界线上 $q$ 以 $2\pi$ 为周期，故轨道回到了它在不变环上的出发点），形象地说，就是摆垂从竖直向上的平衡位置偏离并旋转一周后又回到这个平衡位置. 类似地，沿下半平面的分界线也可以将失稳摆垂带回到原来的不动点，所以与不动点$(q=\pm\pi, p=0)$相连接还有两条稳定轨道，在图 4-3 上用指向不动点的箭头标记.

从稳定性质上来看，不动点$(\pm\pi,0)$非常类似于位于马鞍型势阱中心平衡位置的小球，如图 4-4 所示. 它是稳定还是不稳定，取决于扰动力施加的方向，对前后方向的扰动小球是稳定的，而对沿跨骑方向的扰动不稳定，因此不动点$(\pm\pi,0)$被称为相空间中的鞍点(saddle point)，或者叫做双曲点(hyperbolic point).

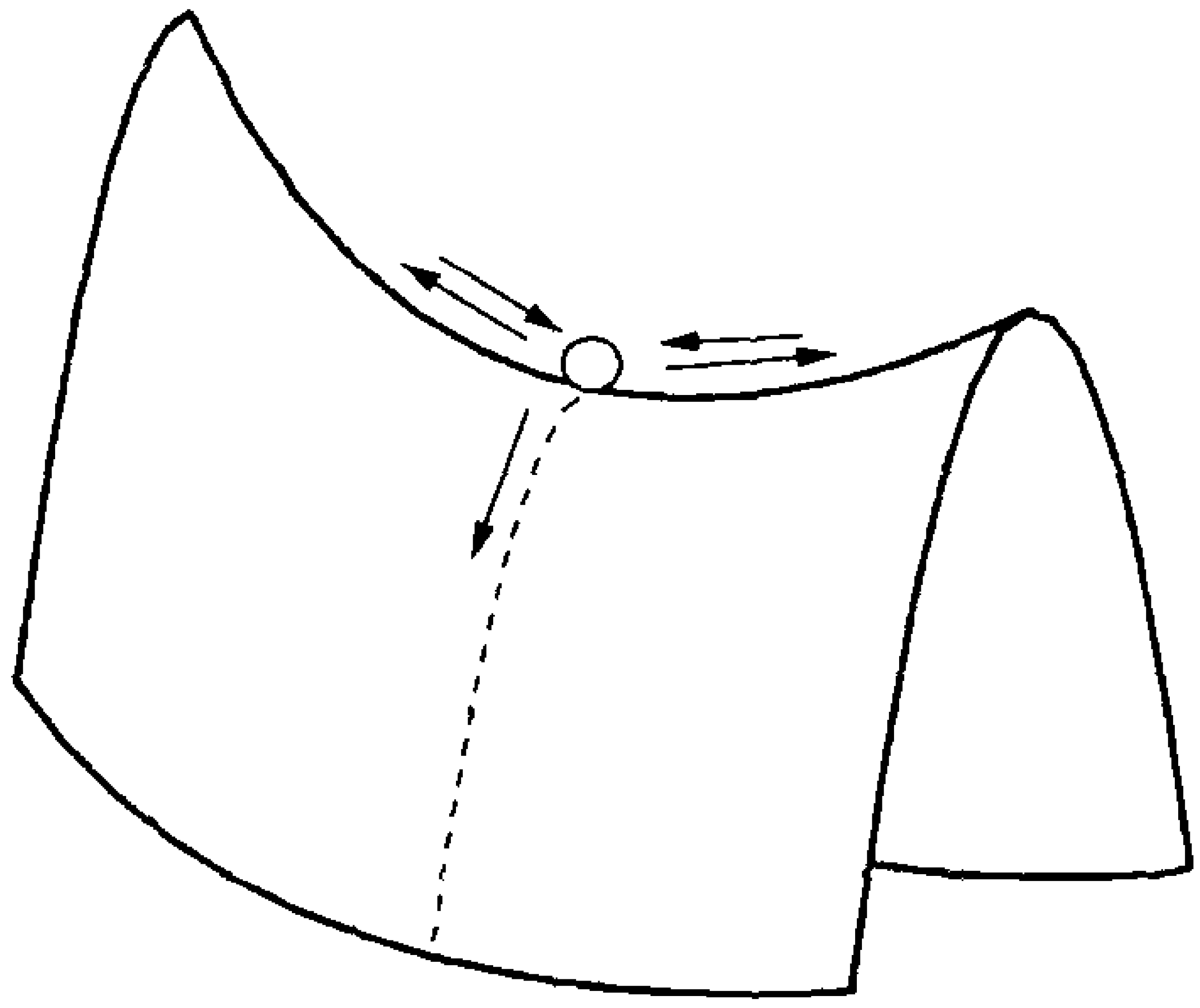


图 4-4　小球在马鞍形势阱中运动的示意图

像单摆相图上那样将两个鞍点连接起来的分界线称为异宿轨道(heteroclinic orbit)，见示意图4-5(a)，这个名称是相对于同宿轨道(homoclinic orbit)而言的；同宿轨道是相空间中连接同一个不动点的闭合曲线，如图 4-5(b)所示. 在第六章中我们将看到，在随孤立子解运动的坐标系中观察，这个解就表现为相空间中的一条同宿轨道.

(a) 异宿轨道　　　　(b) 同宿轨道

图 4-5　异宿轨道和同宿轨道的示意图

沿不稳定轨道离开鞍点$(q=\pm\pi, p=0)$的摆垂需要经过无穷长的时间才能沿

稳定轨道重新回到点($q=\mp\pi, p=0$),因此单摆在分界线上的运动有无穷长的特征时间尺度,换句话说,沿分界线运动的特征频率变为0.图4-6是在能量$E<mgl$范围内单摆幅角$q(t)$的演化,随着$E$从(a)~(d)逐渐增加(对应单摆相图4-3中从内向外的椭圆轨道),曲线越来越偏离正弦形状,且周期不断加长,到分界线$E=mgl$处周期长度将变为无穷大.如果画出$q(t)$的傅里叶谱,可以看到,随能量$E$增加,分波频率递次显现,且基频不断向低端移动,最终在分界线处特征频率变为零.

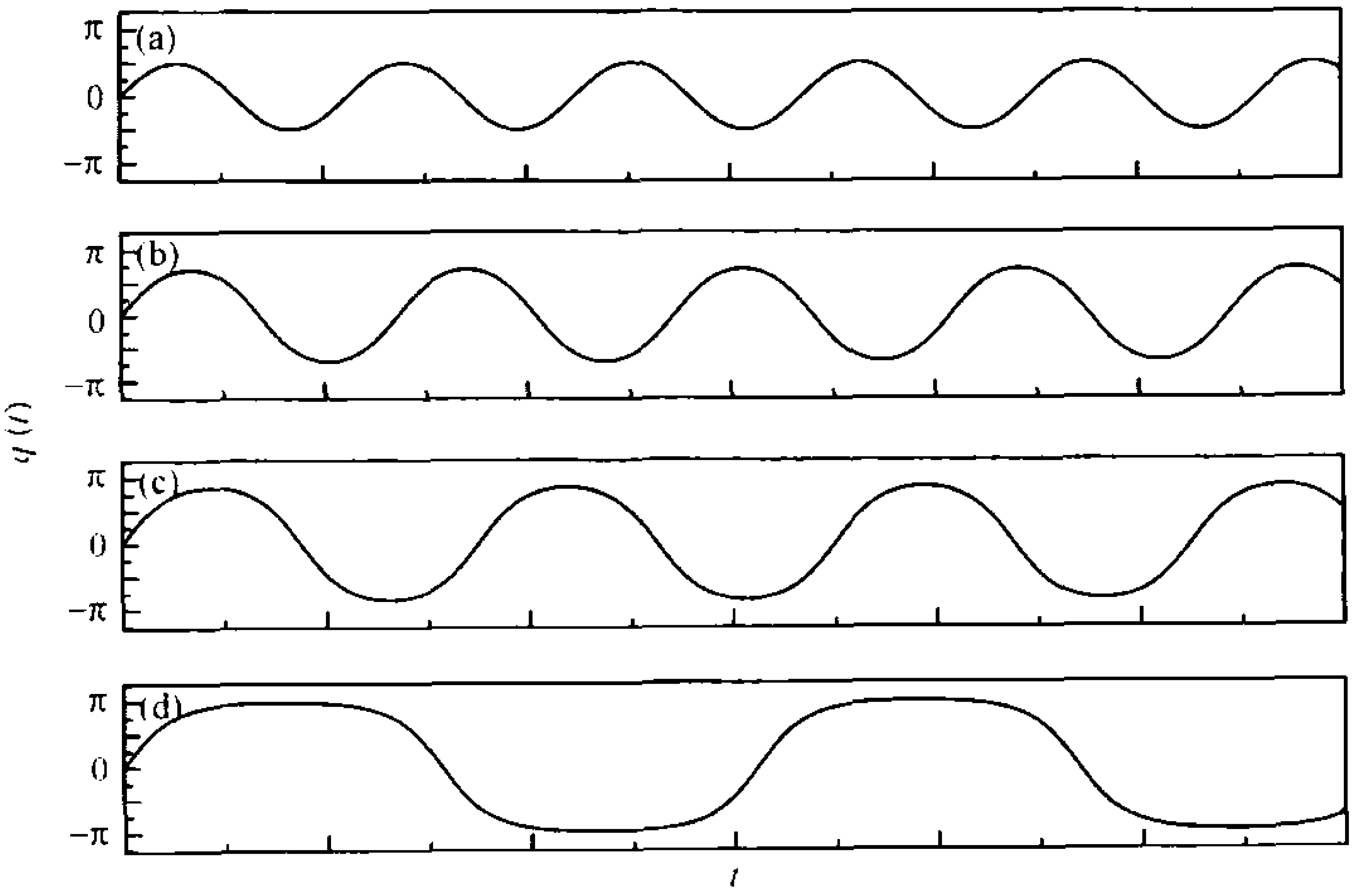



图4-6 在能量$E<mgl$范围内单摆幅角$q$随时间的演化.

由此可知,在单摆相图上的椭圆点(0,0)与鞍点($\pm\pi$,0)在特征频率的意义上.有截然不同的性质,尽管从这两点出发$q(t)$,$p(t)$的运动都表现为时间的常数.在椭圆点(0,0)处,摆幅虽然为零,却存在有限大小的运动频率,这个平衡态实际上是一个摆幅无穷小的周期振荡状态;而在鞍点处,运动频率完全消失了,特征时间尺度变为无穷大,只是在分界线以外,系统才重新获得了有限大小的运动频率,并出现运动状态的突变.从椭圆点(0,0)到连接鞍点($\pm\pi$,0)的分界线上运动状态的转变是伴随着非线性强度逐渐增加而发生的,随着单摆能量增加(即椭圆轨道变得越来越粗大),幅角$q$可以在更大范围内取值,方程(4-40)右边$\sin q$的泰勒展开中高幂次项逐渐起到更大的作用,它们不再能够被忽略.

作为一个简单的非线性振子,单摆的行为具有典型意义,理解其运动性质对认识非线性波大有裨益.在后面的章节我们会看到,有的非线性波动可以被化为在(运动着的)周期势阱中的一组耦合非线性振子,因为受势阱影响且存在耦合,每个振子的运动通常要比单摆复杂得多,它们的轨道甚至可能随时间无序地变化,尽管如此,这些振子的行为在某种意义上仍然表现出与单摆类似的一些特点.例如,在非线性较弱时,每个振子的幅角都围绕其平衡位置作某种形式的摆动,随非线性增强,一些振子幅角的运动状态可能发生突变,允许出现穿越$2\pi$的转动,在一定条件

下幅角运动状态的这种突变还与整个波动状态的改变相关.单摆与波动,这两个看似截然不同的物理系统,其运动规律其实有许多相似之处,在下面最简单的波与粒子相互作用的例子中,也可以找到单摆的影子.

**例 4-3**　带电粒子在平面波静电场中的运动[71].

质量为 $m$,电荷为 $e$ 的粒子受到周期静电波场 $E_0\sin(kx-\omega t)$ 的作用,如图 4-7 所示.

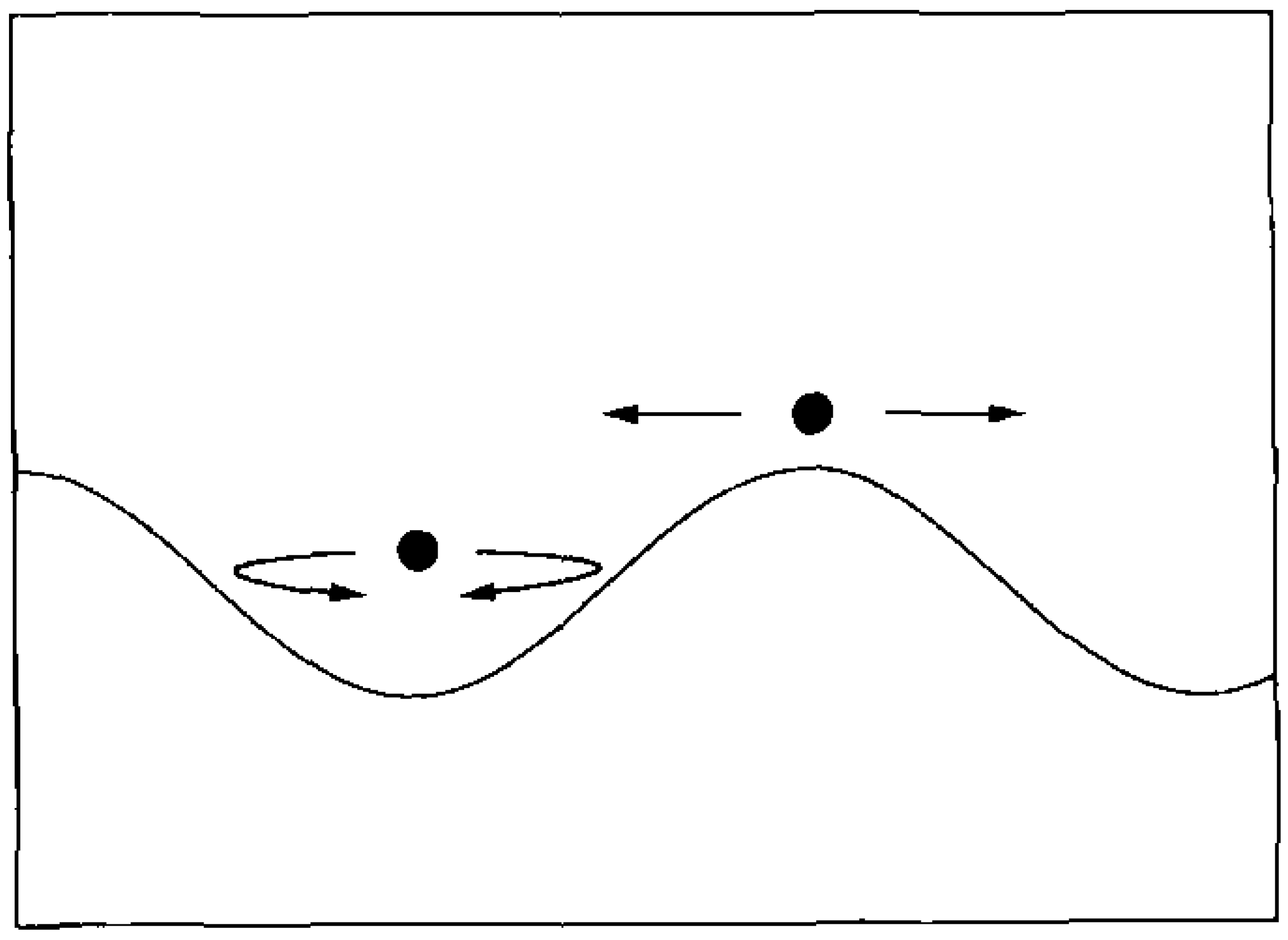


图 4-7　带电粒子在周期静电波场中运动的示意图

粒子坐标 $x$ 随时间 $t$ 的变化为

$$\ddot{x}=-\frac{e}{m}E_0\sin(kx-\omega t),\tag{4-42}$$

将坐标系变换到随波运动的参照系,令 $y=k(x-ut)$,这里 $u\equiv\omega/k$,方程(4-42)化为

$$\ddot{y}+\omega_0^2\sin y=0,\tag{4-43}$$

这里,$\omega_0=(eE_0k/m)^{1/2}$.因此,在这个坐标系中观察,带电粒子所受到的是一个与时间无关的空间周期势的作用.式(4-43)与单摆运动方程(4-40)的形式完全相同,带电粒子在周期势阱中的运动就像一个单摆,存在相图 4-3 中的椭圆点和双曲点这样的平衡态.依初始条件不同,带电粒子有可能被束缚在波场的两个势垒之间来回反射,也可能相对于周期波列向前或向后自由地穿越势垒运动,就像单摆的"摆动"相和"转动"相.换言之,单摆从摆动相到转动相的突变,可视为类似于带电粒子在周期静电波场中运动时的束缚-自由转变.

这个例子给我们的另一个启示是,涉及波动问题,常常需要在恰当的随波坐标系中进行观察,如在以波场的相速度 $u$ 运动的坐标系中,方程(4-42)中的波列仿佛被"冻结"了,在这个新的惯性系中,我们又可以运用起过去熟悉的一些概念,诸如平衡态、势阱以及平衡态对微扰的线性响应等.这一点并不令人感到意外,因为在所有惯性坐标系中自然界有相同的运动规律.

# §4.2 不变环对扰动的响应

## 4.2.1 有理环面和无理环面

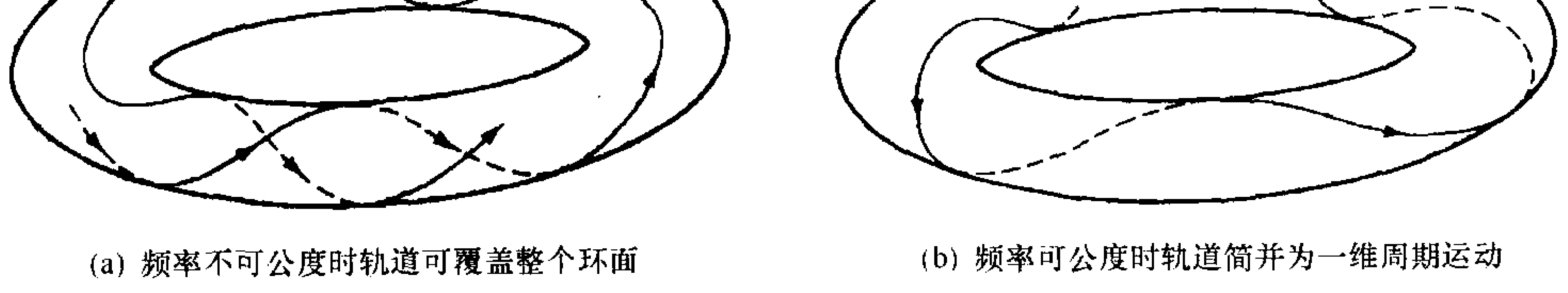
按照前面介绍的理论，作用量-角变量是描写可积哈密顿系统的自然坐标系，在每一个自由度上，作用量是运动常数，角变量围绕不变环上的不可约回路运动时有特定的频率. 这样，一个在 $N$ 维环面上运动的可积哈密顿系统有 $N$ 个特征频率，用矢量 $\underline{\omega}\equiv(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_N)^{\mathrm{T}}$ 表示，根据式(4-25)有

$$\underline{\omega}=\nabla_{\underline{I}}H, \tag{4-44}$$

作用量 $\underline{I}\equiv(I_1,I_2,\cdots,I_N)^{\mathrm{T}}$ 的值一旦给定，它们就决定了运动流形 $\mu$ 上一个特定的不变环，以及在环面上角变量 $\underline{\theta}\equiv(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_N)^{\mathrm{T}}$ 分别围绕 $N$ 个不可约回路 $(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_N)$运动的频率 $\underline{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_N)^{\mathrm{T}}$，其中第 $i$ 个角变量 $\theta_i$ 有周期

$$T_i=\frac{2\pi}{\omega_i}. \tag{4-45}$$

这 $N$ 个频率 $\omega_i(i=1,2,\cdots,N)$是相互独立的，其中任意两个频率之比可能是一个有理数，也可能是无理数，在动力学上这个差别非同小可. 以二维不变环为例，轨道以频率 $\omega_1$ 围绕大环旋转的同时，又以频率 $\omega_2$ 围绕小环旋转，它们的两个运动周期分别为 $T_1\equiv2\pi/\omega_1$ 和 $T_2\equiv2\pi/\omega_2$. 定义旋转数(rotation number 或绕数 winding number)$R\equiv\omega_2/\omega_1$，如果 $R$ 是无理数，$\omega_1$ 与 $\omega_2$ 不可公度，即没有任何整数 $m,n$ 的取值使得 $m\omega_1=n\omega_2$，轨道将永远不会回到它的出发点，也就永远不会闭合，并最终将稠密地覆盖整个环面，如图 4-8(a)所示；另一方面，如果 $R$ 是有理数，两个频率可公度，简并发生，在 $t=nT_1=mT_2$ 时刻，轨道将精确地回到它的出发点，并在此后沿这个闭合轨道反复作周期运动，在这种情况下轨道将不能遍历整个环面，相空间中的运动流形从一个二维环面蜕化为一条闭合轨道，见图 4-8(b).



(a) 频率不可公度时轨道可覆盖整个环面　　(b) 频率可公度时轨道简并为一维周期运动

图 4-8　二维不变环上的轨道

一般地，对于一个具有 $N$ 个自由度的可积哈密顿系统，轨道闭合的条件是：存在一个频率 $\omega_b$，使得不变环上的运动频率 $\underline{\omega}$ 满足[10]

$$\underline{\omega} = \underline{N}\omega_b, \tag{4-46}$$

这里,$\underline{N}$ 是一个有 $N$ 个非零整数分量的矢量,记为 $\underline{N}=(n_1, n_2, \cdots, n_N)^T$. 这个条件也可等价地表述为:若有 $N-1$ 个关系

$$\underline{m} \cdot \underline{\omega} = 0 \tag{4-47}$$

成立,不变环上的轨道将出现闭合,这里 $\underline{m}$ 是具有有限个非零整数分量的矢量.

若条件(4-46)被满足,$N$ 个角变量 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_N$ 的运动频率被 $\omega_b$ 公度,轨道将在 $t=2\pi/\omega_b$ 时刻精确地回到它的出发点,这种蜕化了的环面称做有理(rational)环面;与此对照,如果不存在一个满足条件(4-46)的频率 $\omega_b$,轨道在环面上永不闭合,这样的环面称做无理(irrational)环面.

其实,对于一个 $N$ 维环,只要有一个可公度条件(4-47)满足,轨道就会闭合,每增加这样一个关系,流形 $\mu$ 的维数就减少一维,如果有 $S$ 个关系(4-47)成立($S<N-1$),轨道的流形将蜕化为 $N-S$ 维. 特别地,若有 $N-1$ 个这样的关系式成立,运动将被约束在一维周期轨道上.

我们知道,在实数轴上有理数的集合只有测度 0,而无理数的测度为 1,因此无理环面在不变环中更为典型,频率可公度或部分可公度的不变环则稠密地嵌于其间,形成测度为 0 的一个集合.

当一个可积系统的运动轨道受到扰动时,它的流形会发生变化,问题是,原来的可积不变环仅仅出现了些许变形,还是完全遭到破坏? 讨论有理环面和无理环面的意义就在于,有理环面及其邻近的不变环非常不稳定,在扰动下它们的环形拓扑结构容易被破坏,轨道变得无序. 只有拓扑结构发生改变,才特别为动力学理论所重视. 在下面的两小节中,我们将讨论不变环对扰动的响应.

### 4.2.2 不变环的共振破坏

围绕可积不变环上不可约回路的运动都有各自的特征频率,考虑到其中一些频率可能被公度,在一个有 $N$ 个自由度的可积系统内部,依参数不同,一般至少有一个独立的特征频率,最多则应有 $N$ 个独立频率. 研究表明,如果这样的系统受到外加的周期驱动,那么外驱动将有机会与内部频率发生共振;即使没有外加的周期驱动,在内部的独立频率不止一个时,它们之间也可能由于受到自治扰动而出现共振. 在这些情况下,原来可积系统的环形拓扑结构都会因共振遭受破坏.

**例 4-4** 周期扰动下的单自由度可积哈密顿系统

考虑一维系统,在作用量-角变量$(I,\theta)$坐标系下,未扰哈密顿量 $H_0$ 只是作用量 $I$ 的函数,假设它受到一个外加的周期扰动 $V(I,\theta;t)$,总的哈密顿量为[71]

$$H(I,\theta;t) = H_0(I) + \varepsilon V(I,\theta;t), \tag{4-48}$$

这里,扰动以 $T$ 为周期,$V(I,\theta;t)=V(I,\theta;t+T)$,频率为 $\Omega\equiv 2\pi/T$,扰动强度 $\varepsilon$ 是

小量. 根据可积哈密顿系统的理论知道，$H_0(I)$的轨道流形是一个不变环，在环上的运动频率是 $\omega(I)\equiv\partial H_0/\partial I$.

将周期扰动 $V(I,\theta;t)$用作用量 $I$ 和角变量 $\theta$ 展开为

$$V(I,\theta;t) = \sum_{n,m} V_{n,m}(I)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\theta - m\Omega t)}, \tag{4-49}$$

设扰动函数 $V$ 为实值，故有 $V_{-n,-m}=V^*_{n,m}$，系统(4-48)的运动方程可写做

$$\dot{I} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\mathrm{i}\epsilon\sum_{n,m} nV_{n,m}(I)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\theta - m\Omega t)}, \tag{4-50a}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial I} = \omega(I) + \varepsilon\sum_{n,m}\frac{\mathrm{d}V_{n,m}(I)}{\mathrm{d}I}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\theta - m\Omega t)}. \tag{4-50b}$$

在小参量 $\varepsilon$ 的零阶近似下，方程(4-50)的解给出的就是未扰可积哈密顿 $H_0(I)$的运动

$$I^{(0)} = \text{const.}, \tag{4-51a}$$

$$\theta^{(0)}(t) = \omega(I^{(0)})t + \text{const.} \tag{4-51b}$$

将零阶解代入运动方程(4-50)，在 $\varepsilon$ 的一阶近似下得到

$$\dot{I}^{(1)} = -\mathrm{i}\sum_{n,m} n\tilde{V}_{n,m}(I^{(0)})\mathrm{e}^{\mathrm{i}[n\omega(I^{(0)})t - m\Omega t]}, \tag{4-52a}$$

$$\dot{\theta}^{(1)} = \frac{\mathrm{d}\omega(I^{(0)})}{\mathrm{d}I}I^{(1)} + \sum_{n,m}\frac{\mathrm{d}\tilde{V}_{n,m}(I^{(0)})}{\mathrm{d}I}\mathrm{e}^{\mathrm{i}[n\omega(I^{(0)})t - m\Omega t]}, \tag{4-52b}$$

这里，$\tilde{V}_{n,m}$与 $V_{n,m}$相差一个常数位相因子. 积分得，

$$I^{(1)}(t) = -\sum_{n,m}\frac{n\tilde{V}_{n,m}(I^{(0)})}{n\omega - m\Omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}[n\omega(I^{(0)})t - m\Omega t]} + \text{const.}, \tag{4-53a}$$

$$\theta^{(1)}(t) = \mathrm{i}\sum_{n,m}\left[\frac{n\tilde{V}_{n,m}(I^{(0)})}{(n\omega - m\Omega)^2}\frac{\mathrm{d}\omega(I^{(0)})}{\mathrm{d}I} - \frac{1}{n\omega - m\Omega}\frac{\mathrm{d}\tilde{V}_{n,m}(I^{(0)})}{\mathrm{d}I}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\omega(I^{(0)}) - m\Omega)t}. \tag{4-53b}$$

由此可知，如果外加周期力的频率 $\Omega$ 恰好与未扰系统某个不变环的特征频率 $\omega(I^{(0)})$可公度，即当

$$n\omega(I^{(0)}) - m\Omega = 0 \tag{4-54}$$

时，扰动的一阶量$(I^{(1)},\theta^{(1)})$将出现共振分母，可积系统 $H_0$ 的这个不变环被破坏.

这里，外驱动提供了一个特征频率，与可积哈密顿系统不变环内部的特征频率发生了共振. 天体运动中的某些现象可以从这个结果得到合理的解释. 一个广为人知的例子是小行星的密度分布[68]，我们知道，在中心力场作用下的粒子运动是一个可积哈密顿系统，每个小行星围绕太阳旋转的椭圆轨道都可以看做为一个可积不变环，有频率 $\omega$；此外，木星作为太阳系最大的行星，有公转频率 $\omega_J$，它可被视为小行星绕日运动的一个外周期驱动力. 观察发现，在 $\omega/\omega_J=4,7/2,3,5/2,2,3/2,1$ 等有理数的地方，小行星分布的密度出现极小值. 按照前面介绍的哈密顿系统理

论，我们知道这是因为在这些位置附近木星公转频率与小行星绕日运动的频率出现了共振，未扰的可积不变环被破坏，从而不再有可供小行星稳定运行的轨道.

**例 4-5**　在不可积自治扰动下的多自由度系统.

考虑有多个自由度的自治系统，哈密顿量有下面的形式[71]

$$H(\underline{I},\underline{\theta}) = H_0(\underline{I}) + \varepsilon V(\underline{I},\underline{\theta}), \tag{4-55}$$

这里 $H_0$ 是自由度数 $N>1$ 的可积哈密顿量，$\underline{I}$ 和 $\underline{\theta}$ 分别是它的作用量和角变量，扰动 $V(\underline{I},\underline{\theta})$ 仅依赖于 $\underline{I}$ 和 $\underline{\theta}$，与时间无关. 在这里扰动 $V(\underline{I},\underline{\theta})$ 并没有像哈密顿系统(4-48)中的那样引进外来的新频率或新自由度，受扰系统(4-55)仍然是一个自治系统. 我们知道，在 $2N$ 维相空间中未扰哈密顿 $H_0$ 的轨道一般在一个 $N$ 维不变环上运动，有 $N$ 个特征频率，当受到自治扰动时，这个不变环将出现怎样的改变呢?

让我们将扰动 $V(\underline{I},\underline{\theta})$ 展开为

$$V(\underline{I},\underline{\theta}) = \sum_{\underline{n}} V_{\underline{n}}(\underline{I}) e^{i\underline{n}\cdot\underline{\theta}}, \tag{4-56}$$

这里 $\underline{n}$ 是具有整数分量的矢量，系统(4-55)的运动方程变为

$$\dot{I}_j = -\frac{\partial H}{\partial \theta_j} = -i\varepsilon \sum_{\underline{n}} n_j V_{\underline{n}}(\underline{I}) e^{i\underline{n}\cdot\underline{\theta}}, \tag{4-57a}$$

$$\dot{\theta}_j = \frac{\partial H}{\partial I_j} = \omega_j^{(0)}(\underline{I}) + \varepsilon \sum_{\underline{n}} \frac{dV_{\underline{n}}(\underline{I})}{dI_j} e^{i\underline{n}\cdot\underline{\theta}}, \tag{4-57b}$$

式中，$\omega_j^{(0)}(\underline{I}) = \partial H_0/\partial I_j$ 是未扰哈密顿 $H_0(\underline{I})$ 的轨道围绕其不可约回路 $\gamma_j$ 旋转的频率，$j=1,2,\cdots,N$.

将系统的解按小量 $\varepsilon$ 的幂次展开

$$I_j = I_j^{(0)} + \varepsilon I_j^{(1)} + \cdots, \quad \theta_j = \theta_j^{(0)} + \varepsilon\theta_j^{(1)} + \cdots, \tag{4-58}$$

代入运动方程(4-57)，在 $\varepsilon$ 的零阶近似下积分，得到的就是未扰哈密顿系统 $H_0(\underline{I})$ 的解

$$I_j^{(0)} = \text{const.}, \tag{4-59a}$$

$$\theta_j^{(0)} = \omega_j^{(0)} t + \text{const.} \tag{4-59b}$$

在 $\varepsilon$ 的一阶近似下将方程(4-57a)积分，利用零阶解(4-59)得到

$$I_j^{(1)} = -\sum_{\underline{n}} \frac{n_j V_{\underline{n}}(\underline{I}^{(0)})}{\underline{n}\cdot\underline{\omega}} e^{i\underline{n}\cdot\underline{\theta}^{(0)}}, \tag{4-60}$$

我们看到，当满足条件 $\underline{n}\cdot\underline{\omega}=0$，即

$$n_1\omega_1 + n_2\omega_2 + \cdots + n_N\omega_N = 0 \tag{4-61}$$

时，在 $I_j^{(1)}$ 的表达式(4-60)中出现了共振分母，扰动解将随时间发散，不变环遭到破坏.

式(4-61)正是出现有理环面的条件(4-47)，这时围绕环上 $N$ 个不可约回路 $\{\gamma_j\}$ 运动的频率可公度，轨道在一个闭合曲线上运动，不能覆盖整个环面. 这个结

果说明，即使没有外来频率的驱动，多自由度系统的有理环面也十分容易受到扰动破坏. 由于系统内部自由度之间的共振，任何自治的小扰动都会被小分母放大，这使得有理环面变得非常不稳定.

不变环的稳定性问题并非只在数学家的书斋里供鉴赏，相反，它们可能成为物理学家为之困扰和必须面对的实际问题，受控聚变托卡马克装置的磁场位形就是一个例子[73]. 在第三章中我们已经知道，托卡马克环形磁场由沿大环方向的主磁场 $B_\varphi$ 和沿小环方向的角向磁场 $B_\theta(r)$ 这两部分组成，其中角向磁场是等离子体放电电流引起的，因此托卡马克磁场是一个自组织的系统. 图 4-9 是托卡马克磁场位形示意图，$R$ 和 $r$ 分别表示大环和小环的径向坐标，$\varphi$ 和 $\theta$ 分别是它们的角坐标，研究表明，磁场位形可以用一个 1½ 维的可积哈密顿系统描写，其中 $\varphi$ 起到有效时间的作用，有关理论可参见[74,5].

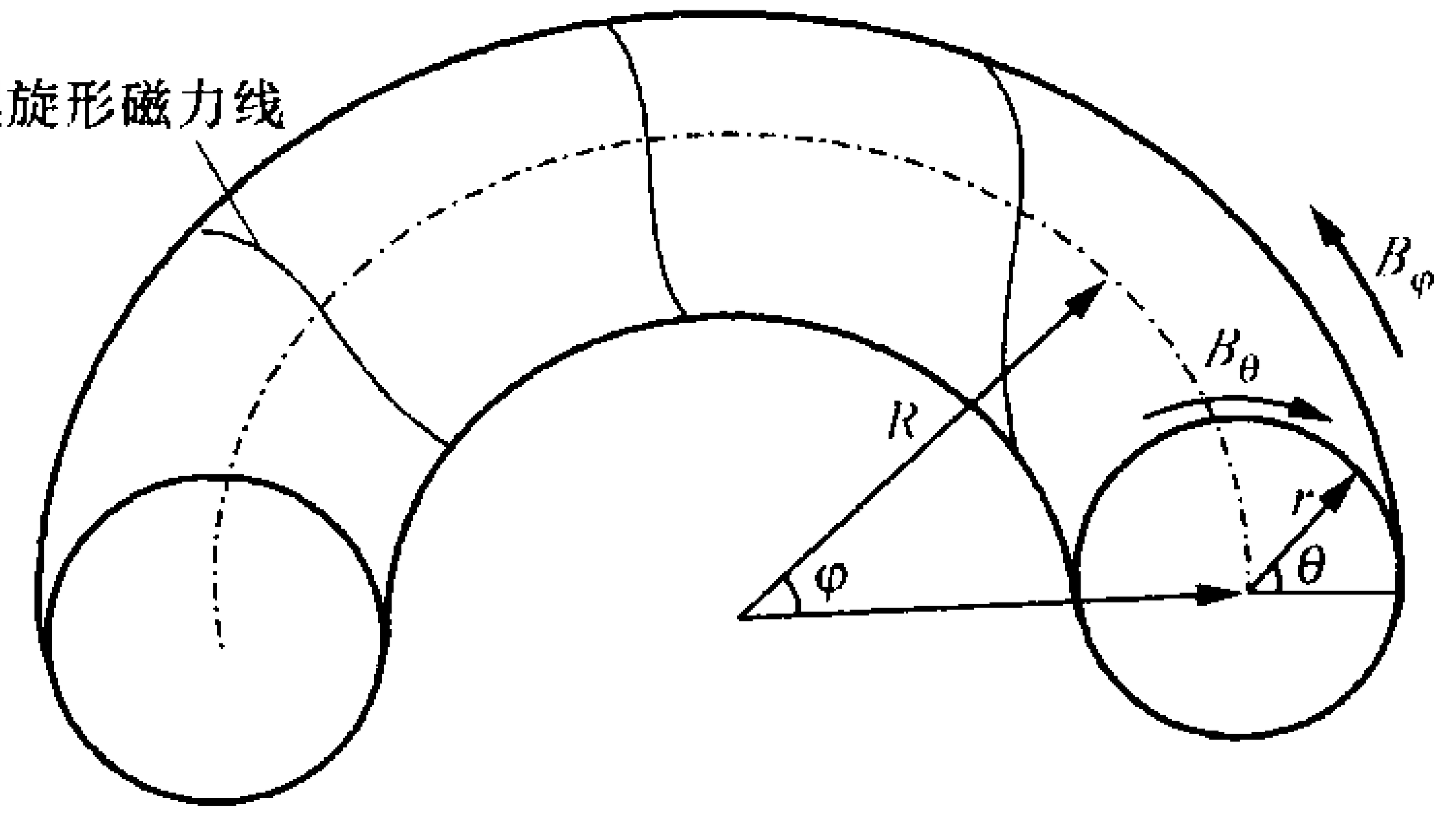



图 4-9　托卡马克环形磁场位形示意图

托卡马克的磁力线为螺旋形，在沿环向旋转弧长 $R\mathrm{d}\varphi$ 的同时沿角向旋转弧长 $r\mathrm{d}\theta$，它们的比值等于相应场分量之比，$R\mathrm{d}\varphi/r\mathrm{d}\theta = B_\varphi/B_\theta$，因此有 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}\varphi = B_\theta R/B_\varphi r$. 这样，为简单起见，可将磁力线的走向在形式上用下面的哈密顿量描写

$$H(B_\theta, B_\varphi, \theta, \varphi) = \frac{RB_\theta^2}{2} + \frac{rB_\varphi^2}{2}, \tag{4-62}$$

这里，$R$ 和 $r$ 是外参数，$B_\theta$ 和 $B_\varphi$ 是两个作用量，与之共轭的两个角坐标分别是 $\theta$ 和 $\varphi$. 哈密顿系统(4-62)的轨道给出磁力线的走向，而作为轨道流形的不变环就是由磁力线缠绕成的环形拓扑结构，在托卡马克理论中称为磁面，它是一个在坐标空间中“看得见”的二维环.

在托卡马克磁场理论中，参数

$$q = \frac{rB_\varphi}{RB_\theta} \tag{4-63}$$

称为磁力线的旋转变换，在几何上它是磁力线沿环向和沿角向旋转周数之比，可以说明，在用哈密顿系统(4-62)描写时，这个量就是动力学理论中所谓的旋转数. 当 $q$ 取无理数时，磁力线永远不会闭合，它将遍历二维环面形成一个“磁笼子”. 因为

带电粒子围绕磁力线旋转，它们将被束缚在这些环形磁面上，我们知道，这正是托卡马克装置约束等离子体的主要方法. 然而，$q$ 也有可能等于一个有理数，$q=m/n$，这时磁力线在沿环向旋转 $m$ 周后将闭合，它不再能覆盖整个环面，这种蜕化了的磁面在托卡马克理论中叫做有理磁面[73]. 聚变物理学家早已发现，有理磁面非常容易因扰动而破裂，在它的附近磁力线的走向变得紊乱，不再能有效地束缚带电粒子的运动，这就造成了等离子体不稳定.

### 4.2.3 奇异性与微扰论的困难

微扰方法是物理学家分析问题的重要手段，就像前两小节的例子中那样，将受扰系统的解按小量 $\varepsilon$ 的幂次展开，期望对于足够小的 $\varepsilon$，总能通过逐级近似不断逼近真解. 遗憾的是，哈密顿系统不变环的理论打破了这一美好蓝图. 我们看到，当外驱动频率与内部特征频率共振，或者内部自由度之间发生共振时，哪怕是无穷小的扰动，都会在某一级近似上出现小分母发散，在这种情况下，不可能用逐级近似的方法逼近真解. 微扰方法在这里遇到了困难，这种困难是根本性的，无法超越，因为共振引起运动流形出现了拓扑奇异性.

作为例子，再分析带电粒子被平面波场加速的问题，将方程(4-42)重新写在这里

$$\ddot{x} = -\frac{e}{m}E_0\sin(kx-\omega t). \tag{4-64}$$

让我们尝试以微扰方法求解，仍采用随波坐标系. 令 $y=k(x-ut)$，这里 $u\equiv\omega/k$，方程(4-64)化为

$$\ddot{y}+\omega_0^2\sin y=0. \tag{4-65}$$

这里 $\omega_0=(eE_0k/m)^{1/2}$. 在最低阶近似下认为波场只是小扰动，忽略含 $\omega_0$ 的项解得

$$\dot{y}^{(0)}=k[v(0)-u],\quad y^{(0)}=\dot{y}^{(0)}t+\text{const.}, \tag{4-66}$$

这里 $v(0)$是带电粒子的初始速度.

应用微扰方法的条件是扰动势的能量远小于在随波坐标系中粒子运动的动能，即要求

$$\frac{\omega_0^2}{[\dot{y}^{(0)}]^2}=\frac{\omega_0^2}{k^2(v(0)-u)^2}\ll 1, \tag{4-67}$$

由此可见，当分母 $\dot{y}^{(0)}=0$ 即满足波-粒子共振条件 $v(0)=u=\omega/k$ 时，微扰方法可应用条件(4-67)完全被破坏了[71].

在随波坐标系中 $\dot{y}^{(0)}=0$ 意味着什么呢？因为变量 $y$ 满足的是单摆方程(4-65)，这个量就相当于单摆的幅角 $q$，因此波-粒子共振条件 $\dot{y}^{(0)}=0$ 就表示幅角 $q$ 的振动频率变为 0，在前面讨论单摆问题时我们已经知道，这正是摆垂处于鞍点上的状态. 在鞍点上单摆幅角的运动频率变为 0，相应地运动时间尺度变为无穷

大，在鞍点和与之连接的分界线上，对单摆运动方程中的非线性项 $\sin q$ 作任何有限项的泰勒展开都不能近似地描写系统的运动，微扰方法在这里遇到了不可克服的困难. 因此，在远离平衡态的情况下，我们已经难以祈求不断提高小量展开的阶次来逐渐逼近真实的物理，非线性系统运动内在的奇异性，有可能使微扰方法完全失效. 非线性理论从共通的意义上为我们勾勒了动力学系统运动的图像，虽然这不能代替对实际系统的具体研究，却无疑为我们指明了问题的关键所在.

### 4.2.4 KAM 定理

在节 4.2.2 中已经看到，无穷小的不可积扰动就可以破坏可积哈密顿系统的有理环面，共振分母的出现是这些环面被破坏的原因. 进而人们会问：那些非共振环面在不可积扰动下出现了怎样的改变？它们还能保持环形拓扑吗？亦或在扰动足够强时所有环面都将被破坏？对于这些问题，科尔莫戈罗夫(Kolmogorov)，阿诺德(Arnol'd)和莫塞尔(Moser)为我们作了回答，它就是由作者名字的第一个字母命名的 KAM 定理[70,75]. 在 Arnol'd 的著作中以 Kolmogorov 命名的定理是这样写的[70](亦可参见[76])：

> "If an unperturbed system is nondegenerate, then for sufficiently small conservative hamitonian perturbations, most non-resonant invariant tori do not vanish, but are only slightly deformed, so that in the phase space of the perturbed system, too, there are invariant tori densely filled with phase curves winding around them conditionally-periodically, with a number of independent frequencies equal to the number of degree of freedom.
>
> These invariant tori form a majority in the sense that the measure of the complement of their union is small when the perturbation is small."

这就是说，如果未扰哈密顿系统是非简并的，那么当它受到充分小的保守哈密顿扰动时，大部分非共振的不变环将不会消失，但会发生小的形变. 并且在扰动很小的时候，这些不变环在测度的意义上仍在相空间中占主要地位.

根据 KAM 定理可以在一定程度上定量地判断在有理环面附近多大范围内的不变环将受到破坏，这一点不仅与受扰系统的"不可积程度"有关，也和不变环本身的"无理程度"有关，越无理的不变环越不容易被破坏. 让我们用 $g(\varepsilon)$ 作为受扰系统不可积性的一个度量，$g(\varepsilon)$ 越大表示系统越不可积，再用绕数 $w$ 给出不变环无理程度的一个度量，KAM 定理告诉我们，能够残存下来的仅出现些小形变的不变环需要满足下面的关系：

$$\left| w - \frac{m}{n} \right| > \frac{g(\varepsilon)}{n^{2.5}}. \tag{4-68}$$

这里，正的整数比 $m/n$ 已约到最简形式，因子 $g(\varepsilon)$ 对所有 $m/n$ 是相同的. 从不等式(4-68)可以看出，绕数 $w$ 越接近一个有理数、特别是越接近小分母的有理数(如 1/2，1/3)，这样的不变环就越容易遭受破坏，而越是远离整数比的不变环越能够抵抗更强的不可积扰动，它们只是发生了小的形变而不改其环形拓扑结构，这些残存下来的不变环被称为 KAM 环. 这样，随着 $g(\varepsilon)$ 的增加，从出现小分母共振的有理不变环开始，它附近的不变环逐个地被破坏. 研究表明，最能经得起扰动的、也是最后一个被破坏的，是绕数等于黄金分割 $(\sqrt{5}-1)/2$ 的不变环. 在这里，黄金分割数再次显示了它的魅力.

如果不变环还残存，尽管略有形变，轨道依然被约束在相空间中的低维环上作准周期运动；一旦不变环解体，轨道可以在更大的相空间范围内游走，不再被拓扑环所束缚. 在这种情况下，残存的 KAM 环可以起到限制那些离开解体环面后轨道的运动，使之不能漫游能量面所允许的所有相空间范围. 例如在二维相空间中残存几个一维 KAM 环(封闭曲线)时，它们将把二维相空间分隔成一些子空间，不变环解体后轨道只能分别在各个子空间中运动而不能穿过 KAM 环. 在这个意义上可以说，KAM 环对轨道在相空间中的运动起了一定的组织作用. 只有当最后一个 KAM 环被破坏以后，轨道才能游走在能量面所允许的整个相空间，且运动变得异常混沌.

## 4.2.5 Poincaré-Birkhoff 定理

有理不变环因不可积扰动解体之后，它在相图上将有怎样的定性行为？庞加莱-伯克霍夫(Poincaré-Birkhoff)定理回答了这个问题[77]. 在介绍该定理的细节之前，让我们先思考一个问题：如何分析高维相空间中轨道的运动？一个方法是，在高维相空间中作一个低维截面，让截面与轨道面横截，而不是平行或几乎平行于轨道，然后记录轨道每次通过截面时的截点. 图 4-10 是轨道与相空间中的低维截面相交的示意图，图中标记 $\gamma$ 的轨道作单周期运动，它称为极限环(limit cycle)，因此轨道总是在同一点 $p$ 通过截面 $\Sigma$，而那条通过 $q$ 点的轨道每次与截面 $\Sigma$ 的交点 $P(q)$ 都不相同，这样，利用截点的分布可以分析轨道运动流形的拓扑结构. 这个方法是法国数学家庞加莱(Poincaré)在 19 世纪末为回答瑞典国王关于“太阳系是稳定的吗?”这一悬赏问题时提出来的[78]，称为庞加莱截面(Poincaré-section)方法.

考虑流形是拓扑环的情形，它的轨道围绕一些不可约回路运动，如果在轨道每次从同一方向通过庞加莱截面时记录下截点的位置，这些截点将分布在一条封闭曲线上. 以二维环为例，它有大环和小环两个不可约回路，轨道在回路上的位置由循环坐标 $\varphi$ 和 $\theta$ 分别描写，如果在环上有无理绕数，在时间足够长后，轨道将稠密地覆盖整个环面，无论在轨道经过特定 $\varphi$ 值时纪录还是特定 $\theta$ 值时记录，这些截点

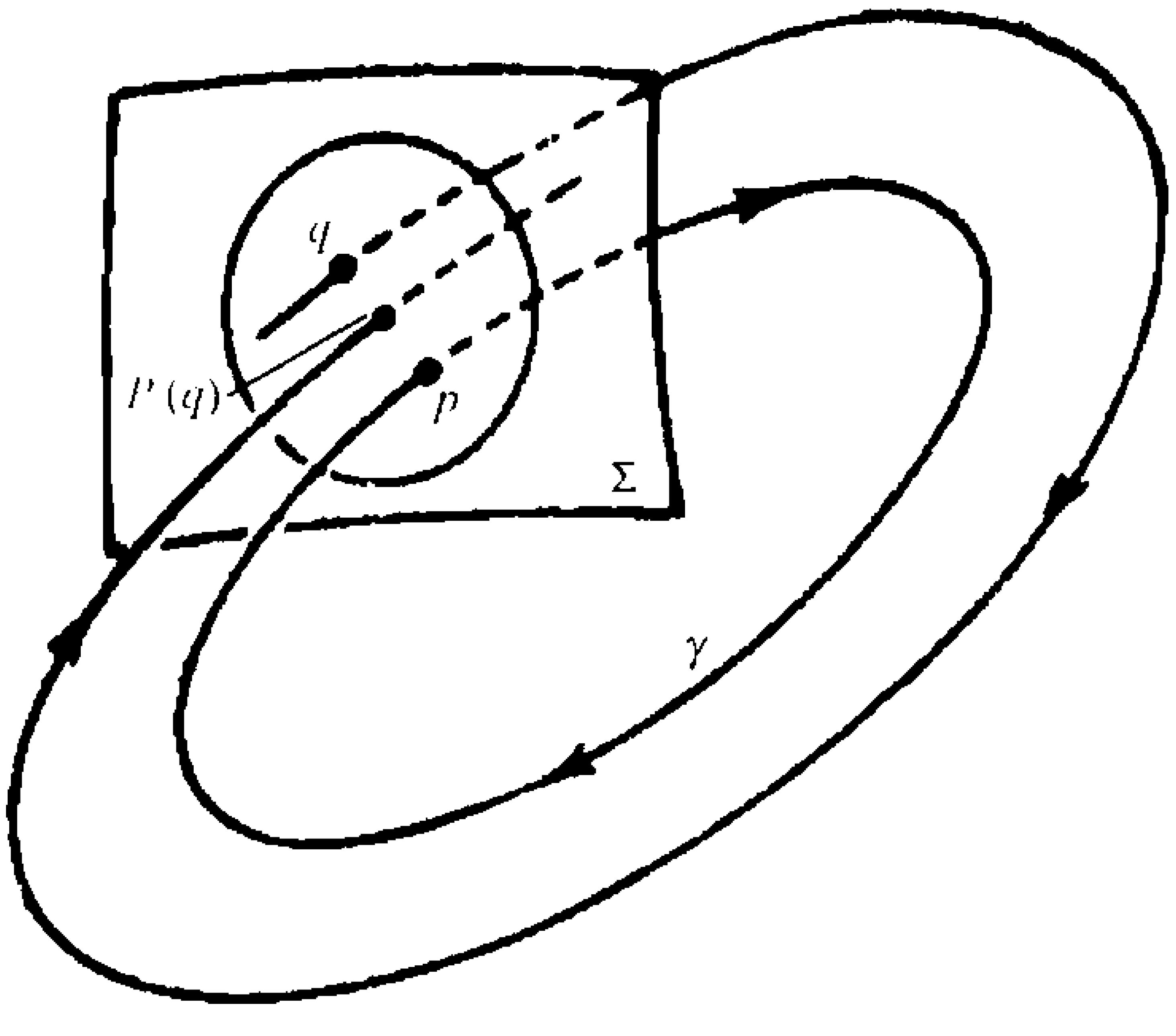


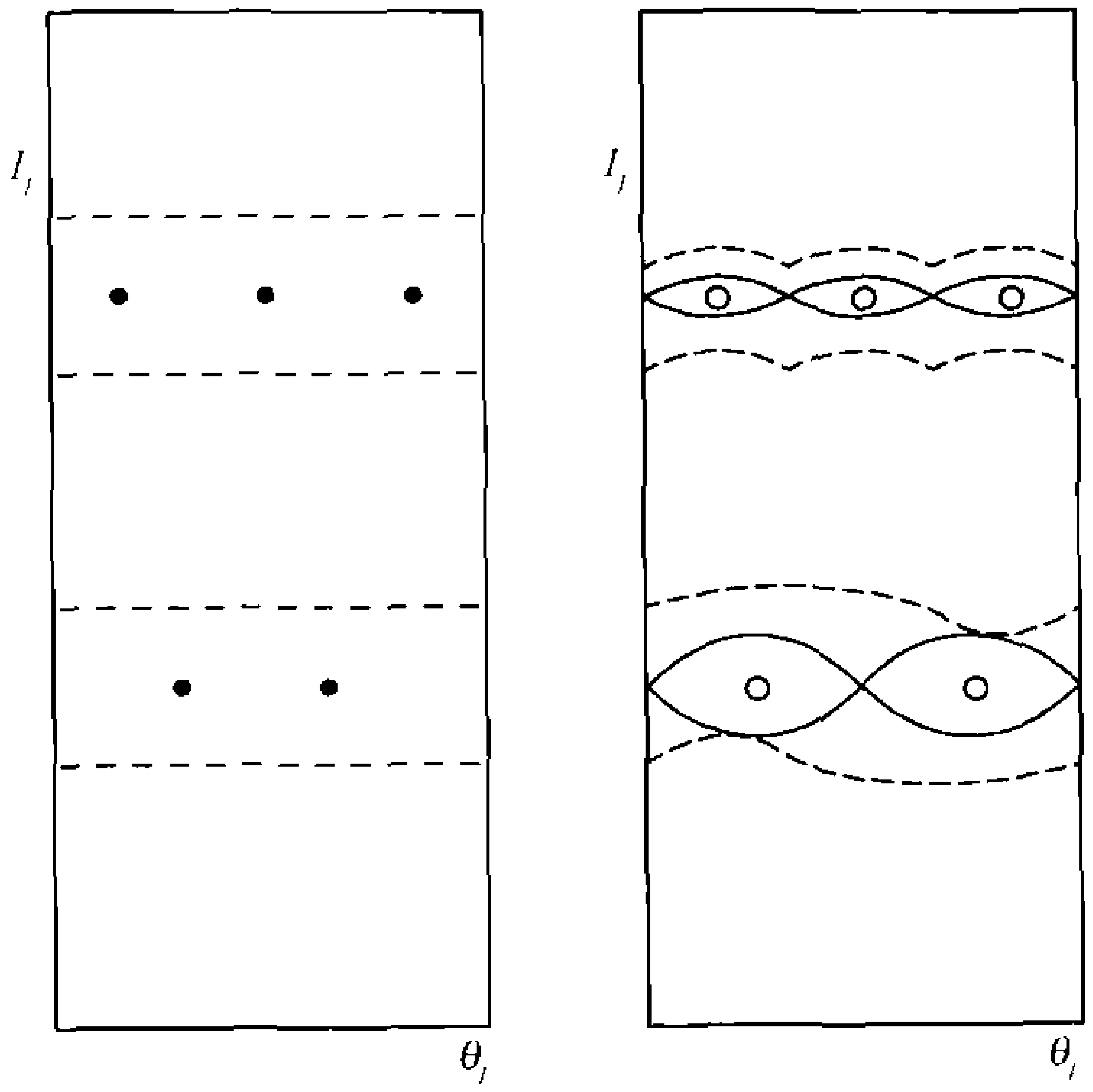

图 4-10 庞加莱截面示意图
(引自文[75])

都将组成闭合曲线,就好像沿小环或大环方向切割一个汽车轮胎得到的切口(当然这只是一个比喻,庞加莱截面上的闭合曲线是由分立截点填满的,它不是一条连续变化的曲线);如果绕数为有理数,轨道流形蜕变为缠绕在环面上的一条封闭曲线,在这种情况下,它在庞加莱截面上将只留下有限个截点.另一方面,如果环形拓扑已经被破坏,轨道失却了周期性并变得混沌,庞加莱截面上将只出现散乱分布的截点.这样,在讨论高维相空间中的有规和混沌运动时,庞加莱截面方法提供了一个十分有力的手段.波动系统有无穷多个自由度,在分析它的动力学行为时,常需要使用这一方法.

让我们用作用量-角变量($\underline{I}$,$\underline{\theta}$)坐标系来描述轨道点在庞加莱截面上的分布[76],未扰可积哈密顿系统的作用量 $\underline{I}$ 是不变量,在相空间任意第 $j$ 个自由度上,作用量 $I_j$ 在庞加莱截面上的截点都分布在平行于 $\theta_j$ 轴的一条直线上,如图 4-11(a)所示.对于给定作用量的值,如果不变环的绕数是无理的,庞加莱截点将布满整条直线,如图中虚线所示;当绕数为有理数 $m/n$ 时,庞加莱截面蜕化为有限 $m$ 或 $n$ 个截点.在图 4-11(a)上分别画出了有 2 个和 3 个庞加莱截点的有理环面.

当原来可积的哈密顿系统受到微扰变成近可积时,作用量 $I_j$ 不再是常数,根据 KAM 定理我们已经知道,那些足够无理的环面(KAM 面)还将保持,因此它们的庞加莱截面仍为由截点充满的一条曲线,而那些有理和接近有理的不变环将因共振受到破坏.Poincaré-Birkhoff 定理则进一步告诉我们,其中有理不变环的 $n$ 个截点[参考图 4-11(a)]在不可积扰动下将分裂成 $n$ 个椭圆点和 $n$ 个双曲点,它们交替地出现,如庞加莱截面图 4-11(b)所示.图中原来未扰可积系统的有理不变环的 $n$ 个截点现在变成了 $n$ 个椭圆不动点,围绕每一个椭圆点在庞加莱截面上可见一组周期轨道,包围这些周期轨道的是与双曲点连接的分界线.这样,对应原来图

4-11(a)中的有理不变环面附近，我们在图 4-11(b)上看到的是由椭圆-双曲点组成的链状结构(实线)，相邻的两组链状结构被残存的 KAM 面(虚线)分隔开. 每个双曲点都有它的稳定流形和不稳定流形，在庞加莱截面上它们形成了将两个双曲点异宿连接起来的曲线. 在双曲点的稳定和不稳定流形上的轨道相互纠缠以避免与 KAM 面相交，在这附近的轨道变得非常混沌.




(a) 可积哈密顿系统　　(b) 在不可积扰动下的哈密顿系统

图 4-11　作用量-角变量($I_j$,$\theta_j$)坐标系下的庞加莱截面示意图
(引自文[76])

因为在新生成的椭圆点周围的运动轨道也是周期的，其流形有环形拓扑，它们当然也分为无理绕数和有理绕数的两类. 与前面的情形类似，在不可积扰动下那些有理环面的 $n$ 个庞加莱截点将分裂成椭圆-双曲点链，在这一层次上生成的椭圆点周围又将出现环形拓扑结构，分为无理和有理绕数的两类，如此等等. 这样，根据 Poincaré-Birkhoff 定理给出的图像，在不可积扰动下哈密顿系统的相图应该具有无穷尽的嵌套结构. 因为被 KAM 面分隔开，椭圆点附近的周期轨道在相空间中被局域化，嵌套的层次越高，周期轨道就被局域化在越小的相空间范围. 这些高度局域化的相空间轨道区域像一个个岛屿一样被分界线附近的混沌轨道所包围，而这些混沌轨道因不能穿越 KAM 面也被限制在相空间一定范围. 图 4-12 示意地画出了位于中心的椭圆点及其周围有理环面分裂成椭圆-双曲点链的情形，若把每个新生成的椭圆点附近的相空间放大，又可以得到同样的一张相图.

对于研究托卡马克磁约束的物理工作者来说，Poincaré-Birkhoff 定理给出的图像同样并不陌生. 托卡马克理想的磁场位形是一组嵌套的磁面(参考图 3-2)，每一个磁面由一根磁力线缠绕而成，磁力线是由外加的沿大环方向的磁场 $B_\varphi$ 和等离

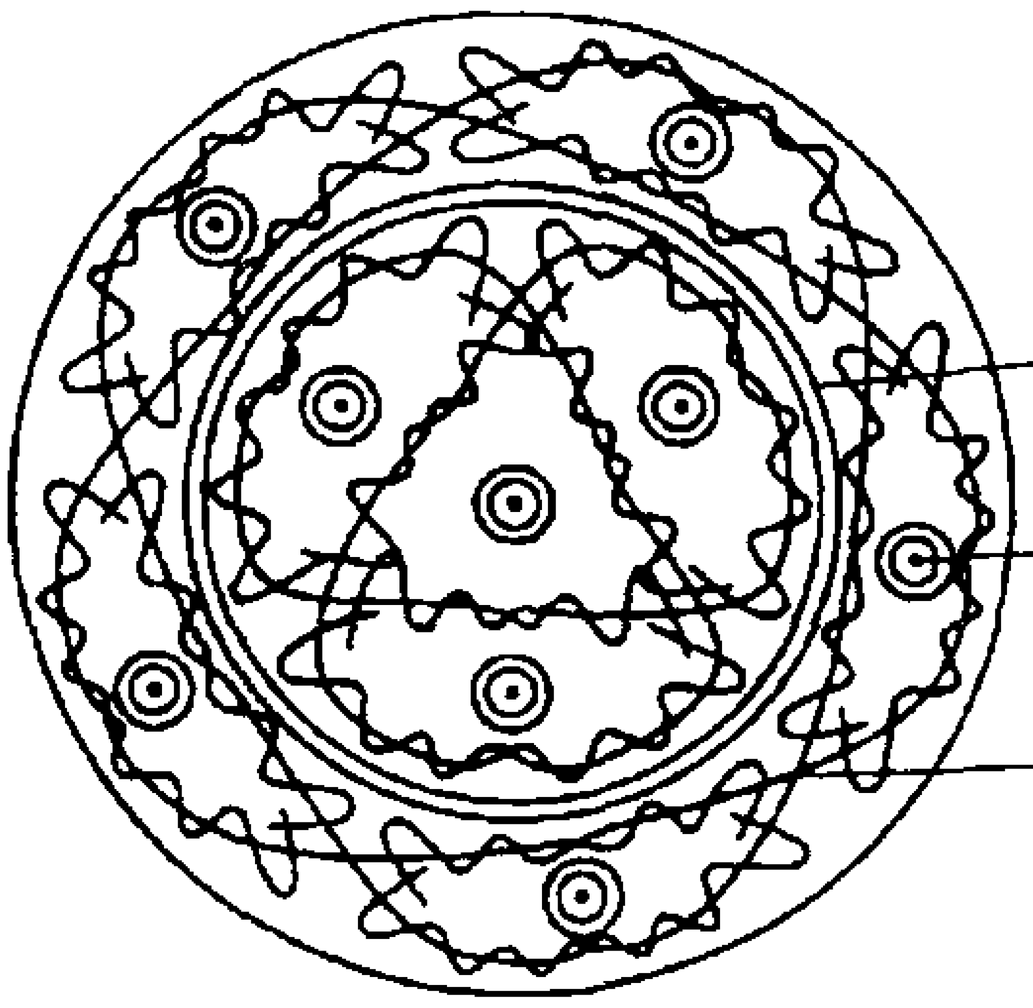



图 4-12 在不可积扰动下哈密顿系统在相空间中轨道的无穷嵌套结构示意图
（引自文[68]）

子体放电电流产生的角向磁场 $B_\theta(r)$ 合成的，由于等离子体电流参与了磁场的自组织，磁场极易被电流变化所扰动. 研究表明，在那些磁力线旋转变换 $q$ 为整数比值 $m/n$ 的有理磁面附近[参考式(4-63)]，会产生一些螺旋形的磁管簇(a family of helical magnetic tubes)，在横截面上它们看起来就像一些磁岛链(island-chain)[73]，在托卡马克实验中确实观察到了闭合通量管(flux tube)等小尺度的丝状磁场结构，原来沿小环方向的对称性受到了破坏[79].

前面已经介绍，未扰的托卡马克磁场可用一个可积哈密顿系统描写，磁场的拓扑有嵌套的二维环状. 正像 Poincaré-Birkhoff 定理指出的那样，在托卡马克磁场受到不可积扰动时，那些具有有理绕数的磁面将被破坏，原来闭合的磁力线在(小)环截面上的截点将分裂成椭圆-双曲点链，在新生成的椭圆点周围磁力线闭合. 实验观察到的磁岛和磁管簇就是这些磁力线闭合的结果，它们将带电粒子的运动局域化. 理论计算证实了这个图像，图 4-13 是在电阻磁流体不稳定(resistive MHD instability)扰动下哈密顿磁场力线方程的积分在环形磁场小环截面上的投影，图中可以看到 2 个磁岛链，分别由 2 个和 3 个磁岛组成，它们都是在有理磁面附近磁场受扰的结果，在相邻两个磁岛的边界上，磁力线的走向变得非常紊乱，带电粒子不再被约束在磁面上，它们的运动也变得混沌. 幸而根据 KAM 定理，那些磁力线旋转变换 $q$ 值足够无理的磁面还残存，它们把有理磁面附近的混沌轨道限制在空间有限区域，使得托卡马克磁场位形还能起到一定的约束等离子体的作用. 图 4-13 中其他有理磁面在扰动下也有类似结构，并且在磁岛中这样的结构是无穷嵌套的，图 4-13 与图 4-12 真有异曲同工之妙.

关于哈密顿系统运动流形的理论给统计物理的基础也提出了挑战. 统计物理建立在“各态历经”或“准各态历经”假说之上，前者是说，当力学体系从任一初态开始运动后，只要时间足够长，轨道终将历经能量曲面上所有的微观状态[67]；后来证明各态历经实际上是不能实现的，因此又提出了“准各态历经”假说，即一个力学体

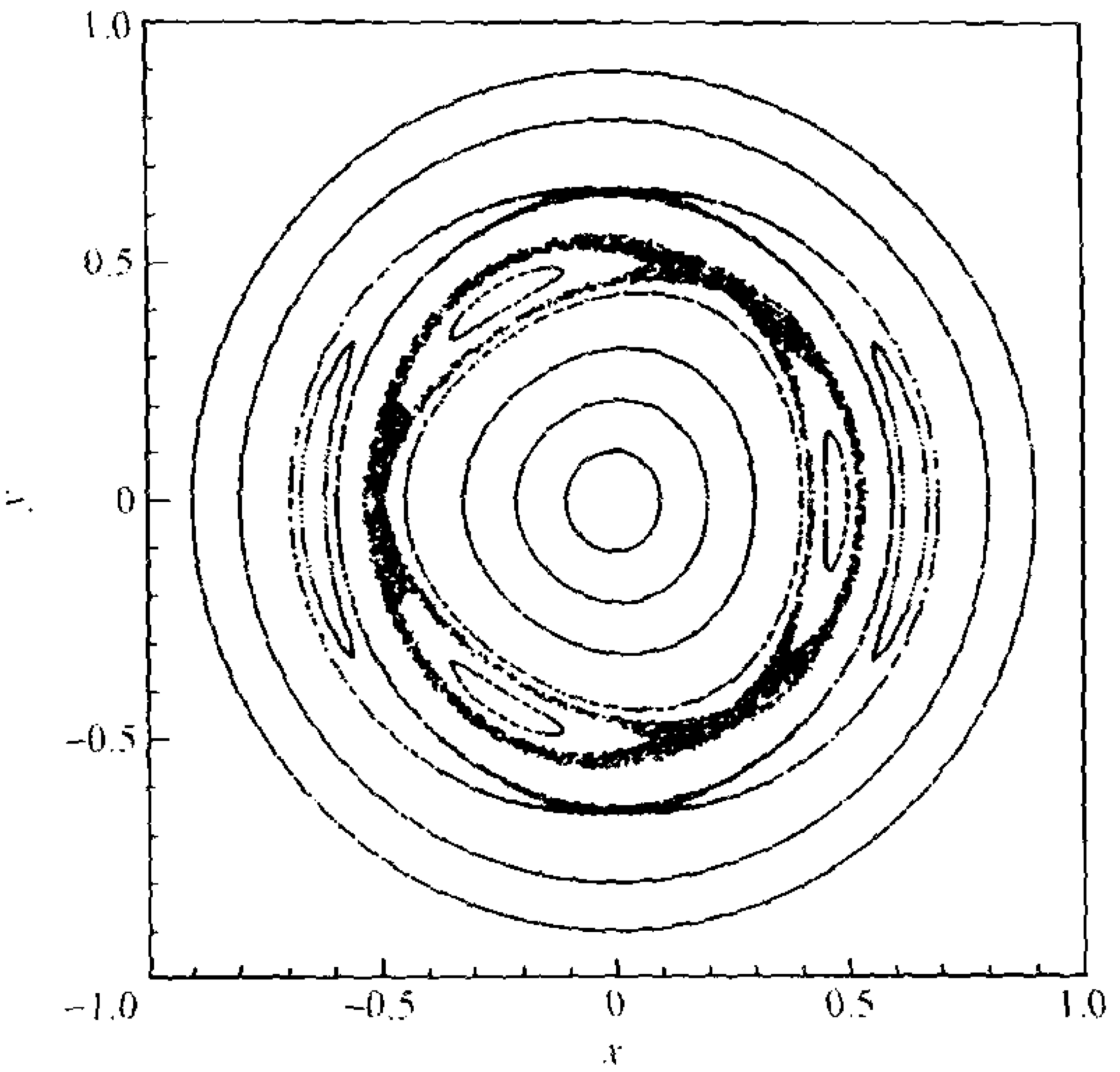



图 4-13　在电阻磁流体不稳定扰动下托卡马克磁场力线方程的
一个积分在环形磁场小环截面上的投影
(引自文[5])

系在长时间的运动中,它的代表点可以无限接近能量曲面上的任何点.在这样的假说之下,统计物理认为,在热力学平衡下系统沿任何轨道运动的长时间平均值等于其微正则系综的平均值,因此可以用系综平均来代替轨道平均.然而,从本章介绍的哈密顿系统理论我们知道,当存在能量以外的运动常数时,运动轨道将被限制在比能量面更低的相空间中,轨道并不能穷尽整个能量面.一般地,如果一个 $N$ 个自由度的哈密顿系统有 $k<N$ 个独立运动常数,轨道将被约束在 $2N-k$ 维的相空间中,在可积哈密顿的情形,有 $N$ 个运动常数,运动流形是一个 $N$ 维环面,如果环上的某些频率可约,流形的维数更低,在这些情况下轨道都不能实现在能量面上的各态历经.在引入耗散时,如下一章将讨论的,轨道一般也不可能遍历或接近遍历相空间中的所有状态,在很多情况下渐近运动的流形也是相空间中低维的吸引子.各态历经假说,原本是从经典力学导向统计力学的一个基本依据,现在却得不到动力学理论的支持.所幸的是,哈密顿系统在不可积扰动下还存在混沌运动区域,在极端情形下,如果最后一个 KAM 面已经破裂,轨道将有可能到达系统能量所允许的任何相点,在某些参数范围内耗散系统的运动轨道也混沌地历经很大的相空间范围,也许在相空间的这些区域中用系综平均来代替沿运动轨道的平均仍然是合理的.

# 第五章　时序系统非线性动力学简介(Ⅱ)——耗散系统

在实际问题中，能量一般会通过各种渠道从系统中流失，例如，在流体或等离子体中，粒子碰撞会把波的集体运动能量转变为粒子无序运动的热能，此外，与边界的摩擦、热辐射，以及在等离子体中还可能有的电磁辐射，都会消耗掉集体运动的能量，对于波动系统来说这些能量就都被耗散掉了，波能不再守恒. 当出现耗散时，运动轨道将从相空间中的高能量面向低能量面弛豫，如果没有能量从外界输入，系统的初始能量终将被耗散殆尽. 因此，在建立非线性动力学模型时，如果包括了描写能量流失的耗散项，总要加上驱动项，通常是时间的周期力，将能量从外界不断泵入系统. 驱动作用与耗散作用相互竞争，允许轨道在相空间不同能量面之间来回穿越，轨道最终有可能弛豫到一个常能面上，也有可能在很大的能量范围内不断调整，始终找不到平衡状态. 在自然界中这样的驱动-耗散系统比比皆是，例如，海洋中的波动因与海床的摩擦其能量不断消耗，靠来自月球的潮汐力的周期驱动，才能日复一日年复一年地潮涨潮落，生生不息.

对于耗散系统，非线性动力学关心的核心问题是，系统的平衡态为什么会失去稳定性，在远离平衡态时它们的运动又遵循怎样的规律，特别是，一个决定性的系统，可能沿着怎样的动力学路径变得混沌. 与前一章保守的哈密顿系统一样，研究耗散系统的动力学有大量报告和专著[75,16,2]，在区区一个章节中想要把这些问题说清楚几乎是不可能的，只能就讨论非线性波动的需要，择一漏万地介绍一些有关的概念和结论，为读者提供一些线索. 对于每一个专题的深入了解，还得企求原著. 为本书讨论波动问题的需要，我们将着重关注复变量系统中的非线性动力学现象.

## §5.1　耗散系统的相空间

### 5.1.1　相体积、吸引子和吸引盆

保守哈密顿系统的相体积 $V$ 是守恒的，在有耗散时相体积不再守恒，它们随时间不断收缩. 在相体积收缩的意义上，我们说耗散系统的运动轨道是吸引的，在 $t\to\infty$ 时轨道点的集合也就是运动轨道的流形被称为吸引子. 当然，相体积收缩到零并不等同于收缩到相空间中的一个孤立点(虽说后一种情况也是存在的)，它只表明运动轨道的吸引子有零体积，流形的拓扑结构却可以在相空间中伸展，它有无限薄的“壁”，不妨用蜂窝或海绵来比喻，吸引子上的轨道依然可以在很大相空间范围内游走.

在相同的外部参数下，相空间中可能存在一个或多个吸引子，如果属于后一种情况，轨道最终被吸引到哪个吸引子取决于轨道从相空间中哪一点出发. 对于指定的吸引子，相空间中所有那些可以导向这个吸引子的轨道初始点的集合称做这个吸引子的吸引盆(sink). 对低维动力学系统的研究表明，两个吸引子的吸引盆之间的边界可以是光滑的，也可以具有分维(fractal)结构，形象地说，就是无论所观察的相空间尺度多么小，两个吸引盆在边界上都是你中有我，我中有你.

### 5.1.2　不动点

在一定参数下如果系统存在平衡态或称定态(steady state)，那么当处在这个状态上并且不受干扰时系统所有的变量都是时间的常数，这个状态对应的相空间点就称为不动点. 在给定参数下一个系统在相空间中可能有多个不动点共存，在扰动下这些不动点可能是稳定的，也可能不稳定，只有稳定的不动点才是吸引的.

若系统的运动可由一个映射方程来描写

$$\underline{u}_{n+1} = \underline{F}(\underline{u}_n, \mu_1, \cdots, \mu_M), \tag{5-1}$$

这里矢量 $\underline{u}=(u_1, u_2, \cdots, u_N)^{\mathrm{T}}$ 的值决定相空间中的一个状态，下标 $n$ 表示第 $n$ 次迭代得到的值，$\underline{F}$ 是有 $N$ 个分量的非线性代数算符，$\underline{\mu}=(\mu_1, \cdots, \mu_M)$表示 $M$ 个控制参数，那么如果相点 $\underline{u}_0$ 映射到它自身，即满足

$$\underline{u}_0 = \underline{F}(\underline{u}_0, \mu_1, \cdots, \mu_M), \tag{5-2}$$

则 $\underline{u}_0$ 就是系统的一个不动点. 在给定控制参数$\underline{\mu}$ 时，一个非线性系统一般可以有一个或一个以上的不动点，写做 $\underline{u}_0(\underline{\mu})$.

若系统的运动由常微分方程描写

$$\frac{\mathrm{d}\,\underline{u}}{\mathrm{d}t} = \underline{F}(\underline{u}, \mu_1, \cdots, \mu_M), \tag{5-3}$$

$\underline{F}$ 和 $\underline{\mu}$ 的意义同上，那么不动点 $\underline{u}_0(\underline{\mu})$是在给定参数 $\underline{\mu}$ 时定态方程

$$\frac{\mathrm{d}\,\underline{u}_0}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{5-4}$$

的解，$\underline{u}_0$ 的所有分量都是时间的常数.

不动点是系统允许存在的平衡态或定态，但它不一定是物理上实际可观测的态. 只有那些稳定的不动点是容易观测到的常态，如单摆相图 4-3 中的椭圆点. 不稳定的不动点则通常观察不到，好比将一个质量均匀的光滑圆球顶在竖直向上的针尖上，我们清楚地知道，这样一个平衡态的确是存在的，不过它如此不稳定，以至于几乎不可能被实现. 还有鞍点，我们记得，它的稳定性质依赖于扰动力施加的方向，在实际情况下扰动力不可能总是严格地沿着鞍点稳定轨道的方向，如图 4-4 中位于马鞍中心的小球，扰动力稍微偏离鞍点的稳定方向，它就会沿鞍点的不稳定方向滚落，因此鞍点也属于不稳定的不动点，通常是观察不到的. 这样的鞍型势阱在很多物理系统中都存

在，包括非线性波动系统. 在控制参数变化时一个耗散系统的不动点有可能从稳定变得不稳定，非线性动力学理论把目光更多地聚焦在不动点是否稳定以及出现什么样的不稳定性的问题上.

根据不动点的稳定性质，它们被分成了几类，有(a) 中心点(center)，(b) 稳定结点(stable node)，(c) 不稳定结点(unstable node)，(d) 鞍点(saddle point)，(e) 稳定焦点(stable focus)，(f) 不稳定焦点(unstable focus)[75]，分别见示意图5-1(a)～(f). 下一节讨论不动点的稳定性时我们将结合具体例子介绍这些不动点的动力学特点. 需要强调的是，不稳定不动点(包括鞍点)尽管在实际上几乎不可能被真正观察到，它们却在物理世界中起着极为重要的作用，可以说，没有不稳定的不动点，就不会有我们这个充满活力的、气象万千的世界. 在了解了不动点的稳定性问题和相关课题后，相信读者会认同这个观点.

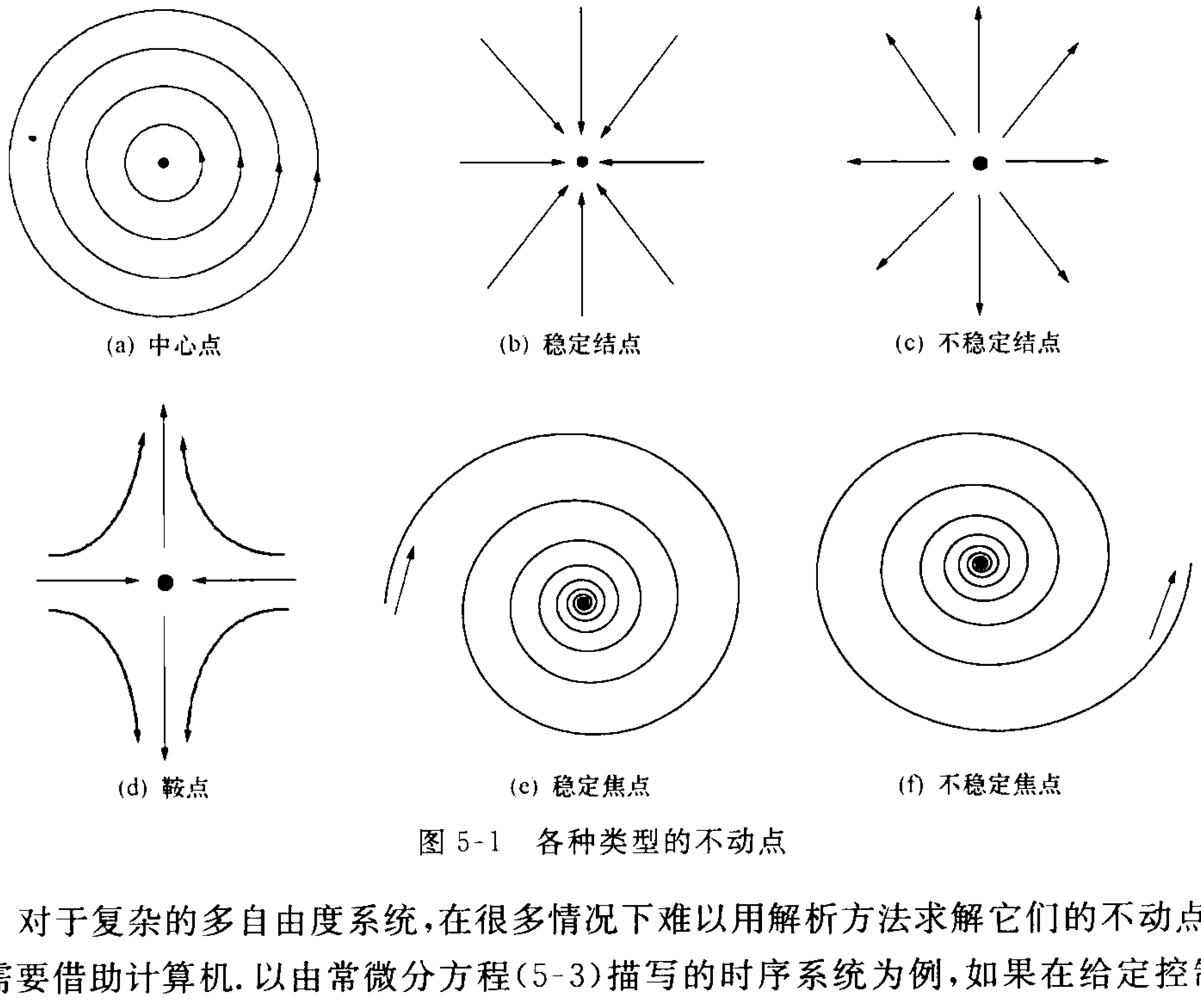



图 5-1　各种类型的不动点

对于复杂的多自由度系统，在很多情况下难以用解析方法求解它们的不动点，常常需要借助计算机. 以由常微分方程(5-3)描写的时序系统为例，如果在给定控制参数 $\underline{\mu}$ 下由相应定态方程(5-4)解得的定态解 $\underline{u}_0$ 是稳定的，这个定态可以成为方程(5-3)在 $t\to\infty$时的渐近解，只要从恰当的初始条件出发(初始轨道点位于该不动点的吸引盆内)，追踪运动轨道足够长的时间，就可以无限地接近所求的定态 $\underline{u}_0=\underline{u}(\underline{\mu},t)|_{t\to\infty}$. 不过，采用计算机求解映射(5-1)或演化方程(5-3)，只能找到那些稳定的不动点，却不能找到那些不稳定的不动点，由于计算机舍入误差的摄动，

轨道不可能无限趋近一个不稳定的不动点.

为寻找系统所有的不动点,包括稳定和不稳定的,需要求解定态方程,例如对于系统(5-3),它是方程(5-4),即

$$\underline{F}(\underline{u}_0, \mu_1, \cdots, \mu_M) = 0, \tag{5-5}$$

这是一组 $N$ 个相互耦合的非线性代数方程,可应用牛顿下降法迭代求解,为此需要选取待解函数 $\underline{u}_0$ 的 $N$ 个分量的初始猜值. 如果在给定参数 $\underline{\mu}$ 下系统(5-3)只有一个定态,它的吸引盆是整个相空间,无论取什么初始猜值,总能迭代收敛找到 $\underline{u}_0$;不过在很多情况下,系统可能存在多于一个定态,此时求解定态方程(5-5)就好比在一个多山谷的地域中寻找某个特定的谷底,只有在开始时把小球放在合适的范围内,它才能滚到期望的谷底. 对于 $N$ 很大的多自由度系统,有时这并非易事.

## §5.2 不动点的稳定性分析

不动点可能变得不稳定,这真是一件幸事,如若不然,无穷小的耗散终将导致所有物理系统归于寂静,那么我们还能有如此千变万化的美丽世界、还会有生命吗? 早在一个多世纪之前,稳定性问题已进入数学家和物理学家的视野,1873 年 Maxwell 就强调过不稳定性问题的重要性,他说:

> "There are other classes of phenomena which are more complicated, and in which cases of instability may occur, the number of such cases increasing, in an extremely rapid manner, as the number of variables increases...
>
> "If, therefore, these cultivators of physical science from whom the intelligent public deduce their conception of the physics... are led in persuit of arcana of science to the study of the singularities of things, the promotion of natural knowledge may tend to remove that prejudice in favor of determination which seems to arise from assuming that the physical science of the future is mere magnified image of that of the past."[68]

在这段文字中 Maxwell 特别强调了科学家应该探索事物的奇异性,而不应有决定论的偏见. 当然今天我们已经知道,奇异性和不稳定性完全可以存在于决定性系统之中. 非线性动力学理论探索决定性系统复杂运动的规律,分析不动点的稳定性是其首要步骤. 事实上,在一些学科领域,如近几十年发展起来的等离子体物理,不稳定性早已是研究的焦点之一,线性稳定性分析已发展得相当完善,非线性研究也日臻活跃[16,5,59]. 非线性动力学研究不囿于特定学科,已经有大量研究结果说明,它所揭示出的一些运动规律,有着跨学科的普遍意义.

假设时序系统由方程(5-3)描写,在给定参数 $\underline{\mu}$ 下已解出它的一个不动点

$\underline{u}_0=(u_{1,0},u_{2,0},\cdots,u_{N,0})^{\mathrm{T}}$,满足定态方程组(5-5). 不动点$\underline{u}_0$ 稳定与否要看它对小扰动的响应,令 $\underline{u}(t)=\underline{u}_0+\underline{\delta u}(t)$,这里 $\underline{\delta u}=(\delta u_1,\delta u_2,\cdots,\delta u_N)^{\mathrm{T}}$,分量 $\delta u_k$ 表示在相空间的第 $k$ 个维度上从不动点 $\underline{u}_0$ 的偏离,代入方程(5-3),保留到 $\underline{\delta u}$ 的一级量,得到关于 $\underline{\delta u}$ 的线性化方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underline{\delta u}=\underline{\underline{H}}(\underline{u}_0)\cdot\underline{\delta u}, \tag{5-6}$$

这里 $\underline{\underline{H}}$ 是 $N\times N$ 的矩阵,用双下划线表示,它的矩阵元

$$H_{ij}=\partial F_i(\underline{u}_0)/\partial u_j\quad(i,j=1,2,\cdots,N) \tag{5-7}$$

依赖于定态 $\underline{u}_0(\mu_1,\cdots,\mu_M)$在相空间中的位置.

假设微扰随时间的演化有形式 $\underline{\delta u}(0)\mathrm{e}^{\lambda t}$,这里 $\underline{\delta u}(0)$是 $t=0$ 时刻的扰动,从线性齐次方程组(5-6)有非零解的条件得到,

$$|\underline{\underline{H}}(\underline{u}_0)-\lambda\underline{\underline{I}}|=0, \tag{5-8}$$

式中 $\underline{\underline{I}}$ 是 $N\times N$ 的单位矩阵. 对于非线性系统,定态方程(5-5)是一个耦合代数方程组,矩阵 $\underline{\underline{H}}(\underline{u}_0)$一般有非零的非对角矩阵元素,只有在定态方程(5-5)的各方程解耦时,$\underline{\underline{H}}(\underline{u}_0)$才蜕化为对角矩阵.

矩阵 $\underline{\underline{H}}(\underline{u}_0)$的 $N$ 个本征值分别描写在相空间的 $N$ 个特征方向上对不动点 $\underline{u}_0$ 的扰动 $\underline{\delta u}(t)$的本征行为. 非线性动力学理论告诉我们,如果在这 $N$ 个本征值中至少有一个实本征值从负值变为正值,或者一个复本征值的实部从负值变为正值,那么扰动$\underline{\delta u}(t)$的幅度将随时间指数增长,不动点 $\underline{u}_0$ 就是不稳定的. 不动点从稳定变得不稳定,用数学语言说就是这个不动点出现了分岔(bifurcation).

下面讨论两类重要的分岔现象: 鞍结点分岔(saddle-node bifurcation)和霍普夫(Hopf)分岔,在许多关于非线性动力学的专著中都可以找到这些分岔现象的实例,这里为讨论非线性波动的需要,我们在观察这两类不稳定性时都允许本征值取复数.

### 5.2.1 鞍结点分岔

显示鞍结点分岔的一个典型模型是[75]

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-x^2+\mu, \tag{5-9}$$

让我们讨论在控制参数 $\mu$ 改变时,它的不动点对扰动的响应.

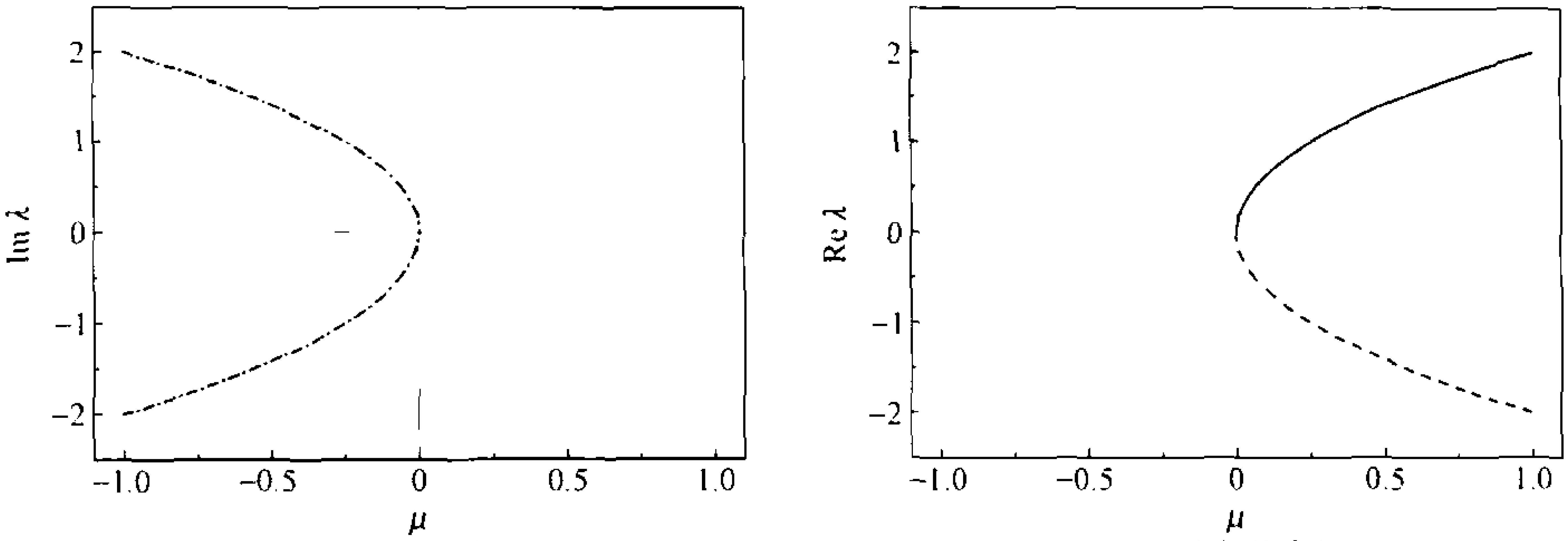
方程(5-9)有两个不动点 $x_0=\pm\sqrt{\mu}$,对 $x_0$ 作小扰动,$x(t)=x_0+\delta x(t)$,代入式(5-9),得到 $\delta x$ 满足的线性化方程是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta x=-2x_0\delta x, \tag{5-10}$$

假设 $\delta x$ 的时间行为遵循形式 $\delta x(t)=\delta x(0)\mathrm{e}^{\lambda t}$,对应两个不动点分别求得本征值

$\lambda = -2x_0 = \mp 2\sqrt{\mu}$.

图 5-2 给出本征值 $\lambda$ 随控制参数 $\mu$ 的变化,(a)是虚部,(b)是实部.




(a) 本征值虚部　　(b) 本征值实部

图 5-2　对方程(5-9)的不动点 $x_0 = \pm\sqrt{\mu}$扰动的复本征值随控制参数 $\mu$ 的变化

由图可见,$\mu<0$ 时,对应两个不动点 $x_0 = \pm\sqrt{\mu}$的本征值是一对共轭的纯虚数

$$\lambda_{\mu<0} = \mp \mathrm{i}2\sqrt{|\mu|}, \tag{5-11}$$

它们是扰动 $\delta x(t)$的本征振荡频率. 当 $\mu\to -0$ 时,式(5-11)中正负两个频率分支的绝对值迅速减小,直至在 $\mu=0$ 时汇合到 $\lambda=0$,如图 5-2(a)所示. 恰在 $\mu=+0$ 时,本征值变为一对实数

$$\lambda_{\mu>0} = \mp 2\sqrt{\mu}, \tag{5-12}$$

如图 5-2(b)所示.

因此,在 $\mu<0$ 时对不动点$\sqrt{\mu}$和$-\sqrt{\mu}$扰动的本征运动都是周期振荡,$\delta x(t) = \delta x(0)\mathrm{e}^{\mp \mathrm{i}2\sqrt{|\mu|}\cdot t}$,轨道在相图上以频率 $2\sqrt{|\mu|}$旋转,方向相反,幅度由初始扰动 $\delta x(0)$决定,不随时间改变. 因此这两个不动点都是中心点,见示意图 5-1(a).

在 $\mu>0$ 时本征频率变为 0,扰动不再出现本征振荡. 在两个不动点中,$x_0 = \sqrt{\mu}$是稳定的,对应本征值$-2\sqrt{\mu}$[图 5-2(b)中虚线],任何初始扰动的幅度随时间都将单调地指数衰减,$\delta x(t) = \delta x(0)\mathrm{e}^{-2\sqrt{\mu}\cdot t}$,轨道最终落在该不动点上;而另一不动点 $x_0 = -\sqrt{\mu}$是不稳定的,对应本征值$+2\sqrt{\mu}$[图 5-2(b)中实线],扰动单调地随时间指数增长,$\delta x(t) = \delta x(0)\mathrm{e}^{+2\sqrt{\mu}\cdot t}$. 故 $\mu>0$ 时的这两个不动点$\sqrt{\mu}$和$-\sqrt{\mu}$分别属于稳定结点和不稳定结点,后者也称做排斥子(repeller),见示意图 5-1(b)和(c).

临界参数 $\mu=0$ 是系统(5-9)动力学行为的一个分岔点,在 $\mu<0$ 时不动点是两个中心点,在 $\mu>0$ 时这两个中心点突然转变为一个稳定结点和一个不稳定结点. 分岔点 $\mu=0$ 是一个鞍点,图 5-1(d)是鞍点的示意图,就像在马鞍中的小球那样,对其扰动的稳定和不稳定轨道各有两条,依赖于初始扰动的方向[这里就是 $\delta x(0)$的符号].

因为当 $\mu$ 从 0 改变到 +0 时鞍点转变为一对(稳定和不稳定)结点,系统(5-9)的这个分岔现象被称为鞍结点分岔. 在出现鞍结点分岔的同时,原来在 $\mu<0$ 处不动点对扰动响应的本征频率 $\omega=\mp 2\sqrt{|\mu|}$完全消失了,运动的特征时间尺度(可定义为 $2\pi/|\omega|$)变成无穷大,本征频率的消失正是鞍点的不稳定和稳定轨道随时间单调变化而不出现振荡的原因. 我们看到,在分岔点上,扰动复振子的幅角运动状态与振幅运动状态同时出现了突变.

当 $\mu$ 从 −0 趋近分岔点 0 时,扰动的本征振荡频率 $\omega=\mp 2\sqrt{\mu}$的绝对值迅速降低,这类低频模式在物理上称为软模(soft mode). 本例给我们的启示是:模式随参数迅速软化,可能预示鞍结点不稳定性的发生. 在后面非线性波的例子中,我们将看到鞍结点不稳定性对波动现象起着怎样重要的作用.

## 5.2.2 Hopf 分岔

鞍结点分岔可以发生在单自由度系统中,而本小节讨论的 Hopf 分岔只有在二个以上自由度的系统中才可能发生. 从下面的分析我们将看到,在 Hopf 分岔发生前后系统都存在有限大小的特征频率,只是在分岔前以这个频率的运动被阻尼掉了,在分岔后它才显现在系统的渐近运动中. 在这个意义上我们说,伴随 Hopf 分岔将有一个新频率出现在系统中.

让我们利用下面的模型讨论 Hopf 分岔现象[76]

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\omega y+x[\mu-(x^2+y^2)], \tag{5-13a}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\omega x+y[\mu-(x^2+y^2)], \tag{5-13b}$$

定义 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$,它们是复振子矢量 $r(t)\mathrm{e}^{i\theta(t)}=x(t)+\mathrm{i}y(t)$在相空间中两个相互正交方向上的投影. 在极坐标下方程(5-13)化为

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=r(\mu-r^2), \tag{5-14a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\omega. \tag{5-14b}$$

这样我们看到,方程(5-13a)和(5-13b)中含 $\omega$ 的项分别描写的是复振子矢量的旋转运动在 $x$ 轴方向和 $y$ 轴方向上的投影,含 $\mu$ 的项决定了振幅 $r(t)$的线性增长率,此外振幅还随时间非线性变化.

从振幅的定态方程 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t=0$ 可得到它的两个不动点解,$r_0=0$ 和 $r_0=\sqrt{\mu}$. 因为要求振幅为实数,在 $\mu<0$ 时只有 $r_0=0$ 在物理上有意义,在 $\mu>0$ 时这两个不动点都是系统允许的解. 对应不动点 $r_0=0$,振子虽有一定频率 $\omega$,但振幅为 0;对应不动点 $r_0=\sqrt{\mu}$,振子以频率 $\omega$ 和有限大小振幅$\sqrt{\mu}$作旋转运动.

方程(5-14a)的不动点 $r_0=0$ 也是振子投影方程(5-13)的不动点$(x_0,y_0)=(0,0)$，为讨论它的稳定性质，对$(x_0,y_0)$作微扰 $\delta x(t)=\delta x(0)e^{\lambda t}$，$\delta y(t)=\delta y(0)e^{\lambda t}$，从方程(5-13)得到扰动的本征方程为：

$$\begin{vmatrix}\mu-\lambda & -\omega\\ \omega & \mu-\lambda\end{vmatrix}=0,\tag{5-15}$$

解得

$$\lambda=\mu\pm i\omega,\tag{5-16}$$

我们注意到，扰动振子位相的旋转频率 $\omega$ 出现在矩阵的副对角线中，振幅的线性增长率 $\mu$ 出现在主对角线中. 振子振幅随时间的演化为 $r(t)=\delta r(t)=\delta r(0)e^{\mu t\pm i\omega t}$，在 $\mu<0$ 时振幅 $r(t)$指数衰减，频率 $\omega$ 不会在渐近解中表现出来，$\mu>0$ 时 $r(t)$的包络指数增长，频率 $\omega$ 显现在渐近解中. 这样，当参数 $\mu$ 从 $-0$ 跨过临界点时，不动点$(x_0,y_0)$失稳，一个新的频率出现，这就是不动点的 Hopf 分岔，见示意图 5-3.

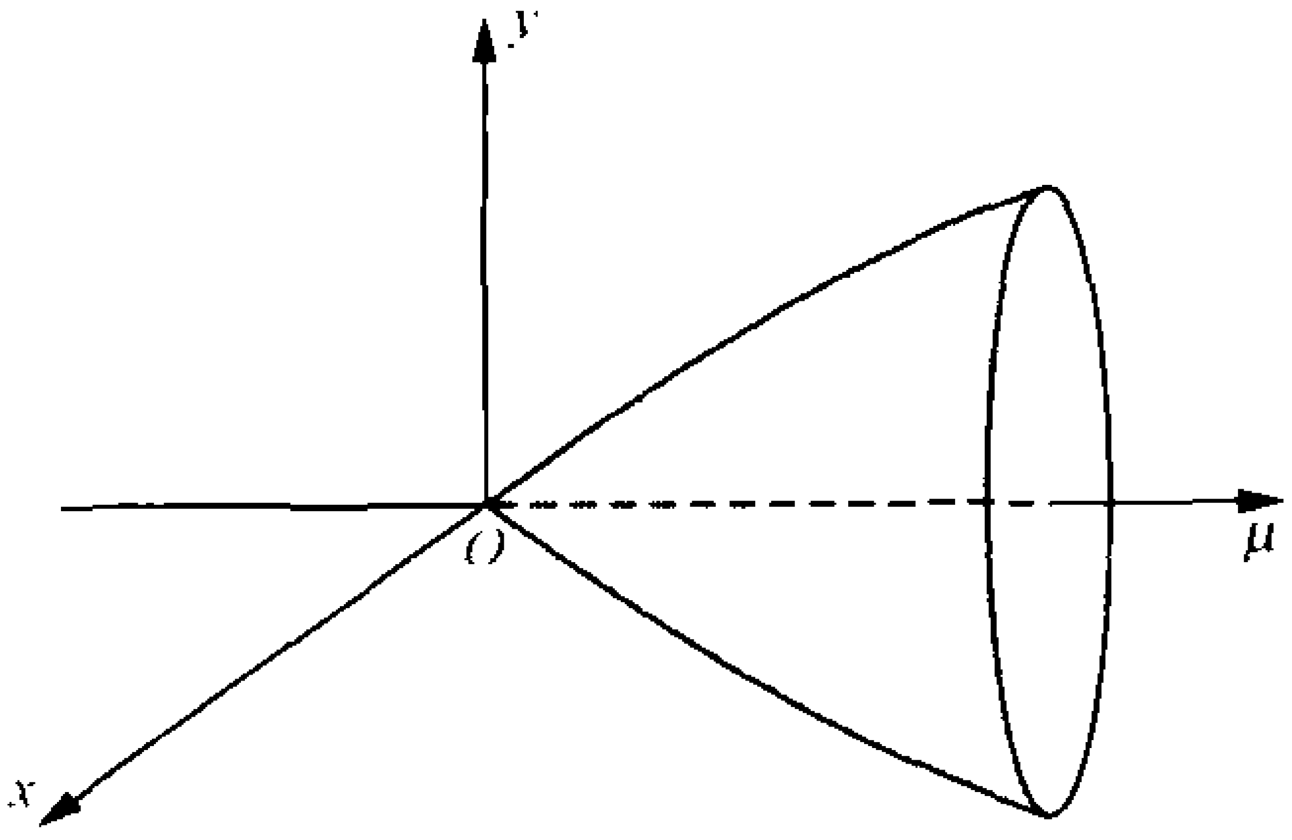



图 5-3　Hopf 分岔示意图

在 $\mu<0$ 时不动点$(x_0,y_0)$是一个稳定焦点，在 $\mu>0$ 时变成一个不稳定的焦点，参考图 5-1(e)，(f).

## 5.2.3　非平凡不动点

现在讨论振子振幅方程(5-14a)的另一个不动点 $r_0=\sqrt{\mu}$，我们知道，方程(5-14)描写一个以频率 $\omega$ 旋转的复振子运动. 因此，对应前面解得 $r_0=0$ 这个复振子虽然也有旋转频率，但振幅为 0，故而 $r_0=0$ 是一个平凡不动点，相对而言，$\mu>0$ 时振幅的不动点 $r_0=\sqrt{\mu}$是非平凡的，它的值为有限大小.

注意振幅方程(5-14a)的非平凡不动点 $r_0=\sqrt{\mu}$并不满足系统(5-13)的定态方程 $dx_0/dt=0$ 和 $dy_0/dt=0$，为使系统(5-13)和(5-14)在这一点上统一，可作变换

$$\theta(t)=\omega t+\alpha(t),\tag{5-17}$$

这里 $\alpha$ 是复振子在以频率 $\omega$ 旋转的坐标系中的位相. 变换(5-17)不改变振幅方程(5-14a)的形式，关于 $\theta$ 的方程(5-14b)则变为

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{5-18}$$

因此，在这个旋转坐标系中位相 $\alpha$ 是时间的常数.

令 $\tilde{x}(t) = r\cos\alpha, \tilde{y} = r\sin\alpha$，它们是在旋转坐标系中复振子 $r(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(t)} = \tilde{x} + \mathrm{i}\tilde{y}$ 的投影坐标，服从方程

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{x}}{\mathrm{d}t} = \tilde{x}[\mu - (\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)], \tag{5-19a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\mathrm{d}t} = \tilde{y}[\mu - (\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)]. \tag{5-19b}$$

经过这个变换，方程(5-13)中振子以频率 $\omega$ 旋转的部分在方程(5-19)中不见了，同时，振幅方程(5-14a)的非平凡不动点 $r_0 = \sqrt{\mu}$ 也成为方程(5-19)的定态，($\tilde{x}_0 = r_0\cos\alpha, \tilde{y}_0 = r_0\sin\alpha$)，这里 $\alpha$ 由初始条件决定.

类似前面的作法，对系统(5-19)的不动点($\tilde{x}_0, \tilde{y}_0$)作微扰，$\tilde{x} = \tilde{x}_0 + \delta\tilde{x}, \tilde{y} = \tilde{y}_0 + \delta\tilde{y}$，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\tilde{x} = \mu\delta\tilde{x} - (3\tilde{x}_0^2 + \tilde{y}_0^2)\delta\tilde{x} - 2\tilde{x}_0\tilde{y}_0\delta\tilde{y}, \tag{5-20a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\tilde{y} = \mu\delta\tilde{y} - (\tilde{x}_0^2 + 3\tilde{y}_0^2)\delta\tilde{y} - 2\tilde{x}_0\tilde{y}_0\delta\tilde{x}, \tag{5-20b}$$

由此找到扰动演化的本征方程为

$$\begin{vmatrix} \mu - (3\tilde{x}_0^2 + \tilde{y}_0^2) - \lambda & -2\tilde{x}_0\tilde{y}_0 \\ -2\tilde{x}_0\tilde{y}_0 & \mu - (\tilde{x}_0^2 + 3\tilde{y}_0^2) - \lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{5-21}$$

我们看到，方程(5-21)中的矩阵元不仅依赖于控制参数 $\mu$ 本身，还依赖于不动点($\tilde{x}_0, \tilde{y}_0$)在相空间中的位置，因此矩阵的本征值 $\lambda$ 也将随不动点的位置改变. 对于本例的情形，($\tilde{x}_0, \tilde{y}_0$)位于以原点为中心，$r_0$ 为半径的一个圆上，利用 $\tilde{x}_0^2 + \tilde{y}_0^2 = r_0^2$ 容易说明，无论($\tilde{x}_0, \tilde{y}_0$)在圆上的哪一点，本征值 $\lambda$ 的解都是 0 和 $-2\mu$，不同于在旋转坐标系中对平凡不动点(0,0)扰动的本征值 $\lambda = \mu$. 回到旋转前的坐标系，非平凡不动点($\tilde{x}_0, \tilde{y}_0$)对应一个以不变振幅 $\sqrt{\mu}$ 和频率 $\omega$ 的旋转运动，它是系统的吸引子.

一般而言，对非平凡不动点扰动时，扰动的本征值实部和虚部都可能随不动点的位置改变. 如果一个多自由度系统也存在这样的非平凡不动点，对其扰动的本征行为，即扰动振子的本征频率和振幅的线性增长率，也将可能随不动点的位置改变. 假如每个振子与一定的空间尺度(波数)对应，那么用波动物理的语言来说，振子本征行为的改变就是系统色散行为的改变. 在第二章中我们曾经探讨过什么是非线性色散，在这里已经依稀看出，当扰动一个平凡的不动点时，只能找到线性色散关系，而扰动一个非平凡不动点，扰动振子的本征行为将偏离线性色散.

### 5.2.4　其他分岔现象

从前面的分析已经知道,鞍结点分岔和 Hopf 分岔分别发生在复本征值的虚部趋于零和实部由负方向跨过零点时.波动模式一般是复振子,涉及振幅和位相的运动,因此常出现这两类分岔过程.除与复本征值有关的临界现象外,非线性系统的分岔还出现在实本征值发生临界改变时,这里简单介绍其中的两种[75]:

**1. 叉式分岔(pitchfork bifurcation)**

可用下面的简单模型说明

$$\dot{x} = \mu x - x^3, \tag{5-22}$$

对于 $x$ 的实数解,$\mu=0$ 是一个临界参数点,$\mu<0$ 时只有一个稳定结点 $x_0=0$,$\mu>0$ 时系统允许两个稳定结点 $x_0=\sqrt{\mu}$和$-\sqrt{\mu}$,如图 5-4 所示.注意到方程(5-22)与节 5.2.2 中复振子的振幅方程(5-14a)有同样的形式,叉式分岔也可以看做是 Hopf 分岔在 $\omega\to 0$ 时的极限情形.

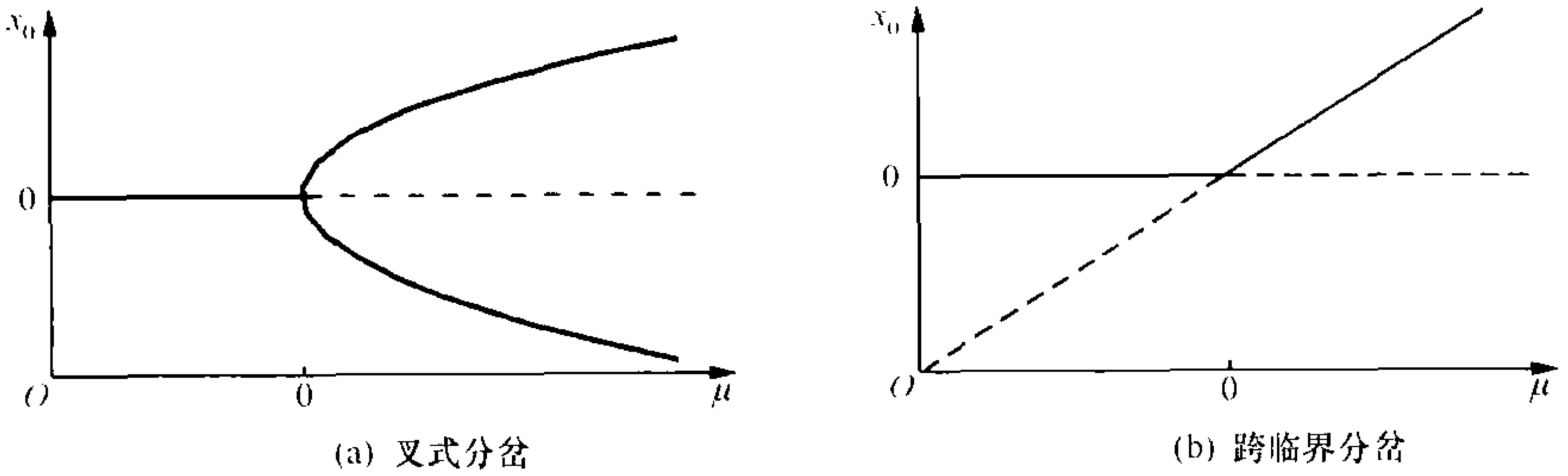



图 5-4　叉式分岔和跨临界分岔示意图

**2. 跨临界分岔(transcritical bifurcation)**

利用模型

$$\dot{x} = \mu x - x^2, \tag{5-23}$$

容易说明,$\mu=0$ 是一个临界点,不动点 $x_0=0$ 在 $\mu<0$ 时是稳定的结点,在 $\mu>0$ 时变为不稳定的结点;另一个不动点 $x_0=\mu$ 在 $\mu<0$ 是不稳定结点,$\mu>0$ 时变为稳定的结点.两个结点的稳定性质在临界点 $\mu=0$ 处恰好发生了交换,如图 5-4(b)所示.

## §5.3　耦合非线性复振子系统

在节 5.2.2 中我们讨论了单个非线性复振子的分岔现象,它由振子在相空间中相互正交的两个方向上投影的运动方程(5-13)描写,通过对复振子进行扰动并分析其本征行为,得到了不动点的稳定性质,特别是在恰当的旋转坐标系中找到了非线性复振子的非平凡不动点,可知对非平凡不动点作扰动时,扰动振子的本征行

为将依赖于不动点的位置. 本节将考虑相互耦合的 $N$ 个复振子系统,其中第 $k$ 个复振子$(x_k+\mathrm{i}y_k)$在两个相互正交方向上的投影分量 $x_k,y_k$ 遵循下面的方程

$$\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t}=F_k(x_k,y_k,x_{j\neq k},y_{j\neq k}),\tag{5-24a}$$

$$\frac{\mathrm{d}y_k}{\mathrm{d}t}=G_k(x_k,y_k,x_{j\neq k},y_{j\neq k}),\tag{5-24b}$$

$$(k,j=1,2,\cdots,N)$$

式中 $F_k,G_k$ 一般是其宗量的非线性函数. 如果 $F_k,G_k$ 不依赖于$\{x_{j\neq k},y_{j\neq k}\}$,振子$(x_k+\mathrm{i}y_k)$的演化将独立于其他 $j\neq k$ 振子(参考方程(5-13)),$2N$ 个方程(5-24)描写 $N$ 个独立复振子;当它们是$\{x_{j\neq k},y_{j\neq k}\}$的函数时,振子 $k$ 与另外 $N-1$ 个振子相互作用,联立方程组(5-24)描写了一个耦合非线性复振子系统.

假设系统(5-24)在给定参数下存在不动点,在复空间中记作$(\underline{x}_0+\mathrm{i}\underline{y}_0)$,满足 $\mathrm{d}\underline{x}_0/\mathrm{d}t=0,\mathrm{d}\underline{y}_0/\mathrm{d}t=0$,这里已采用矢量记号 $\underline{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_N)^{\mathrm{T}}$ 和 $\underline{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_N)^{\mathrm{T}}$. 对不动点施加扰动,令

$$\underline{x}(t)=\underline{x}_0+\underline{\delta x}(t),\quad \underline{y}(t)=\underline{y}_0+\underline{\delta y}(t),\tag{5-25}$$

代入方程组(5-24),得到 $\delta x_k(t),\delta y_k(t)$满足的线性化方程,以 $N=3$ 为例,它有下面的形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\delta x_1\\ \delta y_1\\ \delta x_2\\ \delta y_2\\ \delta x_3\\ \delta y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}H_{11} & H_{12} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots\\ H_{21} & H_{22} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots\\ \ddots & \ddots & H_{33} & H_{34} & \ddots & \ddots\\ \ddots & \ddots & H_{43} & H_{44} & \ddots & \ddots\\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & H_{55} & H_{56}\\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & H_{65} & H_{66}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\delta x_1\\ \delta y_1\\ \delta x_2\\ \delta y_2\\ \delta x_3\\ \delta y_3\end{bmatrix},\tag{5-26}$$

式中矩阵 $\underline{\underline{H}}$ 的各元素为

$$H_{2k-1,2j-1}=\partial F_k/\partial x_j\big|_{(\underline{x}_0,\underline{y}_0)},\quad H_{2k-1,2j}=\partial F_k/\partial y_j\big|_{(\underline{x}_0,\underline{y}_0)},$$
$$H_{2k,2j-1}=\partial G_k/\partial x_j\big|_{(\underline{x}_0,\underline{y}_0)},\quad H_{2k,2j}=\partial G_k/\partial y_j\big|_{(\underline{x}_0,\underline{y}_0)},$$

微分在不动点$(\underline{x}_0,\underline{y}_0)$处取值.

假设各扰动量的时间行为遵循形式 $\delta x_k(t)=\delta x_k(0)\mathrm{e}^{\lambda t},\delta y_k(t)=\delta y_k(0)\mathrm{e}^{\lambda t}$,从扰动方程(5-26)可建立起系统的本征方程

$$|\,\underline{\underline{H}}(\underline{x}_0,\underline{y}_0)-\lambda\underline{\underline{I}}\,|=0,\tag{5-27}$$

它给出对不动点$(\underline{x}_0+\mathrm{i}\underline{y}_0)$的扰动$(\underline{\delta x}+\mathrm{i}\underline{\delta y})$的本征行为,这里 $\underline{\underline{I}}$ 是 $2N\times2N$ 的单位矩阵.

让我们观察矩阵 $\underline{\underline{H}}$ 的形式,典型地,它可被划分为 $N\times N$ 个二维子矩阵,对角线上的子矩阵为

$$\begin{bmatrix} H_{2k-1,2k-1} & H_{2k-1,2k} \\ H_{2k,2k-1} & H_{2k,2k} \end{bmatrix}, \tag{5-28}$$

在振子间无耦合时它决定第 $k$ 个复振子($\delta x_k+\mathrm{i}\delta y_k$)的本征行为，可参考单个振子的模型(5-13)，这里不再重复；非对角线上的子矩阵[式(5-26)中画有"⋰"的部分]只有在振子间存在耦合时才会变为非零，其中子矩阵

$$\begin{bmatrix} H_{2k-1,2j-1} & H_{2k-1,2j} \\ H_{2k,2j-1} & H_{2k,2j} \end{bmatrix} \tag{5-29}$$

描写的是第 $j$ 个扰动振子($\delta x_j+\mathrm{i}\delta y_j$)对第 $k$ 个扰动振子($\delta x_k+\mathrm{i}\delta y_k$)运动的影响，这个影响是通过不动点($\underline{x}_0+\mathrm{i}\underline{y}_0$)实现的，说明(非平凡的)不动点可以将第 $j$ 个自由度上的扰动($\delta x_j+\mathrm{i}\delta y_j$)散射到第 $k$ 个自由度($\delta x_k+\mathrm{i}\delta y_k$)上去. 当控制参数改变时，不动点($\underline{x}_0,\underline{y}_0$)在相空间中的位置发生变化，矩阵 $\underline{\underline{H}}(\underline{x}_0,\underline{y}_0)$的元素以及它们对扰动振子($\underline{\delta x},\underline{\delta y}$)的散射作用也相应改变.

将 $2N\times 2N$ 维矩阵 $\underline{\underline{H}}$ 作对角化可求出它的 $2N$ 个本征值. 只考虑矩阵元为实数的情形，这时如果有一个本征值为复数，一定还有一个与之共轭的复本征值，当它们的虚部变为 0 时，这一对复共轭本征值变为两个实数. 这里暂且限于讨论矩阵 $\underline{\underline{H}}$ 所有本征值都是复共轭的情形，将第 $\tilde{k}$ 对共轭本征值记做 $\lambda_{\tilde{k}}=\lambda_{\tilde{k}}^{(r)}\pm\mathrm{i}\lambda_{\tilde{k}}^{(i)}$，这里 $\lambda_{\tilde{k}}^{(r)}$ 和 $\lambda_{\tilde{k}}^{(i)}$ 分别表示 $\lambda_{\tilde{k}}$ 的实部和虚部，$\tilde{k}$ 上的"～"号强调这是在矩阵对角化后的表象下讨论问题.

由于振子间存在相互作用，一般已不能将 $\lambda_{\tilde{k}}$ 与无耦合时的第 $k$ 个振子($x_k+\mathrm{i}y_k$)的行为对应，这 $N$ 对复共轭本征值 $\lambda_{\tilde{k}}=\lambda_{\tilde{k}}^{(r)}\pm\mathrm{i}\lambda_{\tilde{k}}^{(i)}$ 首先表达这样一个事实：在这个耦合复振子系统中对不动点($\underline{x}_0,\underline{y}_0$)的扰动有 $N$ 个可能的本征频率，$\omega_{\tilde{k}}\equiv|\lambda_{\tilde{k}}^{(i)}|$($\tilde{k}=1,2,\cdots,N$，暂时不考虑频率的符号). 那么，在不动点受到扰动时，这 $N$ 个本征频率都能在运动中显现出来吗? 设想一个不动点($\underline{x}_0,\underline{y}_0$)受到扰动，一般它会在对角化表象中的所有 $\tilde{k}$ 方向上都有投影分量，但只有在本征值实部 $\lambda_{\tilde{k}=\tilde{k}^*}^{(r)}>0$ 的那些特征方向 $\tilde{k}^*$ 上，初始扰动的振幅才会指数增长，相应的本征频率 $\omega_{\tilde{k}^*}$ 最终会显现出来，至少在线性近似下是如此. 需要注意的是，因为失稳方向 $\tilde{k}^*$ 上的运动在所有傅里叶方向 $k$ 上都有投影，因此在任何傅里叶 $k$ 方向上都能观察到失稳的频率 $\omega_{\tilde{k}^*}$.

根据矩阵理论我们知道，对应每一个本征值 $\lambda_{\tilde{k}}$，矩阵 $\underline{\underline{H}}$ 有一个(归一化)本征矢量，记为

$$\underline{v}_{\tilde{k}}\equiv(\hat{x}_1,\hat{y}_1,\hat{x}_2,\hat{y}_2,\cdots,\hat{x}_N,\hat{y}_N)_{\tilde{k}}^{\mathrm{T}}, \tag{5-30}$$

其中 $\hat{x}_k$ 和 $\hat{y}_k$ 是 $\underline{v}_{\tilde{k}}$ 在傅里叶空间的各个 $x_k$ 和 $y_k$ 方向($k=1,2,\cdots,N$)上的投影分量，对应共轭的本征值 $\lambda_{\tilde{k}}^*$，还有一个共轭的本征矢量 $\underline{v}_{\tilde{k}}^*$. 这里我们暂且将 $\underline{v}_{\tilde{k}}$ 和 $\underline{v}_{\tilde{k}}^*$ 看做是扰动对应本征值 $\lambda_{\tilde{k}}$ 和 $\lambda_{\tilde{k}}^*$ 的本征方向，如果本征值的实部大于 0，就认为相应

的本征矢量 $\underline{v}_k$ 和 $\underline{v}_k^*$ 代表了对该不动点扰动的不稳定方向. 在第八章中讨论波动系统时我们将对这个问题作进一步思考,提出关于对不动点扰动的本征方向的另外一种表述.

# §5.4 通向混沌的途径

不动点在扰动下失稳后,沿着不稳定方向扰动的幅度指数增长,当幅度足够大时,线性分析将远远不能描述系统的演化,运动行为可以变得非常复杂,甚至是混沌的(chaotic).

1963 年麻省理工学院的气象学家爱德华·洛伦茨(Edward Lorenz)在试图利用计算机模拟进行长期天气预报时发现,在一些参数区,方程的解非常敏感地依赖于初始条件,它们的演化实际上是不可预言的,这说明,即使没有噪声,一个决定性的非线性系统也可以存在混沌解[80]. 时至今日,这一观点已被广为接受,混沌(chaos)作为一个物理名词几乎已经家喻户晓. 混沌现象由 Lorenz 这样的气象学家首先发现也许不是偶然的,从 20 世纪初以来的几十年间,由于量子力学的成就,物理学家的兴奋点多集中在微观领域,而从事实际问题研究的科学家却必须面对像湍流这样的课题,在关注海洋、大气、磁层等地球现象,太阳、太阳风等地外现象,以及实验室流体、等离子体中的复杂现象时,为预报、控制等目的,他们需要在纷乱无序的数据中寻找运动的内在规律. 弄清楚动力学系统中轨道通过什么途径变得混沌以及在混沌状态下运动有什么规律,对这些领域有重要意义.

处理线性系统的方法为人们所熟悉,它们是标准的: 傅里叶展开、本征值分析、希尔伯特空间等,与此相对照,非线性系统一向被认为极具个性,一个多世纪以来只找到了少数非线性方程的解析解,为此还得发展各自的特殊解法. 混沌和湍流现象更令人感觉非线性系统是如此难以捉摸和不可预测. 不过,近些年来的研究却揭示出问题的另一面: 原来,非线性系统的运动有许多共通的规律,如前面介绍的几个分岔现象,已发现它们可出现在分属自然界不同领域的许多非线性系统中,后来人们更发现,通向如此不可预测的混沌状态也有着一些共同的途径(route 或 scenario),它们大体可以分为三大类: 通过局域分岔、通过阵发和通过全局分岔向混沌转变.

## 5.4.1 通过局域分岔向混沌转变

采用局域分岔(local bifurcation)[75] 这个名词是为了区别于全局分岔(global bifurcation),后者是一种以十分激烈的方式向混沌转变的途径,它牵扯到相空间中的大尺度结构,如吸引子、吸引盆、鞍点的稳定和不稳定轨道等,而且向混沌的转变

是突然发生的.相比之下,通过局域分岔向混沌转变的过程要缓和得多,随参数改变系统逐一地遭遇分岔点——有限或无穷多个,每一次分岔都引起运动流形的拓扑结构出现某种改变,如在 Hopf 分岔中不动点变成极限环,再次 Hopf 分岔后极限环变成二维环等.典型的通过局域分岔到达混沌的途径当属费根鲍姆(Feigenbaum,亦称 period doubling 即倍周期分岔)途径[81–84]和吕埃勒-塔肯斯(Ruelle-Takens)途径[85][86].

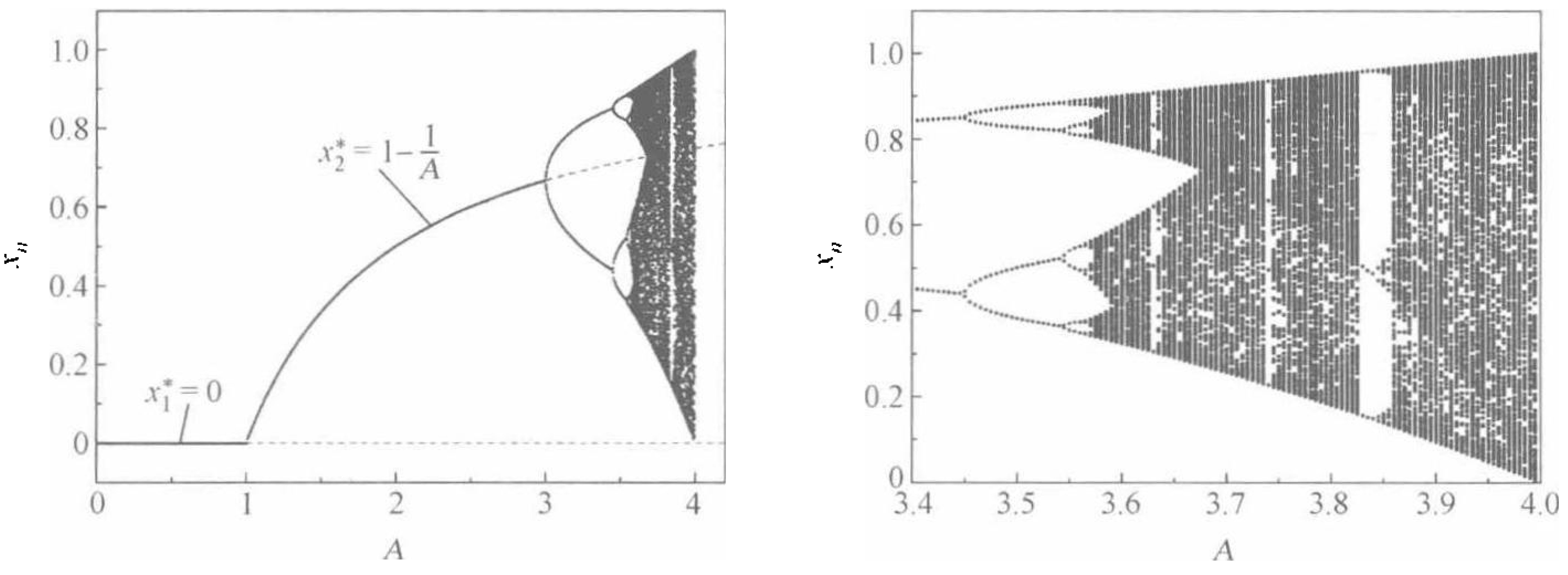
**1. 倍周期途径**

虫口模型,即逻辑斯谛映射(logistic map)[87]

$$x_{n+1} = Ax_n(1-x_n) \equiv f_A(x_n), \tag{5-31}$$

是说明倍周期分岔途径最好的例子,模型描写生物种群的数量变化,式中 $x_n$ 是第 $n$ 代果蝇的数量,下一代的数量 $x_{n+1}$ 受到环境因素(控制参数 $A$)的影响,非线性地依赖于 $x_n$.

图 5-5(a)汇总了 $A$ 在[0,4)范围内取值时从 $0<x_0<1.0$ 的几个初始点出发的映射结果(圆点),暂态过程已经略去,(b)是(a)的细部.$A<1$ 时,$x_{n+1}$ 总是小于 $x_n$,因此无论从什么 $x_0$ 值出发,映射值总是趋向稳定的平凡不动点 $x_1^*=0$.在 $A=1.0$ 时不动点 $x_1^*$ 出现跨临界分岔,映射点被吸引到系统的另一个不动点 $x_2^*=1-1/A$ 上,失稳的不动点 $x_1^*=0$ 在图上用水平虚线表示.




(a) 在[0,4)范围内的映射结果　　(b) 为(a)的细部

图 5-5　虫口映射(5-31)的渐近解随控制参数 $A$ 的变化

$A=3.0$ 是另一个临界点,记为 $A_1$,越过它时不动点 $x_2^*=1-1/A$ 经历了一次叉式分岔,如果从某个初始值 $x_0$ 开始迭代,在 $n$ 足够大时映射值 $x_n$ 被吸引到两个不动点上来回跳动,随参数改变它们在图 5-5(a)上形成了 $2^1$ 个分支,失稳了的不动点 $x_2^*$ 在图上用虚线表示.

图 5-6(a)和(b)有助于理解不动点 $x_2^*$ 为什么会出现叉式分岔,图中单峰曲线是函数 $f_A(x)$,它与对角线 $x_{n+1}=x_n$ 的交点是映射在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 范围内的不动点,图 5-6(a)中 $A=2.9$,不动点 $x_1^*=0$ 已失稳,映射点最终收敛于不动点 $x_2^*=1-1/A$;

图 5-6(b)给出 $A=3.1$ 的情形，这时不动点 $x_2^*=1-1/A$ 也已失稳，渐近映射值在两个新生成的不动点上来回跳跃，它们是不动点 $x_2^*$ 叉式分岔的结果.

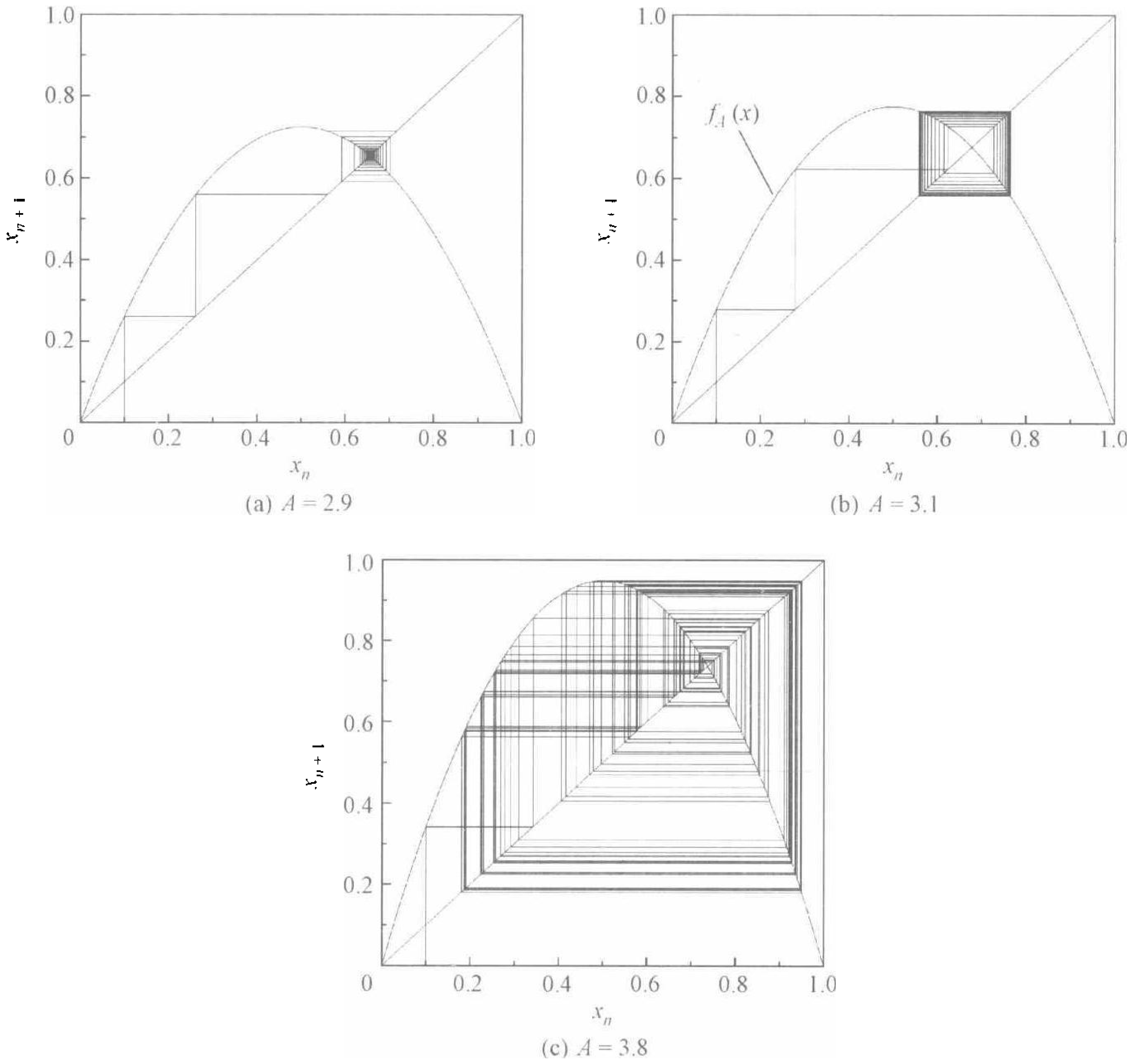



图 5-6　不同控制参数 $A$ 下虫口映射(5-31)的计算结果

在图 5-5(a),(b)上可以看到，第一次叉式分岔后产生的两个不动点在临界值 $A_2\approx3.45$ 处也同时出现叉式分岔，它们失稳成 $2^2$ 个稳定的不动点，此后叉式分岔继续发生，如在 $A=A_3\approx3.54$ 时 4 个不动点同时失稳，分岔成 $2^3$ 个不动点，…….一般地，在参数 $A>A_m$ 时，系统的 $2^{m-1}$ 个不动点同时出现叉式分岔，生成 $2^m$ 个稳定不动点，映射轨道将在这 $2^m$ 个不动点上周而复始地跳跃. 到 $A=A_\infty$ 时，如果从某个初始值 $x_0$ 开始迭代，渐近解将在无穷多个不动点上跳动，映射结果变得如此无序，以至于可认为实际上是混沌的. 图 5-6(c)是 $A=3.8$ 时从 $x_0=0.1$ 出发的前 100 个映射值，它们已经显得十分无序.

向混沌转变的这个途径称为 Feigenbaum 途径，对出现该途径的不同映射模型的研究发现比值

$$\delta_n = \frac{A_n - A_{n-1}}{A_{n+1} - A_n}, \tag{5-32}$$

的极限 $\delta_{n\to\infty}$ 是一个普适常数，$\delta \approx 4.669\cdots$，称为 Feigenbaum 数[81]，这里 $A_n$ 是第 $n$ 次叉式分岔发生的临界参数.

本书关心的波动演化都要由微分方程描写，为什么在这里还要详细讨论简单的映射模型？其实，演化也是一种映射，作过计算机求解微分方程的人一定很容易理解这一点. 在(常)微分方程的数值模拟中，将未知函数对时间作离散化，以显式差分格式为例，计算要从上一个时间步长上的值推演出下一个时间步长上的值来，这就像是果蝇种群数量代际改变的映射过程. 从虫口模型找到的 Feigenbaum 途径，在很多物理系统中都观察到，如斯温尼(Swinney)著名的电路实验[88]以及约瑟夫森(Josephson)结实验[89]等，这里仅举一个有关流体系统的例子.

图 5-7 是一个磁化导电流体实验装置示意图，平底浅槽中置有水银，外加水平磁场，下方加热引起水银上下对流[90]. 它类似于所谓的瑞利-贝纳尔(Rayleigh-Bénard)对流实验装置[10]，后者在浅槽中盛有普通液体，没有磁场，薄层液体从下面被加热，维持上下表面之间一定的温差. 在温差很小时，在垂直方向只有热传导而无对流，若在上表面观察，流体的速度场是空间均匀的；随温差增加，在垂直方向上出现了对流，在热流上升的同时，冷流下降. 观察发现，在临界温差下水平面上的速度场突然出现六角形的结构，六角形中心附近的液体上升，边缘的下降，形成了对流卷. 地球大气层的对流运动与 Rayleigh-Bénard 对流模型描写的状态就十分相似，太阳加热地表使大气下层温度升高，由此形成的对流造成了速度场在水平方向的结构.

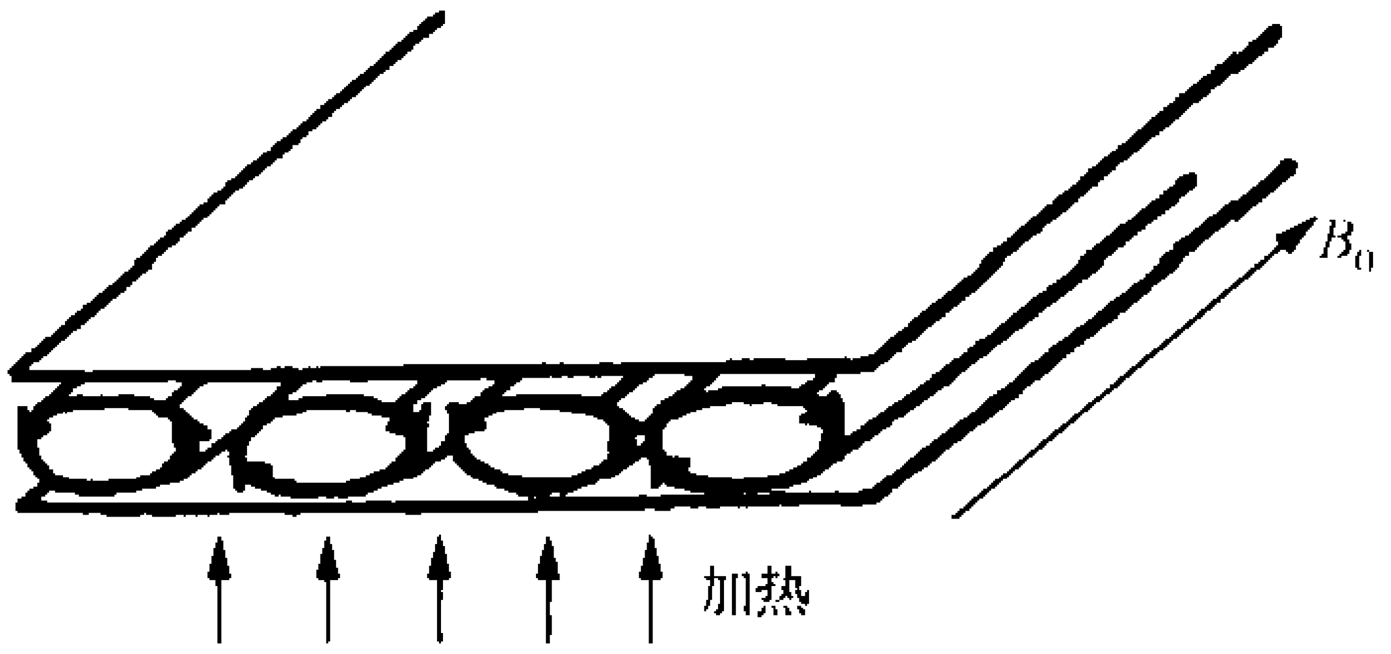



图 5-7　以水银为介质的 Rayleigh-Bénard 对流实验装置示意图

在以水银为介质的这个实验中，两个控制参数是雷诺数 $Re = vd/\nu$（这里 $v$ 是流场速度，$d$ 是水银层高，$\nu$ 是动力黏滞系数）和钱德拉塞卡(Chandrasekhar)数 $Q = \sigma B_0^2 d^2/\rho\nu$（$\sigma$ 是电导率，$\rho$ 是流体密度，$B_0$ 是外加水平磁场强度）. 图 5-8(a)是弱磁场 $B_0 = 270$ G(低 $Q = 22$)情形，自上而下雷诺数 $Re$ 增加. 测量固定空间点的温度，在一个临界雷诺数 $Re = Re^c$ 处观察到温度从时间的常数变为周期振荡[不动点出现 Hopf 分岔，有的文献也称其为振荡不稳定性(oscillatory instability)]，实验发

现随雷诺数 $Re$ 增加温度振荡的形态遵循 Feigenbaum 途径向混沌转变. 例如，由图 5-8(a)可见，在 $Re/Re^c=3.47$ 时简单周期振荡变为有一高一低的 $2^1$ 个峰，到 $Re/Re^c=3.52$ 时显示一高一低次高次低的 $2^2$ 个峰值，……；这样，运动周期(同高度的峰间距)随着雷诺数增加按 $2^n$ 规律加倍($n=1,2,\cdots,N$)，在图中一直到 $Re/Re^c=3.65$ 时的 $2^4$ 倍周期还有很好的分辨率. 这正是为什么 Feigenbaum 途径也被称为倍周期分岔途径的原因. 若周期振荡的特征频率为 $f$，那么随着周期加倍，温度演化的傅里叶频谱中将依次出现 $f/2$，$f/2^2$，…，$f/2^n$，…的分频谱线，在实验中已分辨出 $f/32$ 的分频谱线.

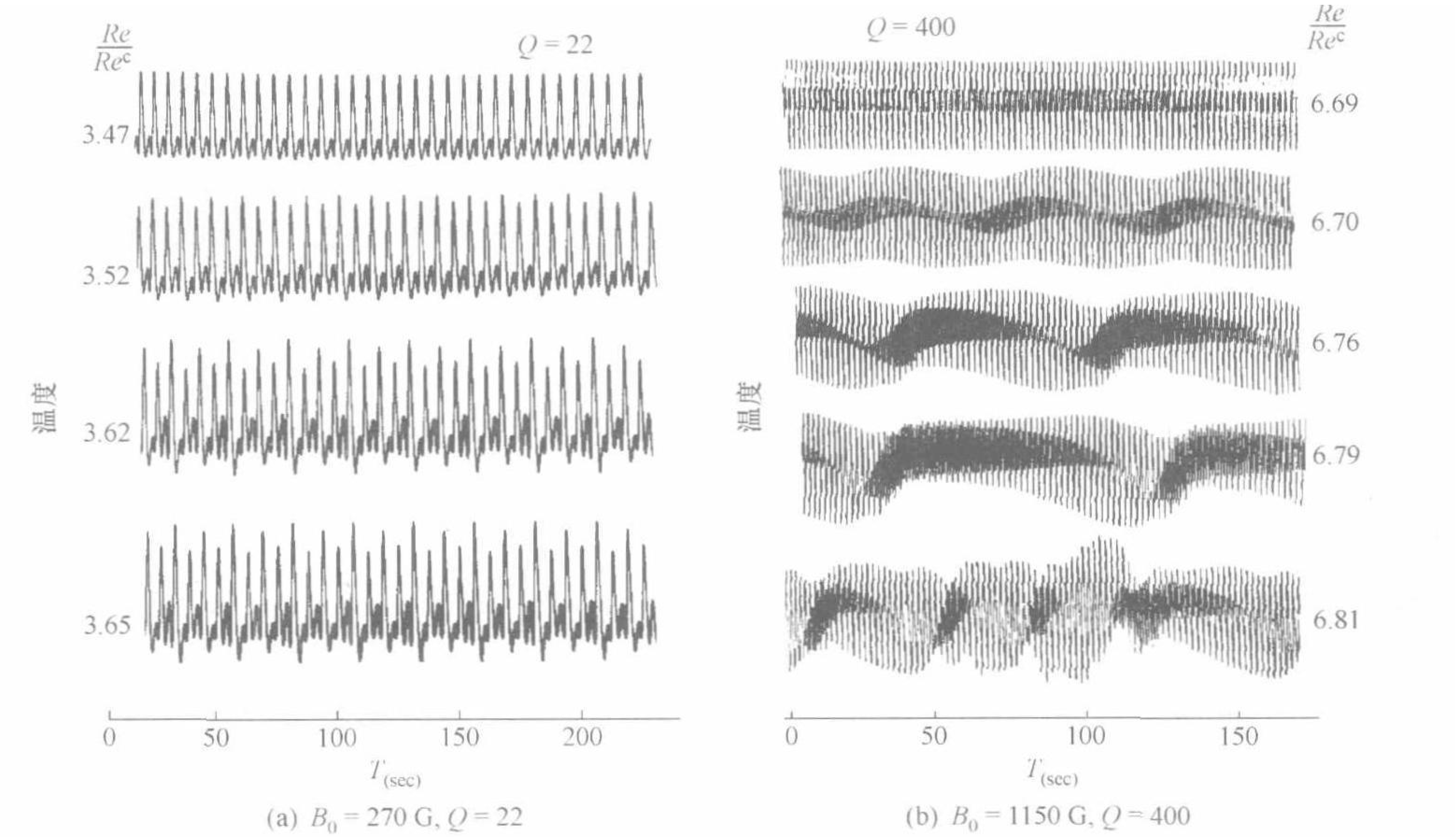



图 5-8　在外加水平磁场下以水银为介质的 Rayleigh-Bénard 对流，温度演化状态随参数 $Re/Re^c$ 的变化(引自文[90])

计算实验中最后三次倍周期分岔的 Feigenbaum 数，得到

$$\delta=\frac{Re^8-Re^4}{Re^{16}-Re^8}=4.4\pm0.1, \tag{5-33}$$

它与理论上的渐近值[参考(5-32)] $\delta_{n\to\infty}=4.669\cdots$ 已经相当接近.

这样，我们看到，从极为简单的虫口映射中寻找到的动力学途径，在复杂的实际磁流体系统中被明确地观察到，这是何等不可思议的事情！这样的例子在非线性系统研究中比比皆是. 当年开普勒发现太阳位于行星椭圆轨道的一个焦点上，证实了有规运动遵循着一定的数学规律. 现在人们认识到，在物理、化学、生物等领域中复杂的甚至是混沌的运动，也同样可以是决定性系统的结果，并且它们严格地遵

循着相同的一些规律.当自然界的这一奥秘被揭开时,科学家们一定也像当年开普勒那样,内心充满了无以名状的兴奋!

**2. 准周期途径**

既然一系列叉式分岔可以导致混沌,预料一系列 Hopf 分岔也应该能导致混沌,问题是,它也需要像 Feigenbaum 途径那样经过无穷多次分岔过程吗? 当年朗道(Landau)对湍流起因就提出了这样的假说,他认为,湍流是系统中出现了无穷多个不可约频率 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{n\to\infty}$ 的结果[91],换言之,无穷多次 Hopf 分岔导致了湍流运动,不过这个假说并没有得到实验的支持.

1971 年 Ruelle 和 Takens 提出,混沌可以通过准周期途径(quasi periodic route)实现[85],与 Landau 假说不同的是,他们认为系统中只需要出现有限个不可约频率就能导向混沌运动.后来在 1978 年,纽豪斯(Newhouse),Ruelle 和 Takens 更在一定条件下从数学上证明,三维环形拓扑是不稳定的,如果系统的轨道被约束在相空间中的三维环上,即有 3 个独立频率,那么任何微小的扰动,哪怕是噪声,都将破坏轨道在环上的运动并导至混沌.这就是所谓混沌或湍流的 Ruelle-Takens 途径[86,76,92].按照这个途径,系统的定态首先因 Hopf 分岔变为周期运动,第二个独立频率的出现将周期运动调制为准周期,而第三个独立频率的出现则直接将运动轨道转变为混沌的.

Ruelle-Takens 途径不需要无穷多次 Hopf 分岔,预言称只需有限三次就可以将系统带到混沌状态,确有不少物理和数值实验观察到 Ruelle-Takens 途径[88,90,93].

再以水银的 Rayleigh-Bénard 对流为例[90],在高磁场(高 $Q$)下,实验观察到运动在向混沌转变的过程中都经历了准周期状态,不再显示低磁场时[图 5-8(a)]的 Feigenbaum 途径,不过情况比较复杂.

在图 5-8(b)中参数为 $B_0=1150\,\mathrm{G}$,$Q=400$,随着雷诺数增加,在 $Re/Re^c=6.69$ 时温度出现频率 $f$ 和 $f/2$ 的周期振荡,在 $Re/Re^c=6.70$ 时一个十分低频的 Hopf 分岔将运动调制成双周期的,轨道流形为二维环;随着雷诺数继续增加,调制频率不断降低,即出现了软模,该文作者认为这可能与存在同宿轨道有关;在 $Re/Re^c=6.81$ 时运动已经显得比较混沌.本例中没有证据说明有第三个独立频率出现导致了混沌,作者指出,可能是多个分频的出现(如 $f/6$ 分频)使得波动显得无序.

如果说图 5-8(b)在二维环以后的动力学还有待深入研究的话,那么在更强磁场下的实验结果则十分清楚地显示了通向混沌的 Ruelle-Takens 途径.图 5-9(a)(b)分别是 $B_0=1500\,\mathrm{G}$,$Q=675$ 时温度变化和相应的傅里叶谱,其中上下图分别对应 $Re/Re^c=8.91$ 和 $Re/Re^c=8.98$.由图可见,在 $Re/Re^c=8.91$ 时运动为准周期振荡,它的谱由 $f_1, f_2$ 及其谐波以及它们的拍频组成;在 $Re/Re^c=8.98$ 时运动已

经变得相当混沌，傅里叶谱很宽，除 $f_1$，$f_2$ 两个频率而外，一个极低的频率 $f_3$ 清晰可见，正是这第三个独立频率的出现破坏了二维环上的准周期运动. 这是磁流体实验中显示通过 Ruelle-Takens 途径向混沌转变的证据之一，这个途径在普通流体和等离子体中也都有观察，第六章中我们将介绍显示 Ruelle-Takens 途径的等离子体理论和实验结果.

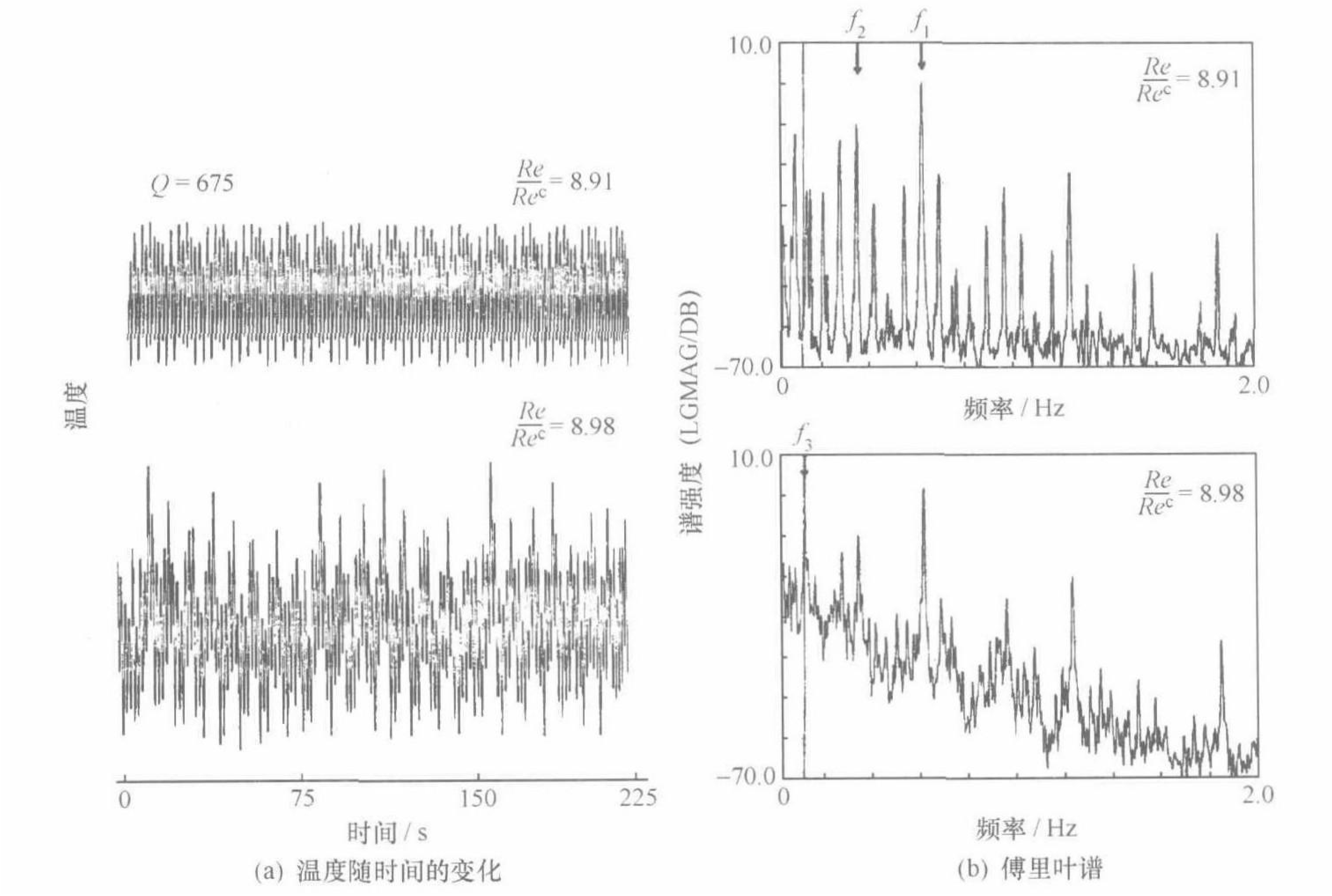



图 5-9 强磁场下以水银为介质的 Rayleigh-Bénard 对流实验结果
（引自文[90]）

值得一提的是，也有一些实验呈现出复杂的现象，如文[94]研究了正弦信号驱动的两个耦合非线性振子，他们发现，在一些参数区中实验结果似乎支持 Ruelle-Takens 途径，但在弱耦合时，即使有 3 个独立频率出现，系统也还保持准周期振荡. 文[95]在 Rayleigh-Bénard 对流实验中，甚至明确地观察到了有 4 个和 5 个独立频率的准周期运动，该文作者认为，这个现象可能与模式的空间局域化振荡(spatially localized oscillations)有关.

以上这些实验的共同之处在于，它们都观察到了由 2 个或 2 个以上独立频率出现造成的准周期现象，说明拥有环形拓扑的运动流形在包括流体波动在内的非线性系统中十分普遍地存在，只是在有规运动究竟允许几个独立频率这一点上各实验的结果有所差异. 也许对于许多实际问题，就像文[95]那样，考虑空间变量的作用能够解释这个差异. 在后面讨论与时间和空间有关的波动系统时，我们也将看

到在一定条件下模式的空间局域化,以及它在维持三维以上拓扑环运动流形中的作用,与这些拓扑环相联系波动处于有规状态.

**3. 锁频现象**

与准周期途径相关的一个话题是锁频(frequency-locking),它指的是非线性系统运动的两个特征频率之比在一个较宽参数范围内保持为一个确定的有理数 $m/n$ 的现象.观察锁频现象最简单的模型是圆映射(circle map)[10],

$$\theta_{n+1} = \theta_n + w + k\sin\theta_n \quad (\text{Mod } 2\pi) \tag{5-34}$$

这里,$w \equiv 2\pi\Omega_1/\Omega_2$,$\Omega_1$ 和 $\Omega_2$ 分别是两个线性振子的频率,$k\sin\theta_n$ 描写非线性振子耦合的作用.定义旋转数(rotation number)

$$R = \frac{1}{2\pi}\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m-1}\Delta\theta_n, \tag{5-35}$$

这里 $\Delta\theta_n = w + k\sin\theta_n$. $k=0$ 时旋转数 $R = w/2\pi$,它取有理数值的集合只有测度 0,$k\neq0$时 $R$ 发生非线性改变,取有理数值的参数区不再是一些孤立点.如图 5-10 所示,在参数 $k$-$w/2\pi$ 平面上用阴影标出旋转数 $R$ 等于有理数 $m/n=0,1/3,1/2,2/3,1$ 的区域,它们都从横轴上等于这几个有理数的点伸出,随 $k$ 增加逐渐展宽成一条条舌形区,被称为锁频的 Arnol'd 舌头(Arnol'd tongue)[96,10].这说明随非线性的增强,两个耦合振子可以在越来越大的线性频率比范围内实现锁频,$m$,$n$ 越小($m/n$ 已约到最简),锁频参数区越宽.在 $k>1$ 非线性很强时,不同锁频值的 Arnol'd 舌头有可能出现交迭,交迭区中频率比变得“无所适从”,混沌发生.

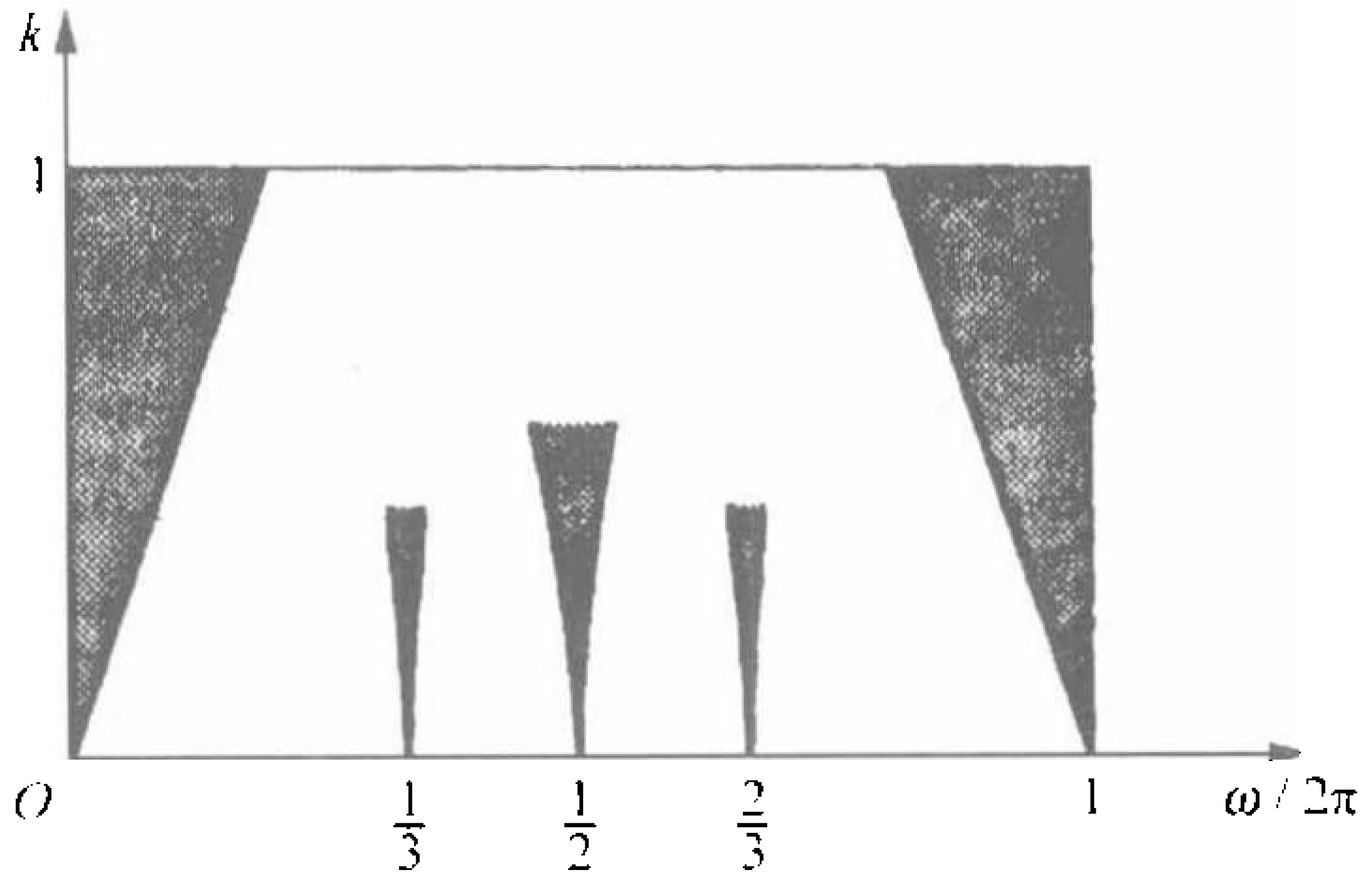



图 5-10 锁频 Arnol'd 舌头示意图

(引自文[10])

**4. 魔鬼台阶**

图 5-10 中在固定 $k$ 值时,不同有理数 $m/n$ 比值的 Arnol'd 舌头宽度不尽相同,图 5-11 中取定 $k=1$,画出了不同有理旋转数作为驱动参数 $\Omega\equiv w/2\pi$ 的函数,它们形成了宽窄不一的平台,称为魔鬼台阶(devil's staircase),其中对应小 $m$,$n$ 值的有理数(如 1/2,2/3,…)的平台较宽,两个振子的旋转频率可以在更大线性频率

比 $w$ 范围内锁定在有理数值[96,97].

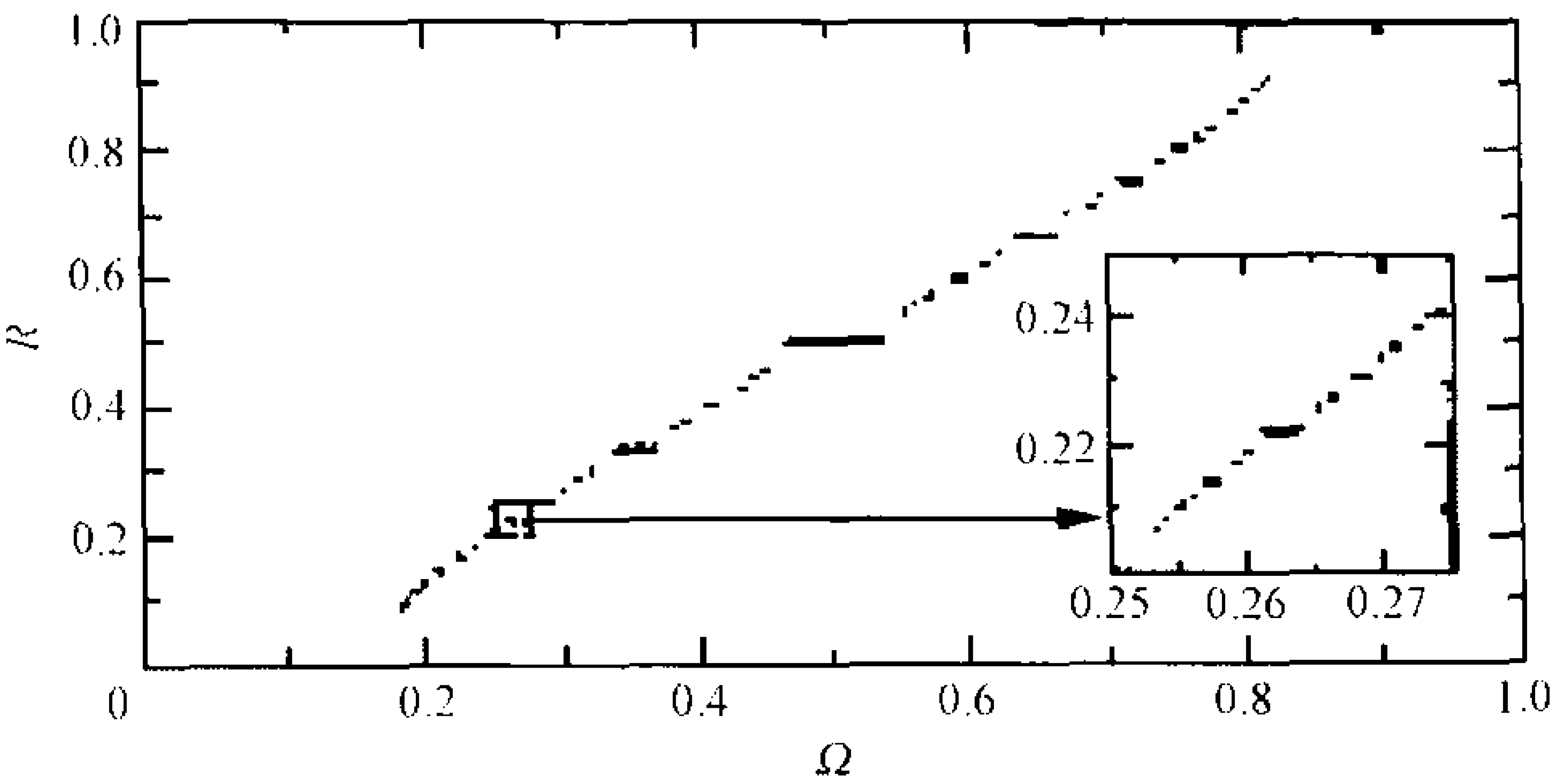



图 5-11 参数 $k=1$ 时旋转数取有理数的魔鬼台阶
(引自文[98])

在实际系统中常常观察到如下现象：在改变参数时准周期振荡突然转变为简单的周期振荡，并在有限大小的参数范围内保持周期振荡状态，这很可能就是遇到了锁频 Arnol'd 舌头和魔鬼台阶的参数窗口，在出了这个窗口之后运动继续表现为准周期振荡. 在很多情况下波动系统的运动流形也是一个拓扑环，轨道围绕拓扑环的不可约回路周而复始地旋转，在这种情况下，准周期运动以及锁频的周期窗口都是常见的现象，上面提到的以水银为介质的 Rayleigh-Bénard 实验中就曾观察到这类锁频现象[90].

## 5.4.2 通过阵发向混沌转变

阵发(intermittency)是自然界(含波动系统)中常见现象，大致可分为三类：

Ⅰ-型阵发：原来平稳的周期振荡不断被突然出现的大振幅混沌爆发所打断，运动在周期振荡和混沌两种状态之间来回切换，随着参数变化，爆发越来越频繁，运动也变得越来越混沌[99~103].

Ⅱ-型阵发：运动在周期和准周期状态之间切换[104~106].

Ⅲ-型阵发：运动在两类不同的混沌状态之间切换[107~109].

阵发现象在流体和等离子体中也不罕见，在普通流体的 Rayleigh-Bénard 对流实验中就曾观察到典型的Ⅰ-型阵发现象[110]，图 5-12 所示的是流体速度垂直分量 $v_z$ 的时间演化曲线，在较低温度时表现为简单周期振荡[图(a)]，随温度增加周期振荡间或地被混沌阵发所打断[图(b)]，温度继续增加时阵发出现得更加频繁[图(c)]，这使运动显得十分混沌[110~111]. 在放电等离子体中也观察到了通过Ⅰ-型阵发向混沌转变的现象[112].

一般认为Ⅰ-型阵发产生的机制是所谓的切分岔(tangent bifurcation)，它可用简单的虫口模型(5-31)来说明[76]. 图 5-13(a)给出 $A=3.735$ 时经过 5 次映射的值

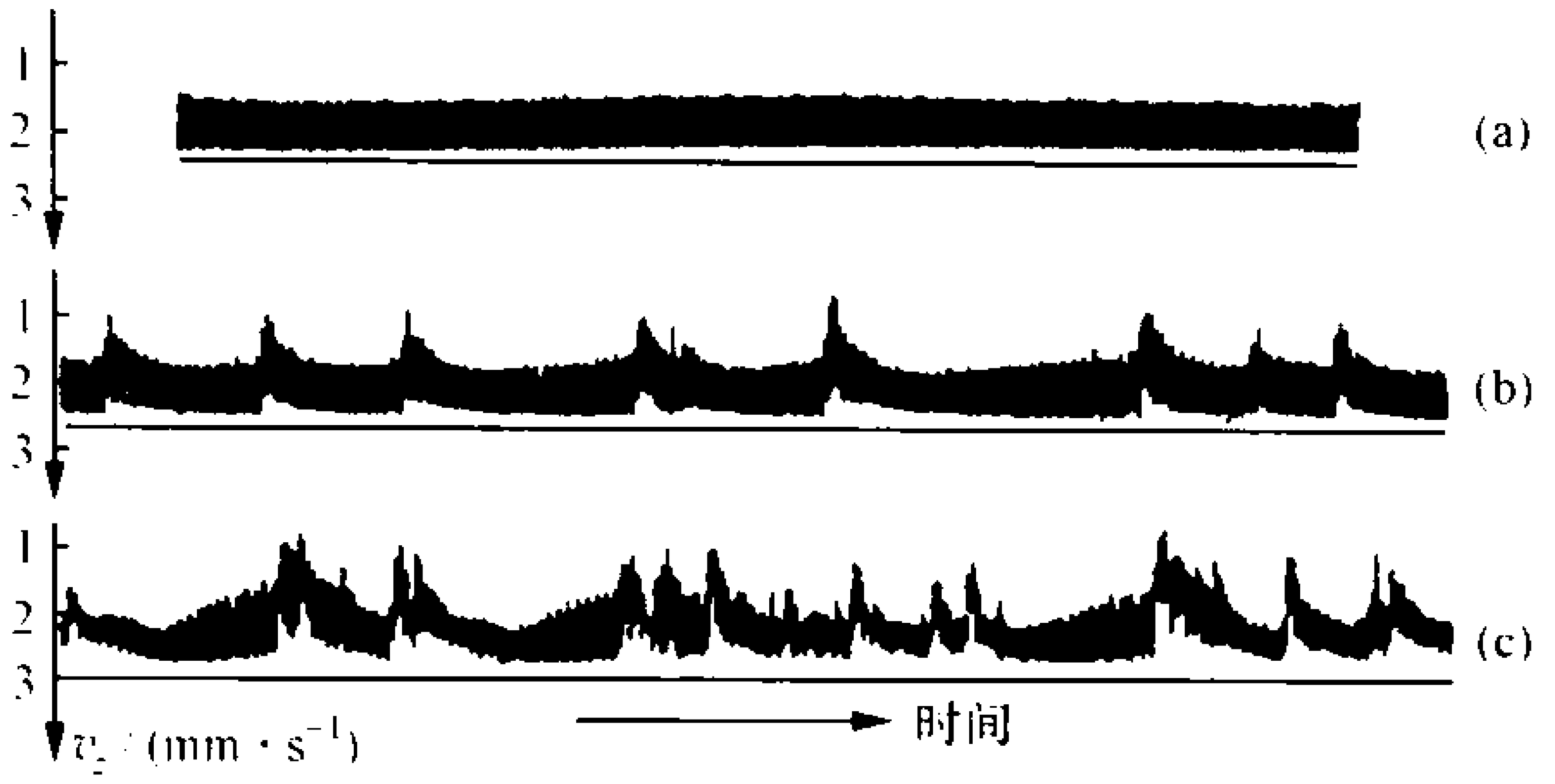
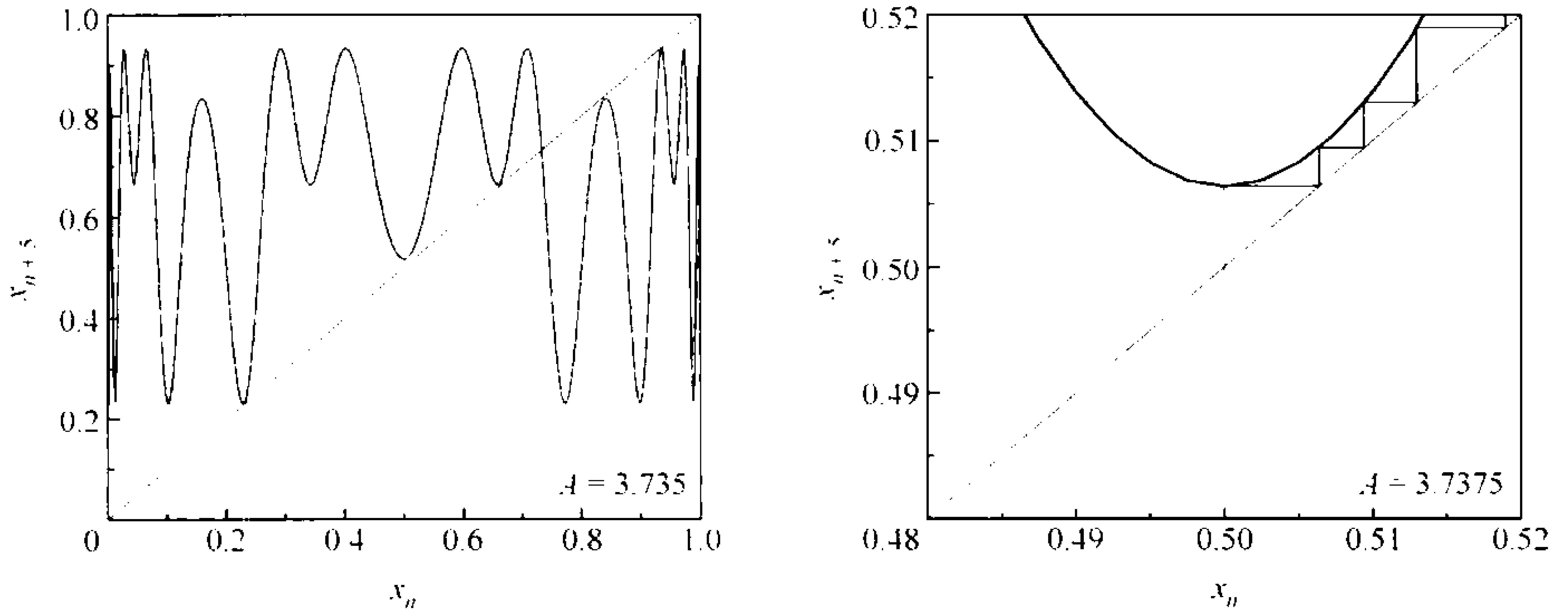



图 5-12　实验测量的 Rayleigh-Bénard 流体速度垂直分量的时间演化曲线（引自文[10]）

$x_{n-5}$作为 $x_n$ 的函数，它是一条多峰曲线，注意曲线有几处几乎与对角线 $x_{n+5}=x_n$ 相切，它们之间形成了狭窄通道. 图 5-13(b)是 $A=3.7375$ 时狭窄通道附近映射曲线的局部放大，由图可见映射在通道内的运动几乎是周期的，走出这个通道后映射轨道又将变得混沌. 因为映射总有机会一次又一次通过这个通道，这就解释了周期和混沌运动交替出现的Ⅰ-型阵发现象. 在本书第九章我们将分析在一个非线性波动系统中观察到的Ⅰ-型阵发，并提出其产生机制的一个新解释.




(a) $x_{n-5}$ 作为 $x_n$ 的函数　　(b) 轨道经过映射函数与对角线之间狭窄通道时的细部

图 5-13　虫口模型的 5 次映射函数

## 5.4.3　激变和全局分岔

激变(crisis)是混沌吸引子发生突然改变的现象，它涉及相空间中大尺度结构的变化，在非线性动力学中属于全局分岔. 理论上预言的这个现象，在数值和物理实验中都得到了证实[113~123].

**1. 三种类型吸引子激变**

激变在参数空间中表现为一种临界现象，根据其动力学特点可以划分为三类，

它们分别是,当参数越过临界点时相空间中的吸引子

(1) 突然创生,

(2) 突然膨胀,

(3) 两个或多个吸引子突然融合.

若参数从另一个方向越过临界点,则发生相反的过程:原有的吸引子突然消失,突然缩小,或者突然分裂[10,124,125].

对于所有这三类激变现象,都可以找到轨道运动的某个特征时间长度[113],记为 $\tau$,在临界参数 $p=p_c$ 附近,$\tau$ 随 $p-p_c$ 的变化遵循一定的规律. 以吸引子突然膨胀的情形为例,当 $p$ 刚越过 $p_c$ 时,轨道仍不时地在膨胀前老吸引子的吸引域内运动较长的时间,然后突然跳出来,在膨胀了的吸引子上作大幅振荡,显示出阵发特点,在这种情况下特征时间 $\tau$ 可取为两次爆发之间的平均时间. 研究发现,对一大类系统,在参数 $p$ 趋向激变的临界点 $p_c$ 时,特征时间尺度 $\tau$ 遵循下面的标度行为

$$\tau \sim | p - p_c |^{-\gamma}, \tag{5-36}$$

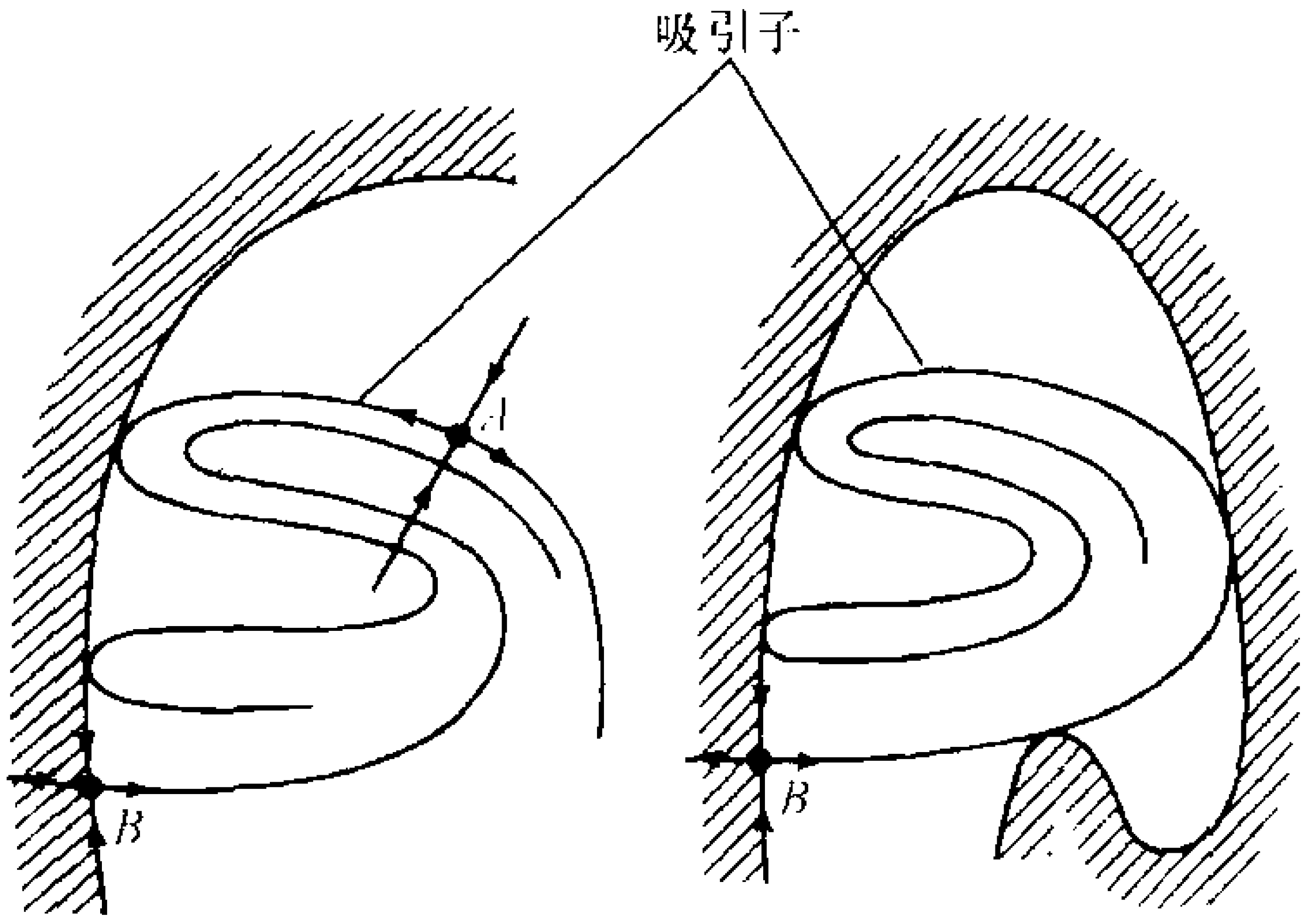
这里 $\gamma$ 是临界指数[124,126,120~121]. 对于一类低维系统,已经发展了定量理论来决定临界指数 $\gamma$ 的值,一般地,这个值可能与吸引子在相空间中的维数 $D$ 有关[124].

激变现象不能从一系列局域分岔来解释,它发生的原因要深刻得多. 吸引子出现激变,与相空间中还存在其他的不稳定不动点、不稳定周期轨道或另外的吸引子有关,在一定条件下,运动轨道所在的吸引子与它们发生了相互作用. 因此,在讨论激变现象之前,需要对系统在参数空间和相空间中的整体行为有清楚的了解.

让我们以涉及鞍点的激变为例对激变过程作一个粗浅的描述. 假设在给定参数下系统在相空间中有两个不动点 $A$ 和 $B$,如图 5-14(a)所示,其中 $B$ 是鞍点,另一个不动点 $A$ 在参数改变时失稳,经历了一系列分岔(如 Hopf 分岔)发展成了混沌吸引子,随着吸引子尺度逐渐增大,轨道在越来越大的相空间范围内漫游;另一方面,我们知道,鞍点对线性扰动有稳定或不稳定轨道,它们以指数方式趋近或远离鞍点,由此可见,相空间并非是这个混沌吸引子的"一统天下",它如果要继续膨胀的话,在某个临界参数处不可避免地将遭遇到与鞍点连接的轨道流形.

与鞍点相关的激变发生的过程如下:在临界参数下,混沌运动的轨道偶然落在鞍点 $B$ 的稳定流形上,或者说吸引子与鞍点的稳定轨道相切,这时吸引子的轨道将被这个稳定轨道带到鞍点附近,然后沿着鞍点的不稳定流形远离鞍点,这最终引发了原来的吸引子出现突变. 这个过程有点像一个小球偶然落到了马鞍沿前后方向的斜坡上,它先顺着斜坡滚到马鞍的中心,然后顺势向脚蹬方向滚落. 当然这个比喻只适合小球与鞍点碰撞前后的瞬间,实际上在轨道远离鞍点后,经过非线性系统复杂的调整,它将被吸引到一个更大的混沌吸引子上,这就是吸引子的突然膨胀.

像图 5-14(a)中的情形牵扯到两个不稳定不动点 $A$ 和 $B$,它们的不稳定轨道




(a) 异宿相切　　(b) 同宿相切

图 5-14　异宿相切和同宿相切示意图
(引自文[10])

与稳定轨道相切被称为异宿相切(heteroclinic tangency),与异宿相切对照的是同宿相切,如图 5-14(b)所示,这时只有一个鞍点,它自身的不稳定轨道与稳定轨道之间出现相切. 同宿相切也可能引起激变. 总之,激变正是相空间中的这一类"遭遇战"所造成的:混沌吸引子遭遇到鞍点或其他的不稳定不动点的不稳定周期轨道,或者两个吸引子因膨胀而遭遇等.

**2. 内部激变和边界激变**

除了根据吸引子的动力学状态变化对激变分类,还可以根据不稳定不动点和不稳定周期轨道相对于混沌吸引子的吸引盆的位置来分类[10,76]. 如果不稳定不动点位于吸引盆的边界上,混沌吸引子与它的不稳定周期轨道碰撞引发的激变就叫做边界激变(boundary crisis)[113,118],边界激变将引起吸引子突然消失;如果不稳定不动点或不稳定周期轨道位于吸引盆的内部,混沌吸引子与之碰撞引发的激变叫做内部激变(interior crisis),如前面介绍的与鞍点碰撞后吸引子突然膨胀的激变就属于内部激变[113~115,76,117,126,127]. 如果参数空间高于一维,内部激变和边界激变发生的临界曲线还可能汇合,交汇点上可出现所谓的双激变(double crisis)[128].

利用简单的虫口模型(5-31)既可以观察到边界激变也可以观察到内部激变[76],这里仅介绍边界激变. 在图 5-5(a)中看到,在 $A>3.0$ 时不动点$x_2^*=1-1/A$ 经历一系列叉式分岔,随着吸引子膨胀,映射值散布到越来越宽的相空间范围;注意除这个吸引子外,相空间中还有一个失稳了的不动点 $x_1^*=0$,图中以水平虚线表示,随参数 $A$ 增加,混沌吸引子不断膨胀,它终于在 $A=4$ 时触到了 $x_1^*=0$ 及其不稳定周期轨道,这引发了激变. 容易验证在 $A>4$ 时映射点将离开[0,1]区间,趋向无穷远处,原来的混沌吸引子完全消失了. 因为 $x_1^*=0$ 位于混沌吸引子的吸引盆边界上,这个激变现象属于边界激变.

一些阵发现象与激变有关,它们是激变引起的阵发(crisis-induced intermit

tency). 例如在吸引子突然膨胀或两个吸引子融合时，运动有可能在两个不同状态之间切换. 如果这两个状态都是混沌的，就可能出现Ⅲ-型阵发[10].

尽管激变现象以及与之相关的普适性质已被很多数值模拟和物理实验证实[114,115]，在联系到物理实际时这个现象还是不免让人迷惑不解：像鞍点这样一个不稳定不动点一般是不能实现的，任何微小的扰动都会使系统离开这个状态，一个没有实现的状态如何影响真实物理世界中的运动呢？还有，所谓鞍点的稳定和不稳定轨道不过是在扰动的线性近似下从理论上得到的结果，它们并不是真实地伸展在相空间中的物理实在，何来吸引子与之"相切"和"碰撞"之说？

让我们这样来理解这个问题：当吸引子的轨道在相空间中走到鞍点(记为 $\underline{x}_0^*$ )附近的那一刹那，运动就实现了这样一个状态：$\underline{x}_0^* + \underline{\delta x}$($\underline{\delta x}$ 是小量)，这就是说，在此瞬间，鞍点 $\underline{x}_0^*$ 变得不再虚无，它几乎实现了. 让我们把 $\underline{\delta x}$ 看做是对鞍点的扰动，因为它很小，恰好符合对鞍点作线性稳定性分析时所作的假设，因此 $\underline{\delta x}(t)$的轨道在一段时间内一定会沿着理论预言的鞍点稳定或不稳定轨道指数地演化. 鞍点就是以这种独特的方式影响着真实世界中的运动. 在有关数值实验中，的确观察到了类似小球先沿鞍点的稳定轨道滚向鞍点又沿鞍点的不稳定轨道远离鞍点的那一幕，在此之后轨道才被吸引到一个膨胀了的吸引子上[10].

激变现象的发现及其机制的研究彰显了从参数空间和相空间整体上来观察和讨论非线性动力学问题的必要性. 从这个高度来把握系统的运动规律，我们会发现原来自然界还"暗藏玄机"，一些不动点尽管因失稳不能实现，却还在相空间中"伺机"影响真实物理世界中的运动. 物理学向来强调可观察量，根据非线性动力学揭示的这些现象，我们应该将可观察量理解为不仅包括那些稳定实现的常态，还包括那些只能在瞬间偶然实现的不稳定状态，或许这就是一把钥匙，能够解开自然界中许多突发的状态暴烈转变之谜.

## §5.5　非线性振子的相同步现象

非线性系统的一个重要特点是具有自组织能力，这方面的例子在波动系统中也不胜枚举，完美的自组织结构如孤立子、激波、呼吸子、涡旋、螺旋波(spiral wave)等，还有许多波斑图，虽然看起来起伏不定，也有证据说明它们的形成同样离不开自组织. 那么非线性系统是靠什么方式自发地组织起来的呢？相互独立的振子显然组织不起来，可一旦振子间存在耦合，它们就有强烈的自组织倾向. 研究表明，振子间的相同步(phase synchronization)是自组织的重要方式.

相同步在物理上并不是一个新概念. 在物理学手册上它被定义为两个振子的位相相差 2π 整数倍的情形，这时振子的位相在主值的意义上被完全锁定在一起.

我们知道,非线性系统常常存在旋转变量,如拓扑环上的角变量,因此不乏频率和位相的概念. 对于一些时序系统,循环变量有时需要根据具体情况定义,对于波动系统这个问题看起来反而比较简单,如果将一个波数为 $k$ 的复振子写做 $A_k(t)e^{i\theta_k(t)}$,位相 $\theta_k(t)$就自然而然地出现了. 不过讨论波动系统的相同步现象也会遇到其独特的问题,这在第九章和第十章中会提到.

在耦合非线性振子的情况下,相同步的概念被大大地扩展了. 研究发现,即使两个耦合振子的振幅 $A_1(t)$和 $A_2(t)$运动都是混沌的,它们的位相之差也有可能锁定于某个确定的值或在有限范围内变化. 这样,只要位相 $\theta_1(t)$和 $\theta_2(t)$满足条件

$$|m\theta_1 - n\theta_2| < \text{const.}, \tag{5-37}$$

就认为这两个振子达到了相同步,这里 $m,n$ 是正整数.

相同步是非线性振子之间或与外驱动力合作的一种方式,自然界正是通过这种方式赋予非线性系统以非凡的自组织能力. 一个振子有它内在的特征时间尺度,如果是线性振子,它的特征时间尺度或特征频率没有改变的余地;非线性振子的运动频率则可以随参数变化,如单摆的所谓线性本征频率 $\sqrt{g/l}$只是在小摆幅时的近似,它的运动频率其实是随摆幅改变的. 一般来说,非线性振子也像单摆一样,运动频率随参数改变有很大的调节余地. 振子的耦合通常伴随着能量在振子间的转移,而相同步则有助于能量有效地传递(荡过秋千的人都有这个经验),因此,在耦合非线性振子系统中,每个振子都有与其他振子达到相同步的倾向,通过调节各自的运动频率和位相,以实现振子间尽可能有效的能量交换. 研究表明,在不同条件下耦合振子之间可能选择不同的相同步方式,这决定了系统不同的能量传递状态.

20 世纪 80 年代已有关于非线性系统相同步的研究成果问世[129],在 90 年代以后这方面的研究蓬勃地发展起来,揭示出非线性系统中各种各样的相同步现象[130,131],它们大体上可归作两大类: 完美相同步和非完美相同步.

### 5.5.1　完美相同步

在耦合非线性振子系统中不同振子的位相随时间演化可能达到某种确定的依赖关系,形成完美的相同步(perfect phase synchronization). 所谓完美相同步包括了若干种形态,如两个振子的运动虽然都是混沌的,它们的轨道最终却可能完全锁在一起,实现完全同步(complete 或 identical synchronization)[129,132];也有可能振幅各自混沌运动,位相差却变为零,形成一种位相同步(phase synchronization)[133,134]. 在多振子耦合时,系统很难将所有振子都调节到相同的位相,但常可实现这样一种状态,在这个状态下任意两个振子间的位相差都是非零的常数,这种状态也可归类为完全相同步.

完全同步通常发生在子系统有完全相同的动力学性质的情况下,图 5-15 是驱

动-响应 Lorenz 振子[80]达到完全同步的一个例子，驱动系统是$(x,y,z)$，响应系统$(x,y',z')$与前者有公共变量 $x$. 它们分别满足下面的方程[130]

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \tag{5-38a}$$

$$\dot{y} = -xz + rx - y, \tag{5-38b}$$

$$\dot{z} = xy - bz, \tag{5-38c}$$

$$\dot{y}' = -xz' + rx - y', \tag{5-38d}$$

$$\dot{z}' = xy' - bz'. \tag{5-38e}$$

由图可见，驱动系统的变量 $z(t)$ 和响应系统的变量 $z'(t)$ 虽然随时间无规振荡，但响应系统的轨道 $z'(t)$ 与驱动系统的轨道 $z(t)$ 最后达到了完全同步.

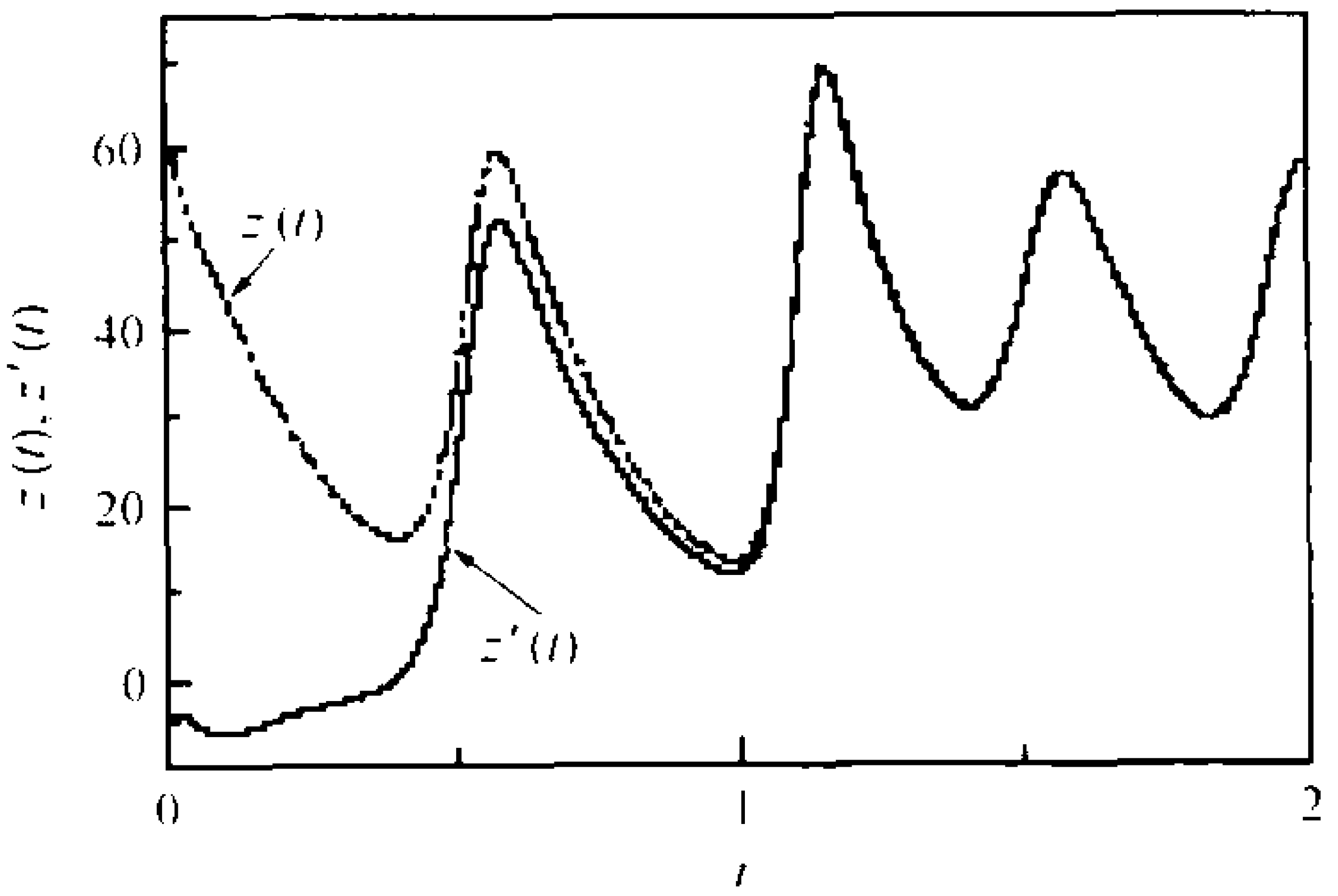



图 5-15 驱动-响应系统(5-38)的完全同步
(引自文[130])

在有的系统中两个振子可以调节到全同状态，其代价是一个振子相对于另一个出现了时间延迟，形成了所谓的延迟同步(lag synchronization)[135]. 例如，两个混沌运动的勒斯勒尔(Rössler)振子相互耦合

$$\dot{x}_{1,2} = -\omega_{1,2}y_{1,2} - z_{1,2} + c(x_{2,1} - x_{1,2}), \tag{5-39a}$$

$$\dot{y}_{1,2} = \omega_{1,2}x_{1,2} + ay_{1,2}, \tag{5-39b}$$

$$\dot{z}_{1,2} = f + z_{1,2}(x_{1,2} - c). \tag{5-39c}$$

图 5-16(a)中混沌变量 $x_2(t)$ 为 $x_1(t)$ 的函数，它们之间看不出有任何相关，但在对 $x_2(t)$ 作了适当的时间延迟 $\tau_0$ 后，在图(b)中任何 $t$ 时刻都有 $x_2(t+\tau_0)=x_1(t)$.

在更多情况下，子系统的动力学性质不相同，或运动的特征时间尺度相差太大，它们的位相不能锁定，却可实现一种确定的函数关系，这称为广义同步(generalized synchronization)[136,137]. 考虑下面的耦合 Rössler 振子

$$\dot{x}_1 = -(y_1 + z_1), \tag{5-40a}$$

$$\dot{y}_1 = x_1 + ay_1, \tag{5-40b}$$

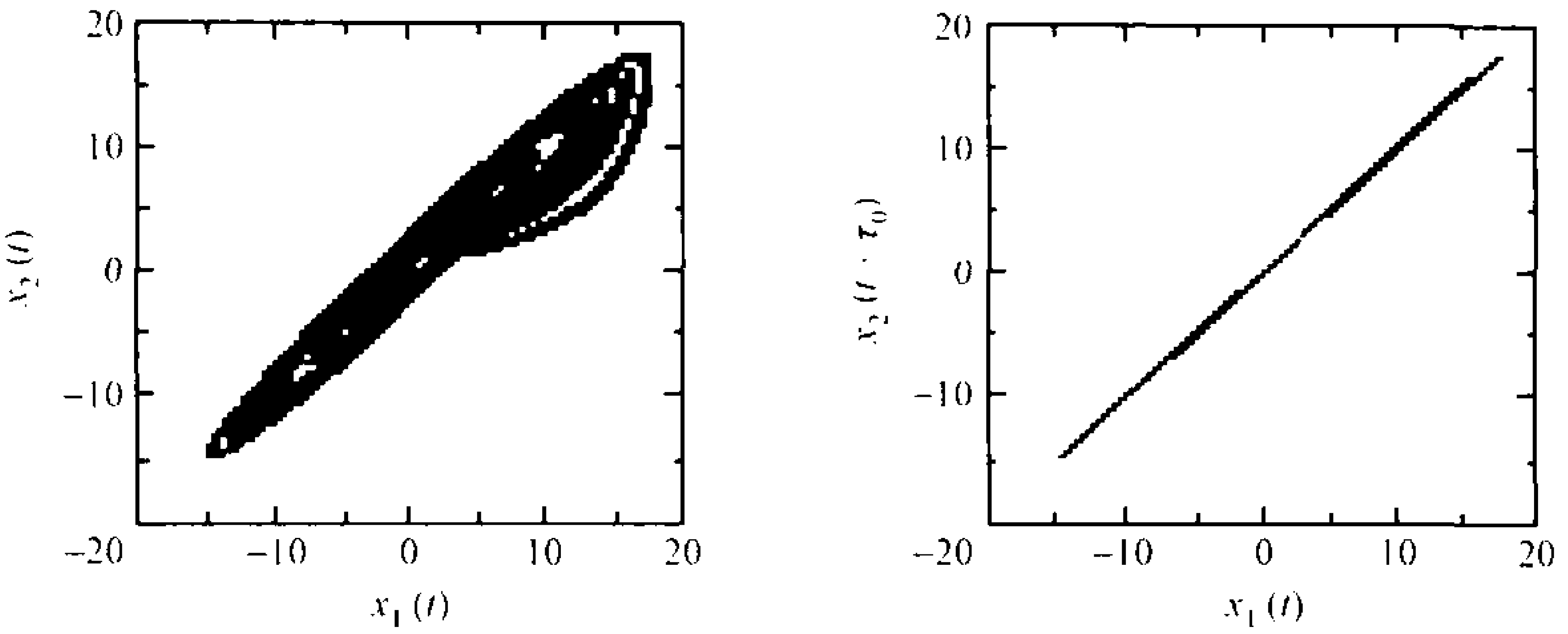
$$\dot{z}_1 = f + z_1(x_1 - \mu), \tag{5-40c}$$

$$\dot{x}_2 = -(y_2 + z_2) + \cdots + c(x_1 - x_2), \tag{5-40d}$$

$$\dot{y}_2 = x_2 + ay_2, \tag{5-40e}$$

$$\dot{z}_2 = f + z_2(x_2 - \mu), \tag{5-40f}$$

振子 1 驱动,振子 2 响应,参数为 $a=0.2$,$f=0.2$,$\mu=5.7$. 当 $c=0.2$ 时它们达到完全同步,在 $y_2(t)$作为 $y_1(t)$的函数图上轨道是对角线上的一条直线.




(a) $x_2(t)$ 作为 $x_1(t)$ 的函数　　(b) $x_2(t+\tau_0)$ 作为 $x_1(t)$ 的函数

图 5-16　耦合 Rössler 振子系统(5-39)的延迟同步
(引自文[130])

现在将响应坐标作下面的非线性变换

$$x_3(t) = x_2(t), \tag{5-41a}$$

$$y_3(t) = y_2(t) + \beta z_3(t) + \gamma z_3^2(t), \tag{5-41b}$$

$$z_3(t) = z_2(t), \tag{5-41c}$$

这样就得到了一个新的响应系统,这里 $\beta=0.4$,$\gamma=-0.008$. 因为坐标变换是光滑的,在 $c=0.2$ 时新的响应系统($x_3,y_3,z_3$)与驱动系统($x_1,y_1,z_1$)也达到了同步状态,但它们实现的是一种广义同步,在图 5-17 上 $y_3(t)$作为 $y_1(t)$的函数不是简单的对角线,这表明同步发生在一个有复杂结构的吸引子上[130]. 两个系统的变量之间存在着某种复杂的泛函关系,因此这类同步也称为泛函同步(functional synchronization).

锁频 Arnol'd 舌头现象有助于我们理解完美相同步出现的原因. 例如在耦合振子系统中,Hopf 失稳的振子可以起某种周期驱动的作用,其他振子与其频率之比有可能形成参数空间中锁频的 Arnol'd 舌头,在舌区中响应振子与驱动振子之间调节到完美相同步状态. 当然,实际情况要比这复杂,因为在耦合振子系统中,失稳振子的运动也会受到其他振子运动的影响,这造成失稳振子频率的移动.

## 5.5.2　非完美相同步

非完美相同步(imperfect phase synchronization)[138]发生在耦合系统有一个

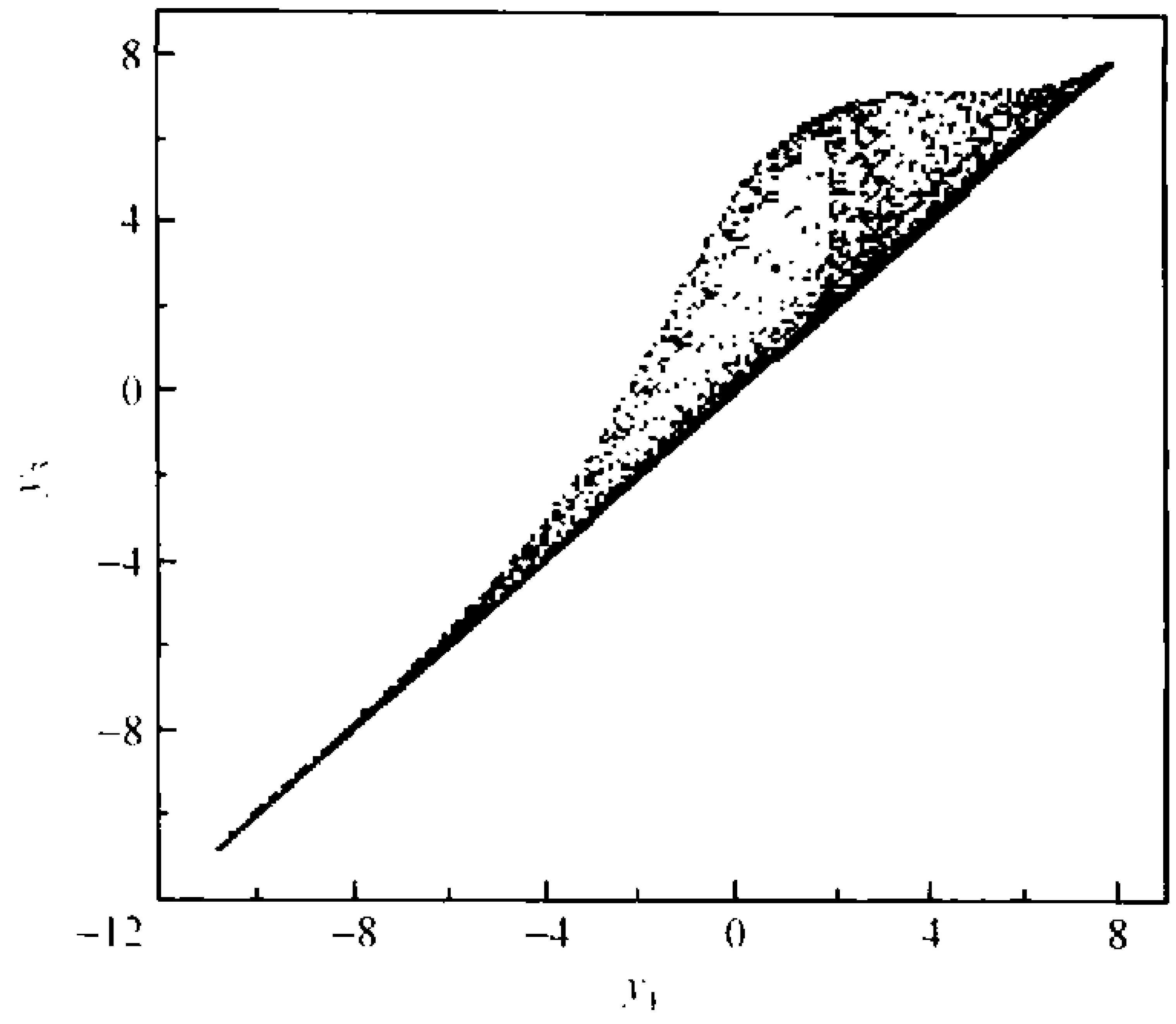



图 5-17 响应系统(5-41)与 Rössler 振子的广义同步
(引自文[130])

无穷大的特征时间尺度且它对运动起重要作用时的情形. 此时其他振子虽有相同步的强烈倾向,却找不到与之形成有理绕数的 Arnol'd 舌区以建立完美相同步,结果是,各个振子总在不停地调节它们的频率,瞬时位相差有时变得很小,几乎达到相同步,有时却又大幅跳跃超过 $2\pi$,发生所谓的位相滑移(phase slip),此后再重新开始新一轮的调节过程,如此反复,永远找不到确定的泛函关系.

在一定频率 $\Omega$ 和强度 $E$ 的周期驱动下的 Lorenz 系统[139,138]

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \tag{5-42a}$$

$$\dot{y} = - xz + rx - y, \tag{5-42b}$$

$$\dot{z} = xy - bz + E\cos\Omega t, \tag{5-42c}$$

就显示了非完美相同步. 文[138]给出控制参数 $\sigma=10, r=28, b=8/3$ 时位相差 $2\pi N(t)-\Omega t$ 随时间 $t$ 的变化,见图 5-18,这里 $N(t)$是时间 $t$ 内轨道在吸引子上的旋转数. 图中曲线呈阶梯状,出现长短不一的平台,平台上位相差保持小于 $2\pi$,轨道无序涨落表明平台上的同步态远非完美,即使这样的状态也维持不长,位相差会突然出现滑移,跳跃 $2\pi$.

本例中非完美相同步的出现,与自治 Lorenz 系统不动点的性质有关. 研究表明,在 $E=0$ 时方程(5-42)有 3 个不动点,其中$(x,y,z)=(0,0,0)$是一个鞍点,另外两个不动点是$(\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, b(r-1))$,在 $x$-$z$ 平面上它们关于 $x=0$ 轴对称. 我们知道,鞍点对微扰的响应有零本征频率,它为自治 Lorenz 系统提供了一个无穷长的特征时间尺度,在图 5-18 的参数下外周期驱动找不到与之形成完美相同步的 Arnol'd 舌头. 由于同样原因,两个耦合 Lorenz 振子出现的相同步也可以是非完美的.

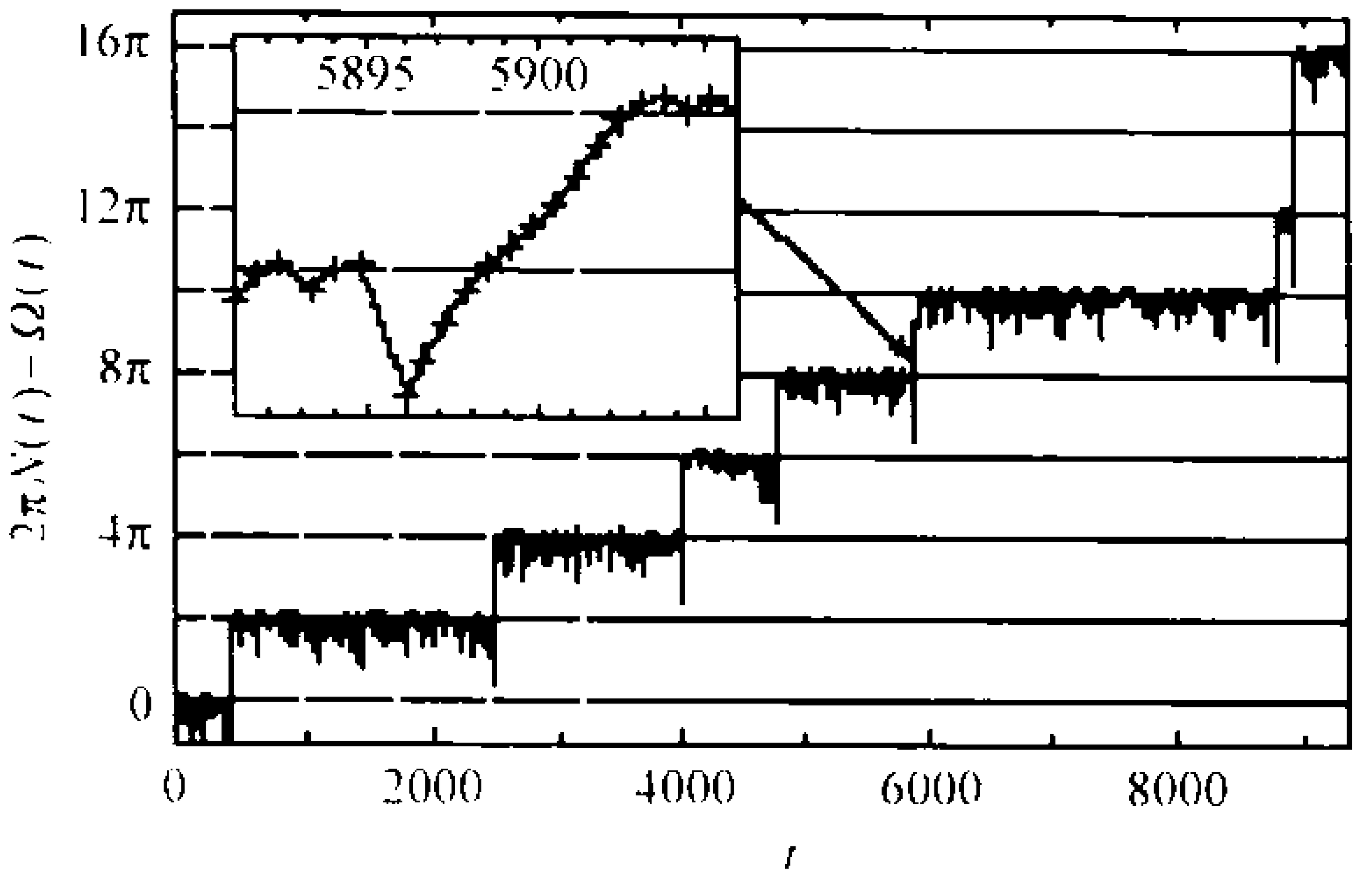
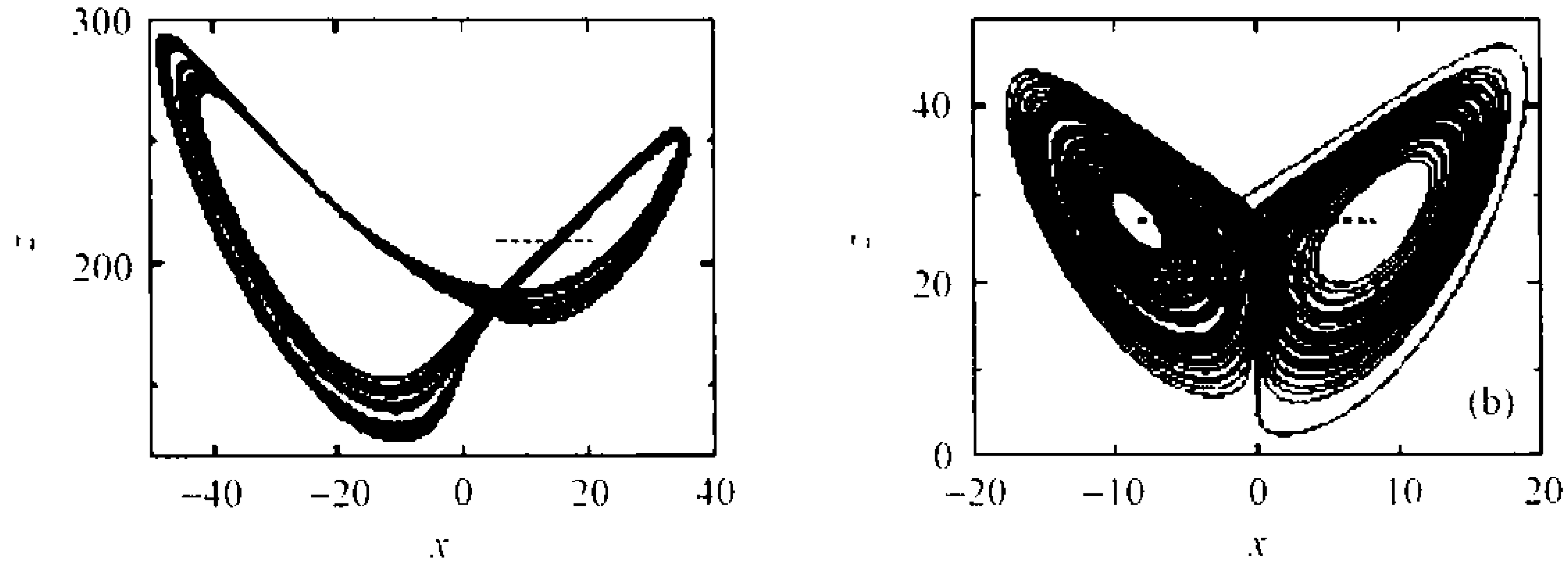



图 5-18　周期驱动的 Lorenz 振子系统(5-42)的非完美相同步.
小插图是出现相滑时的细部
(引自文[138])

不过,系统中存在无穷长的特征时间尺度并不总是引起非完美相同步,如在 $r=210$ 时弱驱动下的系统(5-42)就可以实现完美相同步,其状态与图 5-18 迥然不同,其原因再次可从自治 Lorenz 振子的运动得到理解. 图 5-19 比较了 $E=0$ 时不同参数 $r$ 下方程(5-42)的轨道在 $x$-$z$ 平面上的投影,图(a)中参数 $r=210$,图(b)中参数 $r=28$,它们都交替地围绕着关于 $x=0$ 轴对称的两个不动点混沌地旋转,在图(a)的参数下吸引子距离鞍点(0,0,0)甚远,即使有弱的外驱动,鞍点的影响也几可忽略,有条件实现完美相同步;在图(b)的参数下吸引子轨道在离鞍点比较近的相空间区域中运动,在外周期力下轨道很容易被驱动到鞍点附近,此时轨道演化的特征时间尺度被鞍点所控制,难以与外驱动达到完美相同步. 因此,鞍点的存在并不是非完美相同步出现的充分条件,只有在轨道运动过程中鞍点不时地在物理上接近实现,才会引起非完美相同步.




(a) $r=210$,吸引子远离鞍点(0,0,0)　　(b) $r=28$,吸引子轨道常常经过鞍点附近

图 5-19　无驱动($E=0$)Lorenz 系统(5-42)的吸引子轨道在 $x$-$z$ 平面上的投影
(引自文[139])

非线性波动系统中也观察到了非完美相同步,这类相同步是强湍流状态所特有的,与时序系统类似,嵌入在混沌吸引子中的鞍点也起了关键作用,这个现象将

在第十章中讨论.

## § 5.6 混沌吸引子和混沌鞍

我们知道,吸引子是时间趋向无穷大时在相空间中轨道点的集合,如果在吸引子上的轨道运动是混沌的,这个吸引子就叫做混沌吸引子(chaotic attractor). 与混沌吸引子相对的概念是混沌鞍(chaotic saddle),它是一个非吸引的混沌点集(non-attracting chaotic set)[140~143,127].

混沌吸引子也被称为奇怪吸引子(strange attractor),吸引子上的轨道以极为复杂的形式蜿蜒和缠绕,却从不相交,并且从相空间中相邻两点出发的轨道总是指数地分开. 之所以称这类吸引子是奇怪的,重要原因是它在相空间中有分数维数,例如在 2 与 3 之间某个非整数值的维数. 为讨论相空间中这样的几何结构,定义了不同的维数概念,还发展了从实验数据计算吸引子维数的各种方法[144~146].

设 $t=0$ 时有两条轨道分别从(混沌或非混沌的)吸引子上相邻两点出发,两点距离为 $|\underline{x}_1(0)-\underline{x}_2(0)|=d_0$,在 $t$ 不是很大时假设轨道间距离变化有指数形式

$$|\underline{x}_1(t)-\underline{x}_2(t)|=d_0\mathrm{e}^{\lambda t},\tag{5-43}$$

显然,如果 $\lambda<0$ 两条轨道随 $t$ 增长越来越靠近,$\lambda=0$ 时距离不变,$\lambda>0$ 时两条轨道将指数地分开,这样,$\lambda$ 可用于描写吸引子上轨道平均收敛和发散的性质,称为李雅普诺夫(Lyapunov)指数[10].

因为在相空间不同方向上轨道间距被拉伸或收缩状态一般不相同,对轨道运动特征更细致的描写需要一个 Lyapunov 指数谱. 考虑系统

$$\dot{\underline{x}}=\underline{F}(\underline{x}),\tag{5-44}$$

设 $\underline{x}_0(t)$是从某个初始相点出发的轨道,$\underline{x}(t)$是从相邻的另一个相点出发的轨道,用泰勒展开得

$$\underline{F}(\underline{x})=\underline{F}(\underline{x}_0)+\left.\frac{\mathrm{d}\,\underline{F}}{\mathrm{d}\,\underline{x}}\right|_{\underline{x}_0}\cdot(\underline{x}-\underline{x}_0)+\cdots,\tag{5-45}$$

注意这里导数

$$\underline{\lambda}\equiv\left.\frac{\mathrm{d}\,\underline{F}(\underline{x})}{\mathrm{d}\,\underline{x}}\right|_{\underline{x}_0(t)}\tag{5-46}$$

是沿轨道 $\underline{x}_0(t)$计算的,$\underline{\lambda}(t)$各个分量沿轨道的时间平均值分别给出了相空间中 $N$ 个方向上的 Lyapunov 指数,它们刻画了在相空间不同方向上吸引子轨道的拉伸和收缩特征. 当至少有一个 Lyapunov 指数大于零时,吸引子是混沌的,从任何相邻两个相点出发的轨道都将指数地分开[10]. 对于依赖于时间空间变量的系统中轨道运动的 Lyapunov 指数问题,也有文章作了讨论[147].

庞加莱截面也是刻画吸引子的重要手段,其方法在前面已有介绍,这里不再重复. 此法对于判断吸引子在低维拓扑环(不动点、极限环和二维环)上的运动状态十

分有效. 在实际问题中常遇到高于二维的拓扑环,很难将它们的庞加莱截面图与混沌运动的严格区别开来. 在这种情况下,常需要辅之以其他传统手段,如计算相关函数或运动的频率谱等,在涉及空间变量时还要计算波数谱,以分析运动流形的状态.

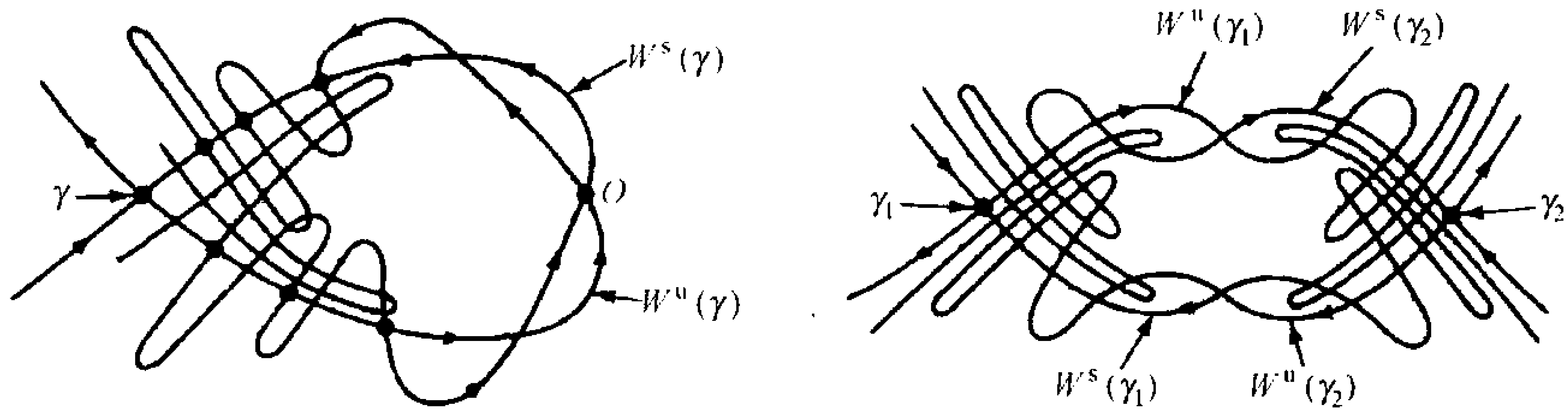
在数值计算中通常使用快速傅里叶变换(fast Fourier transform,FFT)作谱分析,若时间步长为 $\Delta$,在第 $k$ 个步长上测量的值为 $f(k\Delta)=f_k(k=1,2,\cdots,N)$,则该序列的 FFT 变换为

$$f(\omega_n) = \Delta\sum_{k=0}^{N-1} f_k \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} kn/N}, \tag{5-47}$$

这里频率 $\omega_n=n/N\Delta$. 如此得到的谱 $f(\omega_n)$ 有低频分辨 $1/N\Delta$ 和高频分辨 $1/\Delta$. 减少时间步长 $\Delta$ 可以提高高频分辨,增加序列总长度 $N\Delta$ 可以改善低频分辨,它们需要根据系统运动的具体情况来选择. 有规运动的傅里叶谱是线谱,如果能够分辨出 $M$ 个独立频率,可以知道轨道在 $M$ 维拓扑环上运动. 一般能分辨出 4~5 个独立频率已属不易,因此对于波动这样自由度很高的系统,要想判断运动是否真的变得混沌,计算 Lyapunove 指数还是必要的.

混沌鞍这个概念听起来很抽象,其实与它相关的物理现象是很多人都非常熟悉的. 例如所谓的"混沌暂态"(chaotic transient)[illegible]指的是从某个初始条件出发的轨道,在弛豫到渐近的有规状态之前,通常会经历一段看似混沌的运动,这个现象在物理和数值实验中几乎司空见惯;有时混沌暂态如此之长,观察者甚至以为已经弛豫到混沌吸引子了,殊不知运动仍处于一个超暂态(supertransient)[111,110],这之后轨道会突然收敛到有规变化的终态上去.

混沌暂态的出现是因为在相空间中除吸引子外还存在着混沌鞍[111,110],混沌鞍与相空间中残存的一些失稳了的不动点或周期轨道以及与它们相联系的稳定和不稳定流形有关. 所谓稳定/不稳定流形(stable/unstable manifold,记作 $W^s/W^u$)是这样一些相点 $\underline{x}$ 的集合,当时间向前/反演时从相点 $\underline{x}$ 出发的轨道导向不动点或导向周期运动的闭合曲线. 由非线性动力学理论可知,稳定流形和不稳定流形可以出现同宿交叉(homoclinic intersection)或异宿交叉(heteroclinic intersection). 以二维映射为例,图 5-20(a)是不动点 $\gamma$ 的稳定流形 $W^s(\gamma)$ 和不稳定流形 $W^u(\gamma)$ 之间的同宿交叉,(b)是不动点 $\gamma_{1,2}$ 的稳定流形 $W^s(\gamma_{1,2})$ 和不动点 $\gamma_{2,1}$ 的不稳定流形 $W^u(\gamma_{2,1})$ 之间的异宿交叉. 由图可见,稳定流形 $W^s$ 和不稳定流形 $W^u$ 在相空间中相互纠缠,混沌鞍则是它们的交集(intersection). 设想轨道点若偶然落在 $W^s$ 附近,显然它将在这里停留较长时间直到被 $W^u$ 排开,轨道离 $W^s$ 越近则停留时间越长,在 $W^s$ 和 $W^u$ 相互纠缠的背景下,轨道反复地经历这样的吸引和排斥过程,这就形成了混沌暂态,直到轨道最终落到吸引子上. 研究表明,混沌鞍有分数维数,平均而言,它的维数越接近相空间的维数,暂态持续时间越长[111].




(a) 同宿交叉　　(b) 异宿交叉

图 5-20　稳定流形和不稳定流形的同宿交叉和异宿交叉
(引自文[10])

混沌鞍与非线性系统的许多运动现象有关,在宏观和微观系统中都很重要.除混沌暂态外,还有如吸引盆的分形边界、混沌散射和内部激变引起的阵发现象等都与混沌鞍有关[148~150,126,151,152].例如,在引起吸引子膨胀的内部激变发生过后,激变前的吸引子变成了混沌鞍,它嵌在膨胀了的吸引子中,当轨道运动到混沌鞍附近时,就会短暂地表现出在激变前的吸引子上运动的特征,引起阵发现象[153];又如在混沌流中对流粒子表现出的非平凡分布,就可归因于嵌入混沌鞍"骨架"的作用[154].寻找混沌鞍,将有可能预言这些现象的统计行为.

人们已经发展了一些数学方法根据暂态数据寻找混沌鞍的稳定流形,如 Sprinkler 方法[155,156]和 PIM 三角方法(proper interior maximum triple algorithm)[157].以 Sprinkler 方法为例,它计算从不同初始点出发的轨道在设定的相空间目标区域中停留的时间,如果停留时间足够长,就认为该点在稳定流形附近,这些初始点的集合就构成了混沌鞍的稳定流形.

## § 5.7　时空混沌和湍流

随着时序系统的混沌动力学研究的进展,人们开始思考所谓的时空混沌(space-time chaos)现象,期望以此回答悬而未决的湍流起因问题[158~161].然而,浏览有关研究论文会发现,"时空混沌"这个术语并没有统一和明确的含义,一些文章简单地将在空间延展系统中的混沌现象统称为时空混沌,也有学者将空间结构的无规变化看做空间混沌,并思考时间混沌和空间混沌之间存在相关还是各有起因这样的问题[71].1983 年,Bishop 等人在模拟有周期驱动和耗散的 sine-Gordon 方程时就发现,空间对称相干结构与时间混沌运动阵发地出现,它们相互影响和竞争[158].

很难想象波动的时间行为和空间行为可以截然地分开.在第三章的最后我们已经指出,一个描写波动的偏微分方程可以变换为模式空间中的一个时序系统,尽

管理论上模式空间有无穷维，但无穷小空间尺度的模式总不可能在日常所见的波动状态中起决定作用，实际起重要作用的应该只有有限维. 这样，当我们把波动视为不同尺度模式的耦合运动时，每个模式既携带一定的空间信息，它的演化又给出与时间有关的信息，波动的时空演化，也就取决于这些模式的演化.

当然，这并不是说空间延展系统的非线性动力学没有其特有的问题. 首先，它允许出现各种空间相干结构，"相干"(coherent)一词在字典上解释为"黏在一起的，一致的，连贯的"，事实上，相干结构是不同尺度的模式，包括它们的振幅和相位，以一种十分和谐的方式"黏在一起""一致地"运动的结果，孤立波、涡旋等就属于稳定的相干结构. 另一个特有问题是时空混沌，在本书中，我们将时空混沌理解为这样一种状态：不仅运动的时间行为表现得混沌，而且它的空间相干性也遭到了破坏. 讨论时空混沌，是希望有助于从动力学的角度去理解湍流起因.

在非线性动力学研究中，湍流这个词也包含了比较宽泛的概念，如光学湍流[162]、液晶等二维以上介质中的缺陷湍流(defect turbulence)[163]、相湍流(phase turbulence)[164]等等，本书主要关心的则是流体湍流. 在流体和等离子体中，湍流是与层流(laminar flow)相对的概念，严格地说，层流是流体在平行层中流动的状态，在每一层中的运动速度都是常数，而湍流中速度随时间和空间都很快地变化. 在等离子体物理中还将湍流从现象上分为两类：弱湍(weak turbulence)和强湍(strong turbulence). 后者也称做充分发展的湍流(fully-developed turbulence)，弱湍的波形随时间变化缓慢且十分光滑，强湍波动更加起伏不定，如果用集体运动的能量 $E_W$ 与粒子热能 $E_T$ 之比来界定，当 $E_W<E_T$ 时称为弱湍，否则为强湍. 在本书中用层流一词时通常指的是有别于强湍流的状态，在这种状态下波动都是空间有规的.

1922 年 L. F. Richardson 在"Weather Prediction by Numerical Process"中这样生动地描述一个充分发展的湍流(转引自文[165])：

Big whorls have little whorls,
Which feed on their velocity;
And little whorls have lesser whorls,
And so on to viscocity.

这首小诗说出了强湍流的一个最重要的特点，这就是能量的级联：大尺度结构的运动能量逐次地向小尺度的转移，直到在黏性(粒子碰撞)水平上被耗散. 关于流体湍流的实验和理论研究已经揭示了湍流态的一些重要性质，这方面有大量的文章和专著，这里只作个简要介绍.

早在 20 世纪 40 年代，苏联物理学家 Kolmogorov 在研究充分发展的湍流时，通过量纲分析得到了一个非常重要的结论，这就是湍流能量随波数 $k$ 的变化遵循下面的幂律[15]

$$E(k) \sim k^{-5/3}, \tag{5-48}$$

后来这个幂律分布又以较严格的方式在一定假设下导出，在文献中被称为湍流的 Kolmogorov 谱，它得到了大量观测数据的支持[3]. 例如，在风洞等实验中，可在跨越大约 3 个量级的波数范围中观测到与 Kolmogorov 幂律一致的能谱. 遵循幂律分布(5-48)的波段范围被称为湍流的惯性区(inertial range).

著名的纳维-斯托克斯(Navier-Stokes)方程常被用于讨论流体湍流运动，方程有下面的形式

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \boldsymbol{v}, \tag{5-49}$$

这里 $\boldsymbol{v}(t)$是流体的速度，方程右边含 $\mu$ 的项描写黏滞效应，其他各项，如对流项和压强项，我们在第三章中讨论 KdV 方程的导出时已经熟悉了. 如果仅有耗散没有驱动，湍流终将因初始能量被耗散而趋于寂静，因此在讨论湍流现象时，常需要在上面速度演化方程的右边加上一个驱动项 $\boldsymbol{f}$. 计算机模拟也从理论上证实了充分发展湍流的能量存在具有幂律分布的惯性区.

U. Frisch 的"Turbulence"一书介绍了关于流体湍流的不少理论和实验研究结果[3]，就我们关心的向湍流转变的机制而言，有几个结果特别值得注意：

首先，从层流向湍流的转变，伴随着某种对称性的改变. 典型的实验是在沿水平 $x$ 方向的均匀流场 $\boldsymbol{V}=(V,0,0)$中放置一个直径为 $L$、在 $z$ 方向无限长的圆柱，观察当雷诺数(Renolds number，定义为 $Re=LV/\nu$，其中 $\nu$ 是黏滞率)改变时绕球的流体运动. 在小雷诺数时，流场有许多对称性质，如在 $x$-反演、$y$-反演以及时间平移和空间平移下的不变性，它们是 Navier-Stokes 方程和边界条件所允许的；随着雷诺数增加，这些对称性逐步丧失，然而，在雷诺数极高的湍流情形下，在统计意义上系统又出现部分或全部地恢复对称性的趋势.

其次，曾有分析认为，湍流变量的演化曲线有自相似(self-similarity)特点，我们知道，典型的自相似运动是布朗运动，若将它的速度信号作高频滤波，分析频率大于 $\Omega$ 的滤波信号的统计性质，再放大频率 $\Omega \to \lambda\Omega$，它的统计特性不会改变. 然而，在对湍流的高频滤波信号作分析时，人们发现，湍流更像有阵发的特点，如果在滤波信号的时间曲线上滑动固定大小的窗口，会发现窗口中的曲线时而振荡幅度很大，时而显得十分安静.

此外，随着摄像机等现代测量工具的广泛使用，在湍流场中探测到一些细微的空间相干结构，它们呈涡旋丝状，相互纠缠，时生时灭，它们是湍流中一些高涡度、低耗散的区域. 如在高雷诺数三维湍流的数值模拟中观察到阵发出现的涡旋丝[166,167]，在氦 4 超流湍流中找到了涡旋丝存在的证据[168,169]，在太阳光球中还发现了以磁通量管的形式出现的涡旋丝[3,170,171]. 这些现象都说明湍流运动并不像白噪声那样真正无序，它也会出现一定的空间相干，只是相干结构的尺度很小，形状

不规则并且不稳定. 这一现象强烈地提示我们,即使像湍流这样随时空高度无规变化的状态中也存在着自组织行为,它增强了人们的信心:湍流是有可能从动力学上被认识的.

人们自然想知道,通向湍流,或更广义地,通向时空混沌,是否也存在特定的动力学途径,就像在非线性时序系统中那样,从不动点——如果波动系统中也有这个概念的话——开始,经过清楚的分岔序列,最终发展为湍流状态. 这是一个很诱人的想法,不过,在试图探讨这些问题之前,让我们在下一章先讨论波-波相互作用这个波动中最基本的非线性过程,描写波-波相互作用的方程仍属于低维的非线性时序系统范畴.

# 第六章　波-波相互作用

非线性波动系统模式间能量转移的基本过程是波-波相互作用或称为模-模耦合，这在第二章中已经提到. 在那些关于待解函数有二次非线性的波动系统中，波矢量满足关系

$$\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2 + \boldsymbol{k}_3 = 0 \tag{6-1}$$

的 3 个波动模式称为共振三波，如果其他模式的作用可以被忽略(例如因它们的振幅很小)，就可以将非线性波截断到只有 3 个共振模式相互作用的封闭系统，称为三波相互作用(three-wave interaction)系统. 三波相互作用可被看做是具有二次非线性项的波动方程的元过程，如果波动方程有三次非线性项，其元过程将是四波相互作用. 波-波相互作用的运动由一组耦合的常微分方程描写，属于非线性时序系统问题，本章限于讨论三波相互作用的动力学.

光学参量器件利用的所谓"参量效应"(parameter effect)其实就是一种共振波-波相互作用，不过三波中有一个是外输入的泵波，通过在非线性光学晶体中的受激拉曼散射(stimulated Raman scattering)、受激布里渊散射(stimulated Brillouin scattering)等非线性过程[56,58]，泵波被转换成一定波长的出射波. 光学参量器件在通讯、光雷达、国防军工乃至医疗等各个领域都有广泛应用价值.

本章利用第三章导出的几个不同形式的非线性漂移波方程，在共振三波截断下讨论它们的模-模耦合过程. 先从在垂直于磁力线的平面上运动的保守非线性漂移波系统出发，建立一个简化的三波模型，它是一个可积的哈密顿系统，运动流形是不变环. 在此基础上我们逐步将漂移波的各种复杂因素加入其中，如耗散效应、沿磁力线的平行流引起的漂移波与离子声波的耦合等，讨论在这些效应的作用下，原来可积的三波相互作用运动的不变环流形将出现怎样的改变，特别地，其中一个理论模型明确地显示了向混沌转变的 Ruelle-Takens 途径.

## §6.1　保守的波-波相互作用

### 6.1.1　可积的漂移三波哈密顿系统

从描写在垂直于磁力线的二维平面上运动的非线性漂移波的 Hasegawa-Mima 方程(3-51)

$$\frac{\partial}{\partial t}(1 - \nabla_{\perp}^2)\phi + \frac{\partial \phi}{\partial y} - [\phi, \nabla_{\perp}^2 \phi] = 0, \tag{6-2}$$

可建立起一个简化的可积三波相互作用哈密顿系统[172]. 三波过程是含二次非线性项的波动系统模-模耦合最基本的构件，更复杂的相互作用都是在此基础上建立起来的.

将系统的解 $\phi(\boldsymbol{x},t)$ 展开成不同波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的傅里叶模式之和

$$\phi(\boldsymbol{x},t)=\sum_{\boldsymbol{k}}\phi_k(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}},\tag{6-3}$$

这里 $\phi_k(t)$ 是复振幅，有 $\phi_{-k}=\phi_k^*$，星号表示复共轭，代入方程(6-2)，利用$[\phi,\nabla_\perp^2\phi]=\hat{z}\cdot[\nabla_\perp\phi\times\nabla_\perp\nabla_\perp^2\phi]$，得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_{\boldsymbol{k}}(1+k_\perp^2)\phi_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}+\mathrm{i}\sum_{\boldsymbol{k}}k_y\phi_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}-\sum_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}}(\hat{z}\cdot\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n})n_\perp^2\phi_m\phi_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{x}}=0,\tag{6-4}$$

式中 $k_\perp$ 和 $k_y$ 分别是波矢量 $\boldsymbol{k}$ 在垂直于磁场的平面上和在 $\hat{y}$ 方向上的投影. 假设 $2\pi$ 周期边界条件，波矢量 $\boldsymbol{k},\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}$ 将取整数值. 交换方程左边最后一项中的求和指标，两边乘以 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}}$，并对 $x$ 从 0 到 $2\pi$ 积分，利用

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-k')x}\mathrm{d}x=\delta_{k,k'},\tag{6-5}$$

得到关于模式 $\phi_k(t)(k=0,1,2,\cdots,\infty)$ 的演化方程

$$\frac{\partial}{\partial t}(1+k_\perp^2)\phi_k+\mathrm{i}k_y\phi_k-\sum_{\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}=\boldsymbol{k}}\frac{1}{2}(\hat{z}\cdot\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n})(n_\perp^2-m_\perp^2)\phi_m\phi_n=0,\tag{6-6}$$

这里已略去 $\boldsymbol{k}'$ 的上标，求和对所有满足条件 $\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}=\boldsymbol{k}$ 的波矢量进行. 系统(6-6)的能量为

$$W=\frac{1}{2}\int[\phi^2+(\nabla_\perp\phi)^2]\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\sum_{\boldsymbol{k}}W_k=\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}}(1+k_\perp^2)\mid\phi_k\mid^2.\tag{6-7}$$

方程(6-6)是一个保守体系，容易验证 $\mathrm{d}W/\mathrm{d}t=0$.

将方程(6-6)截断到满足共振条件 $\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2+\boldsymbol{k}_3=0$ 的 3 个共振模式，就可建立起一个三波相互作用系统. 作为讨论保守三波动力学的一般模型，我们将它写做更简约的形式[172]：

$$\frac{\mathrm{d}\phi_j^*}{\mathrm{d}t}=\mathrm{i}\omega_j\phi_j^*-AF_j\phi_l\phi_m,\tag{6-8}$$

这里，星号表示复共轭，$\{j,l,m\}$ 是 $\{1,2,3\}$ 的轮换（下同），$\omega_j\equiv k_y/(1+k_\perp^2)|_j$ 是波数为 $k_j$ 的模式的线性频率，非线性项中的系数 $A\equiv\frac{1}{2}\hat{z}\cdot\boldsymbol{k}_l\times\boldsymbol{k}_m$，$F_j\equiv k_{l\perp}^2-k_{m\perp}^2$.

三波方程(6-8)保留了漂移波模式方程(6-6)两个重要性质：每个模式 $\phi_j^*$ 有一个线性振荡频率 $\omega_j$，同时三波之间存在能量交换，由非线性项 $AF_j\phi_l\phi_m$ 描写，其中 $A$ 是 3 个波矢量包围的三角形面积（参考图 2-3），它决定了三波相互作用的强度，$F_j$ 满足关系

$$\sum_{j=1}^{3} F_j = 0, \tag{6-9}$$

这保证了非线性项不会造成系统整体能量的耗散或增益，计算三波系统的能量（现在是 $W = \sum_k |\phi_k|^2/2$）可以验证这一点.

读者可能已经注意到，模式线性频率 $\omega_j$ 表达式分母中 $k_\perp^2$ 这一项来自于原波动方程(6-2)中混合导数项$\frac{\partial}{\partial t}\nabla_\perp^2\phi$. 在第三章中我们知道，混合导数这一项是极化漂移引出的，对系统的色散行为有重要影响，如限制了小尺度结构运动的群速度等. 三波模型不关心波动的空间结构形成和它们的运动，在方程(6-8)中混合导数项的作用仅以修正线性频率的形式包括进来，因此波-波相互作用模型在物理上有很大的局限性. 在讨论空间延展系统非线性波的动力学时，我们将看到，与混合导数项$\frac{\partial}{\partial t}\nabla_\perp^2\phi$相关的线性色散对非线性波的演化起着异常重要的作用.

将复模式 $\phi_j(t)$用实振幅 $a_j(t)$和实位相 $\alpha_j(t)$来表示

$$\phi_j(t) = a_j(t)\exp[\mathrm{i}\alpha_j(t)], \tag{6-10}$$

代入方程(6-8)，分开实部和虚部，得到 6 个变量$\{a_j\}$和$\{\alpha_j\}$的非线性耦合方程组：

$$\frac{\mathrm{d}a_j}{\mathrm{d}t} = -AF_j a_l a_m \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), \tag{6-11a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\alpha_j}{\mathrm{d}t} = -\omega_j + AF_j \frac{a_l a_m}{a_j}\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3). \tag{6-11b}$$

令 $\alpha(t)=\alpha_1(t)+\alpha_2(t)+\alpha_3(t)$，三波系统(6-11)进一步约简为关于$\{a_j(t)\}$和 $\alpha(t)$这 4 个独立变量的封闭方程组：

$$\frac{\mathrm{d}a_j}{\mathrm{d}t} = -AF_j a_l a_m \cos\alpha, \tag{6-12a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = -\Delta\omega + A\sum_{j,l,m} F_j \frac{a_l a_m}{a_j}\sin\alpha, \tag{6-12b}$$

这里，$\Delta\omega \equiv \sum_j \omega_j$ 是 3 个共振模式线性频率的失谐(mismatching).

三波系统(6-12)的有效能量为

$$W = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3} a_j^2, \tag{6-13}$$

它是系统的一个运动常数，$\mathrm{d}W/\mathrm{d}t=0$. 相空间中的体积元是

$$\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\prod_{j=1}^{3}\mathrm{d}a_j^2\,\mathrm{d}\alpha, \tag{6-14}$$

因为是保守系统，相体积是守恒的，有

$$\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{3}\left[\frac{1}{a_j}\frac{\partial}{\partial a_j}\left(a_j\frac{\mathrm{d}a_j}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\right] = 0. \tag{6-15}$$

定义

$$I_j = a_j^2/F_j, \tag{6-16}$$

三波系统(6-11)可以由下面的哈密顿量描写

$$H = -\sum_{j=1}^{3}\omega_j I_j + 2A(F_1F_2F_3)^{1/2}(I_1I_2I_3)^{1/2}\sin(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3), \tag{6-17}$$

这里$\{I_j\}$和$\{\alpha_j\}$分别是正则动量和正则坐标. 在第四章中我们已经知道,哈密顿系统的相体积元由正则变量来定义,这也是为什么选择三波系统(6-12)的体积元有(6-14)形式的原因.

系统(6-17)的哈密顿方程为

$$\frac{\mathrm{d}I_j}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial \alpha_j} = -2A(F_1F_2F_3)^{1/2}(I_1I_2I_3)^{1/2}\cos(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3), \tag{6-18a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\alpha_j}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial I_j} = -\omega_j + A(F_1F_2F_3)^{1/2}\left(\frac{I_lI_m}{I_j}\right)^{1/2}\sin(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3). \tag{6-18b}$$

哈密顿量(6-17)中含 $A$ 的项 描写三波之间的相互作用, 当 $A\to 0$ 时,$H\to -\sum_{j=1}^{3}\omega_j I_j$,它正是在第二章中已经熟悉的独立线性谐振子的哈密顿量,只是这里有 3 个线性振子. 那么,当 $A\neq 0$ 即这 3 个振子之间出现共振波-波相互作用时,系统有什么样的运动流形?

哈密顿量 $H$ 本身,是系统(6-18)的一个运动常数,容易找到另外几个运动常数,它们是

$$m_{lm} = I_l - I_m, \tag{6-19}$$

因为存在关系 $m_{lm}=m_{jm}-m_{jl}$,在轮换$\{j,l,m\}$得到的 3 个运动常数中,只有 2 个是独立的. 因此,包括哈密顿量 $H$ 本身在内,现在有 3 个独立运动常数,与系统自由度数目相同,从第四章关于哈密顿系统理论知道,方程组(6-18)是一个可积哈密顿系统.

为求系统的运动轨道,利用以上几个运动常数的一个线性组合作为运动常数是方便的,它是[172]

$$\begin{aligned}\Gamma &= a_1a_2a_3\sin\alpha - \frac{\Delta\omega}{6A}\sum_j\frac{a_j^2}{F_j}\\ &= \frac{1}{2A}\left\{H + \frac{1}{3}\left[(\omega_1-2\omega_2+\omega_3)m_{12} + (\omega_1+\omega_2-2\omega_3)m_{13}\right]\right\}.\end{aligned} \tag{6-20}$$

作为例子,让我们求解正则动量 $I_1(t)$的运动. 从方程(6-18)导出

$$\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{3}[P_3(I_1)]^{1/2}, \tag{6-21}$$

这里 $P_3(I_1)$是关于 $I_1$ 的一个三次多项式,它的各项系数用运动常数表示为

$$P_3(I_1) = 36A^2F_1F_2F_3I_1^3 - [(m_{12}+m_{13})36A^2F_1F_2F_3 + 9\Delta\omega^2]I_1^2$$

$$+\{36A^2F_1F_2F_3m_{12}m_{13}-3\Delta\omega[6A\Gamma-\Delta\omega(m_{12}+m_{13})]\}I_1$$
$$-[6A\Gamma-\Delta\omega(m_{12}+m_{13})]^2. \tag{6-22}$$

方程(6-21)对时间 $t$ 积分,得到

$$t-t_0=-3\int_{I_1(t_0)}^{I_1(t)}\frac{\mathrm{d}I_1}{[P_3(I_1)]^{1/2}}, \tag{6-23}$$

式(6-23)右边是一个椭圆积分,$I_1(t)$的解是它的反函数——雅可比椭圆函数.

为将 $I_1(t)$的解写成显式形式,假设 $P_3(I_1)=0$ 有 3 个根 $I_1^a\leqslant I_1^b\leqslant I_1^c$,在一定条件下找到正则动量 $I_1$ 随时间的演化为

$$I_1(t)=(I_1^b-I_1^a)\cdot\mathrm{sn}^2(\lambda t,\gamma)+I_1^a, \tag{6-24}$$

这里,$\mathrm{sn}(\lambda t,\gamma)$是雅可比椭圆函数,有周期

$$T\equiv 4K=4F\left(\frac{\pi}{2},\gamma\right)=4\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(1-y^2)(1-\gamma^2y^2)}}, \tag{6-25}$$

式中 $\lambda\equiv -A(F_1F_2F_3)^{1/2}(I_1^c-I_1^a)^{1/2}$,$\gamma\equiv[(I_1^b-I_1^a)/(I_1^c-I_1^a)]^{1/2}$.

正则坐标 $\alpha_1$ 的解也可利用运动常数从其演化方程积分求出

$$\alpha_1(t)=\left(-\omega_1+\frac{\Delta\omega}{2}\right)(t-t_0)+\frac{1}{2}(H-\omega_2m_{12}+\omega_3m_{31})\int_{t_0}^{t}\frac{\mathrm{d}t}{I_1(t)}. \tag{6-26}$$

位相 $\alpha_1(t)$除了在其线性频率附近做周期振动外,由于非线性效应,它的演化还依赖于关于正则动量 $I_1(t)$的一个积分.

用类似方法可求出其他 2 个正则动量和正则坐标的解,它们都可以用雅可比椭圆函数来表达.这样,可积哈密顿系统(6-17)的轨道被约束在六维相空间中的一个三维不变环上,运动是完全有规的.从解的表达式看,$P_3(I_1)$的 3 个根 $I_1^a,I_1^b,I_1^c$ 依赖于系统的运动常数,它们的取值决定了系统在相空间中哪个不变环上运动.图 6-1 给出正则动量 $I_1,I_2,I_3$ 随时间演化的示意图.

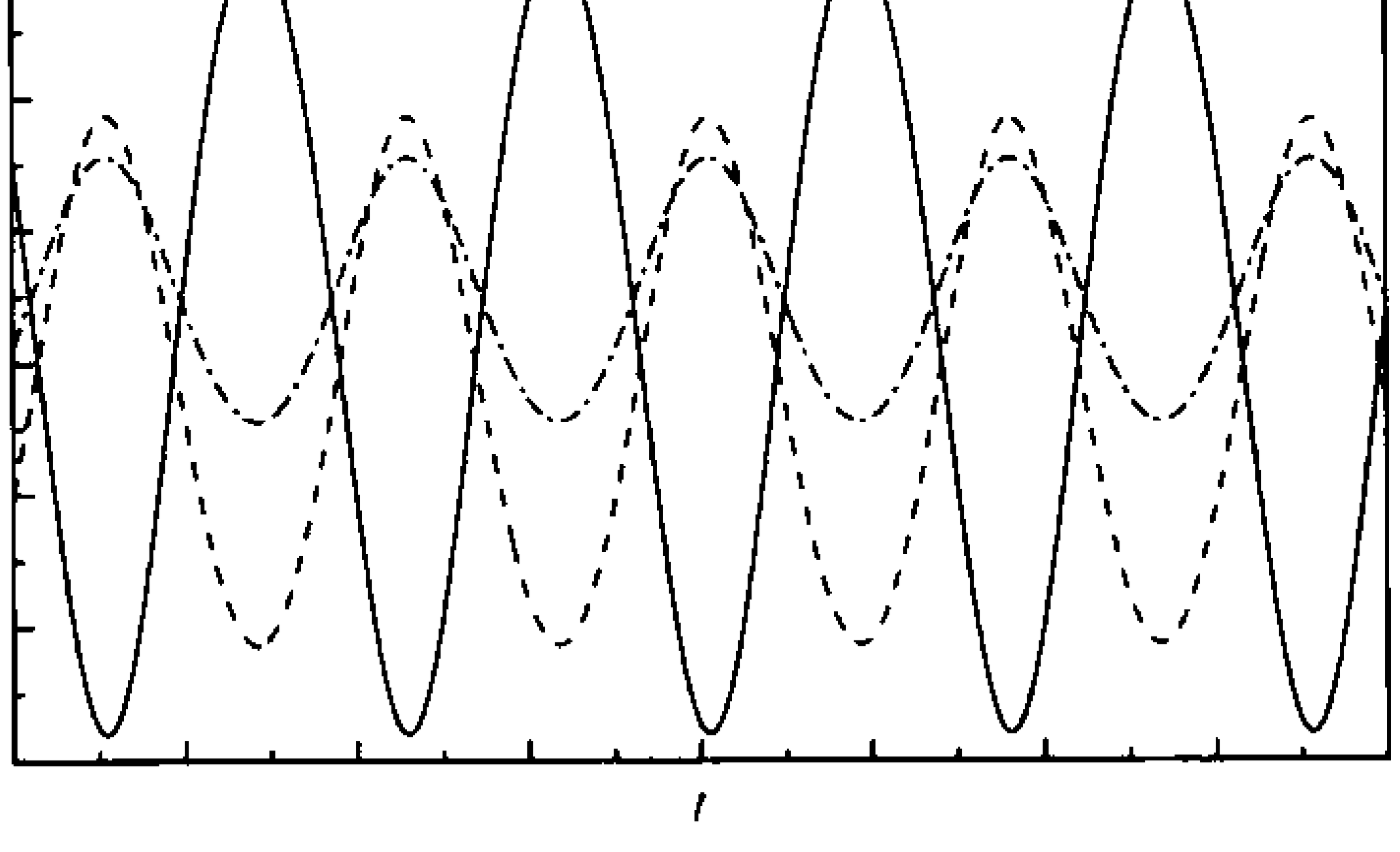



图 6-1 可积三波哈密顿系统(6-17)的正则动量随时间的演化

3 个模式周期性地交换它们的能量,当模式 $I_1$ 幅度增长时,$I_2,I_3$ 的幅度减小,

反之亦然. 这就是我们强调的非线性波动与线性波动的主要不同之处,它允许能量在不同尺度的模式间转移. 只是对于这里的保守系统,能量反复地转移和回归,在波矢量空间不存在定向的能量流. 如果是线性振子($A=0$),图中 $I_1$,$I_2$,$I_3$ 的轨道将为三条水平直线,模式间没有能量交换.

以运动常数 $m_{12}$,$m_{31}$,$\Gamma$ 作为新正则动量,哈密顿量(6-17)改写为

$$H = -\frac{1}{3}(\omega_1 - 2\omega_2 + \omega_3)m_{12} + \frac{1}{3}(\omega_1 + \omega_2 - 2\omega_3)m_{31} + 2A\Gamma, \quad (6\text{-}27)$$

我们看到,在这个新表象中系统又化为三个独立振子,它们的频率分别为: $\bar{\omega}_1 = -(\omega_1 - 2\omega_2 + \omega_3)/3$,$\bar{\omega}_2 = (\omega_1 + \omega_2 - 2\omega_3)/3$ 和 $\bar{\omega}_3 = 2A$. 在第四章中已经知道,一个有 $N$ 个自由度的可积系统,在恰当正则变换下可以解耦成 $N$ 个独立线性振子,相互之间不再有能量传递,因此可积系统的运动在本质上是线性的. 哈密顿系统(6-17)就是一个具体例子,在变换到形式为式(6-27)的表象中后,正则变量的运动将由线性方程描写.

### 6.1.2 在离子声不可积扰动下的漂移三波

三波模型(6-12)像其他可积哈密顿系统一样,运动流形为不变环. 在第四章中已经知道,对不变环的不可积扰动可能引起共振效应,如外周期驱动频率与不变环上的运动频率共振,或者有理不变环上两个运动频率之间的共振等,都可能造成扰动因小分母出现奇异增长,不变环因此被破坏. 本小节借助非线性漂移波与离子声波耦合的方程(3-56),建立一个漂移三波与离子声三波耦合的模型,它仍是一个保守的哈密顿系统,不过新增加的离子声三波自由度却破坏了原来漂移三波哈密顿系统的可积性.

当存在沿磁力线小的平行流 $J=nv_{/\!/}$ 时,第三章中已经导出相应的无量纲化运动方程有形式(3-56),这里重新写出

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\nabla_{\perp}^2\phi + \frac{\partial J}{\partial z} + \frac{\partial\phi}{\partial y} - [\phi, \nabla_{\perp}^2\phi] = 0, \quad (6\text{-}28a)$$

$$\frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial z} + [\phi, J] = 0. \quad (6\text{-}28b)$$

让我们暂时忽略等离子体电位涨落 $\phi$ 与沿磁力线方向上离子声波 $J$ 之间的非线性耦合项$[\phi, J]$,只考虑两个方程之间通过线性项 $\partial\phi/\partial z$ 和 $\partial J/\partial z$ 相互耦合,此外,和上一小节一样忽略混合导数项$\frac{\partial}{\partial t}\nabla_{\perp}^2\phi$ 的作用,在这些近似下,从方程(6-28)的三波截断可得到一个哈密顿系统[173].

没有与平行流 $J$ 耦合时,漂移波限制在垂直于磁力线的平面上运动,当存在耦合时,方程(6-28)的运动变为空间三维的,波矢量除垂直于磁力线的分量外还包含

沿磁力线的小分量，这样，$\phi$ 和 $J$ 的模式展开应为

$$\phi(\boldsymbol{x},t) = \sum_{\boldsymbol{k}} \phi_k(t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_\perp \cdot \boldsymbol{x}_\perp + \boldsymbol{k}_{/\!/} \cdot \boldsymbol{x}_{/\!/})}, \tag{6-29a}$$

$$J(\boldsymbol{x},t) = \sum_{\boldsymbol{k}} J_k(t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_\perp \cdot \boldsymbol{x}_\perp - \boldsymbol{k}_{/\!/} \cdot \boldsymbol{x}_{/\!/})}, \tag{6-29b}$$

这里下标⊥和//分别表示沿垂直和平行于磁力线方向 $\hat{e}_\perp$ 和 $\hat{e}_{/\!/}$ 的分量. 类似于节 6.1.1 的推导，将展开式(6-29)代入方程(6-28)，截断到共振三波 $\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2 + \boldsymbol{k}_3 = 0$，可得到漂移三波模式$\{\phi_j\}$与离子声三波模式$\{J_j\}$耦合的方程组.

将复振幅 $\phi_j$ 和 $J_j$ 分别用它们的实振幅和实位相表示

$$\phi_j(t) = a_j(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_j(t)}, \tag{6-30}$$

和

$$J_j(t) = b_j(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta_j(t)}, \tag{6-31}$$

只保留模式 $\phi_j$ 和 $J_j$ 通过线性项的耦合，得到关于三波模式$\{a_j, \alpha_j\}$和$\{b_j, \beta_j\}$满足的方程组为

$$\frac{\mathrm{d}a_j}{\mathrm{d}t} = \kappa_j b_j \sin(\alpha_j - \beta_j) - AF_j a_l a_m \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), \tag{6-32a}$$

$$\frac{\mathrm{d}b_j}{\mathrm{d}t} = -\kappa_j a_j \sin(\alpha_j - \beta_j), \tag{6-32b}$$

$$\frac{\mathrm{d}\alpha_j}{\mathrm{d}t} = \omega_j + \frac{\kappa_j b_j}{a_j}\cos(\alpha_j - \beta_j) + AF_j \frac{a_l a_m}{a_j}\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), \tag{6-32c}$$

$$\frac{\mathrm{d}\beta_j}{\mathrm{d}t} = \frac{\kappa_j a_j}{b_j}\cos(\alpha_j - \beta_j), \tag{6-32d}$$

这里$\kappa_j = \boldsymbol{k}_j \cdot \hat{e}_{/\!/}$ $(j=1,2,3)$是波矢量 $\boldsymbol{k}_j$ 沿磁力线的平行分量，满足 $\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 = 0$，它给出了 $\phi_j$ 与 $J_j$ 之间线性耦合的强度，系数 $A$ 和 $F_j$ 的意义同前，也有关系 $\sum_{j=1}^{3} F_j = 0$. 注意方程(6-32)和后面节 6.2.2 中的方程(6-60)描写的是模式$\{\phi_j\}$的运动，而节 6.1.1 中方程(6-11)是关于其共轭$\{\phi_j^*\}$的，因此它们的位相 $\alpha_j$ 的线性振荡频率相差一个符号.

定义相体积元为

$$\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\prod_{j=1}^{3}(\mathrm{d}a_j^2\,\mathrm{d}b_j^2\,\mathrm{d}\theta_j)\,\mathrm{d}\alpha, \tag{6-33}$$

可以证明，系统(6-32)的相体积在运动中不变.

耦合方程组(6-32)也是一个保守哈密顿系统，定义

$$I_j = a_j^2 / F_j, \tag{6-34a}$$

$$J_j = b_j^2 / F_j \tag{6-34b}$$

作为正则动量，与之共轭的正则坐标分别是 $\alpha_j$ 和 $\beta_j$，方程组(6-32)化为

$$\frac{\mathrm{d}I_j}{\mathrm{d}t}= 2\kappa_j(I_jJ_j)^{1/2}\sin(\alpha_j-\beta_j)-2A(F_1F_2F_3)^{1/2}(I_1I_2I_3)^{1/2}\cos(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3), \tag{6-35a}$$

$$\frac{\mathrm{d}J_j}{\mathrm{d}t}=-2\kappa_j(I_jJ_j)^{1/2}\sin(\alpha_j-\beta_j), \tag{6-35b}$$

$$\frac{\mathrm{d}\alpha_j}{\mathrm{d}t}=\omega_j+\kappa_j\left(\frac{J_j}{I_j}\right)^{1/2}\cos(\alpha_j-\beta_j)+A(F_1F_2F_3)^{1/2}\left(\frac{I_lI_m}{I_j}\right)^{1/2}\sin(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3), \tag{6-35c}$$

$$\frac{\mathrm{d}\beta_j}{dt}=\kappa_j\left(\frac{I_j}{J_j}\right)^{1/2}\cos(\alpha_j-\beta_j), \tag{6-35d}$$

这是一组哈密顿正则方程，相应的哈密顿量为

$$H=\sum_{j=1}^{3}\omega_jI_j+2A(F_1F_2F_3)^{1/2}(I_1I_2I_3)^{1/2}\sin(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+2\sum_{j=1}^{3}\kappa_j(I_jJ_j)^{1/2}\cos(\alpha_j-\beta_j). \tag{6-36}$$

当$\{\kappa_j\}=0$时，式(6-36)就是可积的漂移三波哈密顿量[参考式(6-17)]，含$\kappa_j$的项描写它们与离子声三波的线性耦合.

除哈密顿量$H$外，系统(6-36)还有三个运动积分，它们是

$$M_{lm}\equiv(I_l+J_l)-(I_m+J_m), \tag{6-37}$$

且存在关系$M_{lm}=M_{jm}-M_{jl}$，$\{j,l,m\}$是$\{1,2,3\}$的轮换. 对于有6个自由度的哈密顿系统(6-36)，这些运动常数不足以唯一地决定系统的运动轨道，我们将看到，与离子声平行流$\{J_j\}$的耦合，破坏了原来哈密顿系统(6-17)的可积性质.

为说明这个问题，将各变量按小量$\kappa_j$的幂次展开

$$X_j=X_j^{(0)}+\kappa_jX_j^{(1)}+\cdots, \tag{6-38}$$

这里，$X_j$表示$I_j$，$J_j$，$\alpha_j$或$\beta_j(j=1,2,3)$，代入方程(6-35)，在$\kappa_j^0$阶上得到

$$\frac{\mathrm{d}I_j^{(0)}}{\mathrm{d}t}=-2A(F_1F_2F_3)^{1/2}(I_1^{(0)}I_2^{(0)}I_3^{(0)})^{1/2}\cos(\alpha_1^{(0)}+\alpha_2^{(0)}+\alpha_3^{(0)}), \tag{6-39a}$$

$$\frac{\mathrm{d}J_j^{(0)}}{\mathrm{d}t}=0, \tag{6-39b}$$

$$\frac{\mathrm{d}\alpha_j^{(0)}}{\mathrm{d}t}=\omega_j+A(F_1F_2F_3)^{1/2}\left(\frac{I_l^{(0)}I_m^{(0)}}{I_j^{(0)}}\right)^{1/2}\sin(\alpha_1^{(0)}+\alpha_2^{(0)}+\alpha_3^{(0)}), \tag{6-39c}$$

$$\frac{\mathrm{d}\beta_j^{(0)}}{\mathrm{d}t}=0, \tag{6-39d}$$

因此，在$\kappa_j^0$阶上，$\{J_j^{(0)},\beta_j^{(0)}\}$是运动常数，它们与$\{I_j^{(0)},\alpha_j^{(0)}\}$的运动解耦，后者由零阶哈密顿量

$$H^{(0)}=\sum_{j=1}^{3}\omega_jI_j^{(0)}+2A(F_1F_2F_3)^{1/2}(I_1^{(0)}I_2^{(0)}I_3^{(0)})^{1/2}\sin(\alpha_1^{(0)}+\alpha_2^{(0)}+\alpha_3^{(0)}) \tag{6-40}$$

描写，它就是可积的漂移三波哈密顿量，我们可以显式地解出它的正则动量$\{I_j^{(0)}\}$和正则坐标$\{\alpha_j^{(0)}\}$的运动[参考式(6-24)和(6-26)]，它们的运动流形是一个三维不变环.

在$\kappa_j^1$阶上，得到平行流模式的一阶量$\{J_j^{(1)},\beta_j^{(1)}\}$随时间的演化方程为

$$\frac{\mathrm{d}J_j^{(1)}}{\mathrm{d}t}=-2\kappa_j(I_j^{(0)}J_j^{(0)})^{1/2}\sin(\alpha_j^{(0)}-\beta_j^{(0)}),\tag{6-41a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\beta_j^{(1)}}{\mathrm{d}t}=2\kappa_j\left(\frac{I_j^{(0)}}{J_j^{(0)}}\right)^{1/2}\cos(\alpha_j^{(0)}-\beta_j^{(0)}),\tag{6-41b}$$

因为右端各个零阶量已有显式解，方程(6-41)原则上可以直接积分求出. 以$j=1$为例，为简单起见取运动常数$\beta_1^{(0)}=0$，并假设$P_3(I_1^{(0)})$有一个零根为$I_1^a=0$，在这个条件下，可以说明$\alpha_1^{(0)}(t)$有下面形式简单的解

$$\alpha_1^{(0)}(t)=\left(\omega_1-\frac{\Delta\omega}{2}\right)(t-t_0),\tag{6-42}$$

代入式(6-41)，并利用$I^{(0)}$的解(式(6-24))，得到$J_1^{(1)}$的演化方程为

$$\frac{\mathrm{d}J_1^{(1)}}{\mathrm{d}t}=-2\kappa_1[I_1^bJ_1^{(0)}]^{1/2}\cdot\mathrm{sn}[\lambda(t-t_0),\gamma]\cdot\sin\left[\left(\omega_1-\frac{\Delta\omega}{2}\right)(t-t_0)\right].\tag{6-43}$$

将椭圆函数 sn 展开成傅里叶级数，有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}J_1^{(1)}}{\mathrm{d}t}&=-2\kappa_1[J_1^{(0)}I_1^b]^{1/2}\frac{\pi}{\gamma K}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{csch}\frac{(2n-1)\pi K'}{2K}\\&\quad\cdot\sin\frac{(2n-1)\pi\lambda(t-t_0)}{2K}\cdot\sin\left[\left(\omega_1-\frac{\Delta\omega}{2}\right)(t-t_0)\right]\\&=-\frac{\kappa_1\pi}{\gamma K}[J_1^{(0)}I_1^b]^{1/2}\\&\quad\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{csch}\frac{(2n-1)\pi K'}{2K}\left\{\cos\left[\left(\frac{(2n-1)\pi\lambda}{2K}-\omega_1+\frac{\Delta\omega}{2}\right)(t-t_0)\right]\right.\\&\quad\left.-\cos\left[\left(\frac{(2n-1)\pi\lambda}{2K}+\omega_1-\frac{\Delta\omega}{2}\right)(t-t_0)\right]\right\},\end{aligned}\tag{6-44}$$

将上式对时间积分，得到

$$\begin{aligned}J_1^{(1)}(t)&=-\frac{\kappa_1\pi}{\gamma K}[J_1^{(0)}I_1^b]^{1/2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{csch}\frac{(2n-1)\pi K'}{2K}\\&\quad\cdot\left\{\frac{1}{\frac{(2n-1)\pi\lambda}{2K}-\omega_1+\frac{\Delta\omega}{2}}\cdot\sin\left[\left(\frac{(2n-1)\pi\lambda}{2K}-\omega_1+\frac{\Delta\omega}{2}\right)(t-t_0)\right]\right.\\&\quad\left.-\frac{1}{\frac{(2n-1)\pi\lambda}{2K}+\omega_1-\frac{\Delta\omega}{2}}\cdot\sin\left[\left(\frac{(2n-1)\pi\lambda}{2K}+\omega_1-\frac{\Delta\omega}{2}\right)(t-t_0)\right]\right\},\end{aligned}\tag{6-45}$$

这里,$K=F(\pi/2,\gamma)$是宗量为 $\gamma$ 的椭圆函数的 1/4 周期,$K'=F(\pi/2,\gamma')$,其中,$\gamma'\equiv\sqrt{1-\gamma^2}$,$\gamma$ 和 $\lambda$ 的表达式在前面已给出. 这些量都依赖于 $P_3(I_1^{(0)})$的根 $I_1^a,I_1^b,I_1^c$,并通过它们依赖于零阶哈密顿量 $H^{(0)}$ 的运动常数. 这样,初始轨道点的某些取值有可能使式(6-45)中的分母变为 0,即

$$\frac{(2n-1)\pi\lambda(I_1^a,I_1^c)}{2K(I_1^a,I_1^b,I_1^c)}\pm\left(\omega_1-\frac{\Delta\omega}{2}\right)=0, \tag{6-46}$$

当这个条件满足时,平行流的一阶量 $J_1^{(1)}$ 随时间将出现小分母发散. 因此,由于平行流模式 $J_j$ 与漂移波模式 $\phi_j$ 之间的耦合,原来可积哈密顿系统 $H^{(0)}$ 的不变环可能因共振被破坏.

在第四章的例子中,当不变环上的特征频率因不可积扰动发生共振或者它们与外加频率共振时,环形拓扑受到破坏,这里离子声与漂移三波的耦合也可引起共振效应,但情况更为复杂. 共振条件(6-46)不仅通过 $P_3$ 的根依赖于未扰哈密顿量 $H^{(0)}$ 的运动常数,它还是振子的线性频率 $\omega_1$ 以及频率失谐 $\Delta\omega$ 的函数. 如果把平行流($J_j$,$\beta_j$)看做扰动,它本身并没有带来任何新的特征频率,但通过与原来自由度($I_j$,$\alpha_j$)的相互作用,一些特征频率耦合进平行流的运动中,包括漂移波线性振子的频率 $\omega_j$ 和频率失谐 $\Delta\omega$,以及(通过 $K$,$\gamma$ 等变量获得的)未扰可积不变环上运动的特征频率,当这些频率共振时,平行流的扰动出现了小分母发散,它破坏了可积哈密顿系统$\{I_j,\alpha_j\}$的不变环.

图 6-2 是有平行流耦合时的哈密顿系统(6-36)的正则动量 $I_1(t)$,$I_3(t)$演化的一个例子,在相应参数下,它显示双周期运动,与图 6-1 中单周期运动形成对比,其中高频频率就处于振子的线性频率附近. 在没有平行流耦合的方程(6-12)中,振子振幅 $a_j(t)$的演化依赖于振子位相之和 $\alpha\equiv\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$,在有平行流耦合时,单个振子的位相 $\alpha_j$ 出现在振幅 $a_j(t)$运动方程中[参考方程(6-32a)],在非线性不太强时,$\alpha_j$ 以接近 $\omega_j$ 的线性频率运动,这就是说,平行流的耦合将漂移波线性振子位相 $\alpha_j$ 的特征频率 $\omega_j$ 在其振幅 $a_j$ 的运动中激活了(但经历了非线性频移),它们与未扰可积不变环上的那些特征频率一起出现在振子振幅的运动中. 当然,哈密顿系统(6-36)不是完全可积的,图 6-2 只是拓扑环还没有被破坏的一个例子,在共振面附近,运动将变得十分混沌.

哈密顿系统(6-36)不完全可积的性质以及与此相关运动的奇异性是这个自治系统内在的,是系统运动常数的数目小于自由度数目的缘故. 哈密顿系统(6-17)和(6-36)都是实际等离子体波动系统在三波下的截断,如式(6-36)中两类模式$\{I_j,\alpha_j\}$和$\{J_j,\beta_j\}$之间的耦合可追溯到连续性方程与运动方程在一定条件下的耦合. 由这个例子我们可以预料,像不变环共振破坏这类奇异性问题,在流体、等离子体等物理系统中一定普遍地存在,正是动力学内在的各种奇异性,才使得流体系统

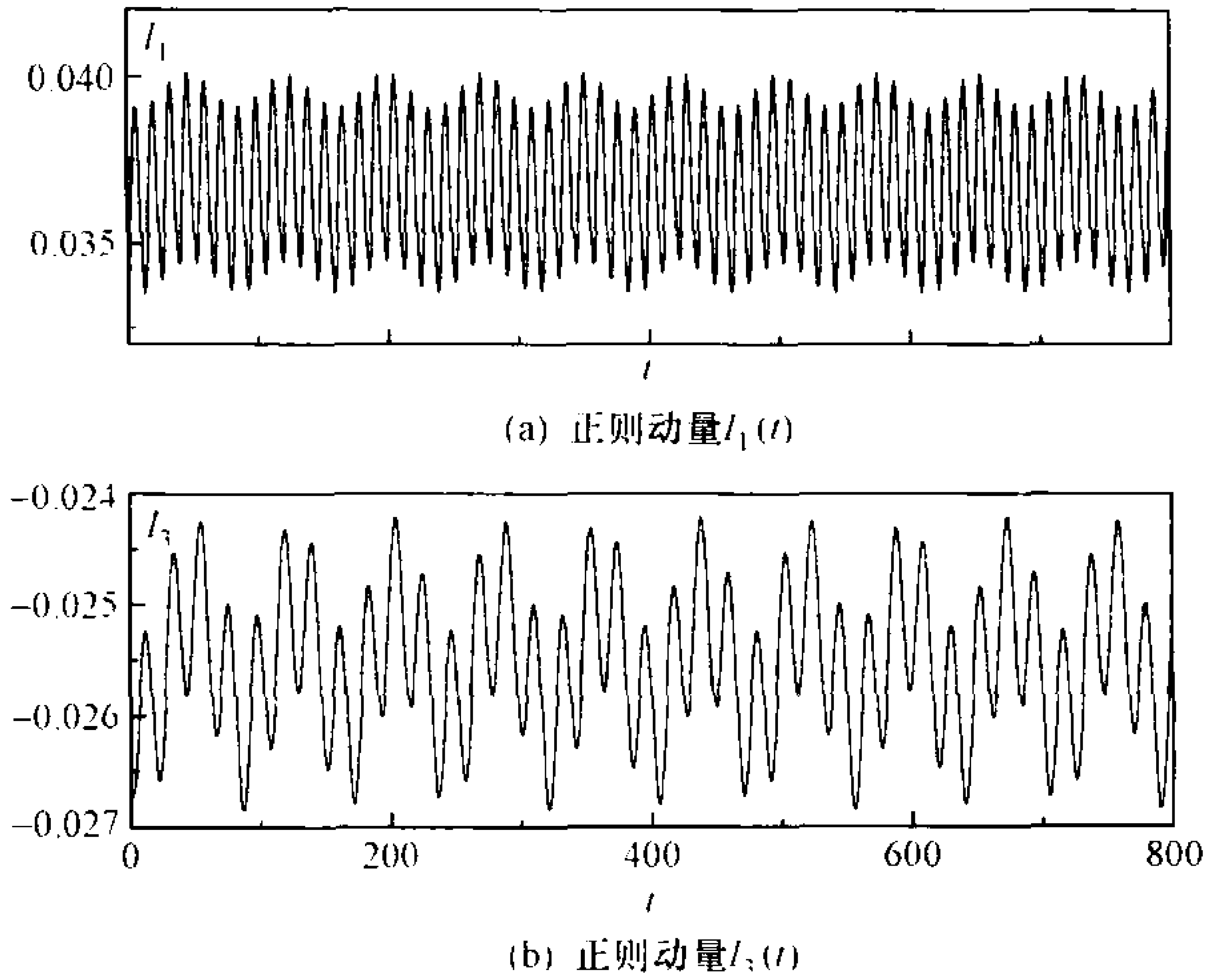



图 6-2　与离子声波线性耦合的漂移三波哈密顿系统(6-36)的一个调制振荡解

中广泛地出现混沌和湍流现象.

## § 6.2　耗散的波-波相互作用

在很多实际情况下,波-波相互作用系统不是保守的,例如,由于某种线性不稳定性,特定波长和频率的模式会受到持续的驱动,介质的宏观不均匀性就可能提供驱动所需的能量,另外,波动系统的能量还有各种损失渠道,如通过波-粒子相互作用转变为粒子的热能等,因此,波动模式的能量,特别是短波模式的能量,将有可能被耗散. 在讨论波-波相互作用时,需要将这些因素考虑进去.

在有耗散时推导非线性漂移波方程,就不能像第三章中那样将电子密度涨落 $n_e$ 假设为绝热的,需要考虑电子密度对涨落电场的非绝热响应. 为此,要在电子密度扰动的傅里叶分量上增加一个小的虚部

$$\delta n_k \sim \phi_k(1 - \mathrm{i}\delta_k), \tag{6-47}$$

这里 $\delta_k \ll 1$ 是实数. 考虑这一因素,从不同形式的漂移波方程,可以导出包括耗散效应在内的不同形式的三波相互作用模型.

### 6.2.1　耗散三波的 Hopf 分岔

考虑到电子密度对电场涨落的非绝热响应(6-47),在三波模型中可假设一个模式因线性不稳定性指数增长,另外两个模式因耗散指数衰减,原来可积的三波系统(6-12)变为[172]

$$\frac{\mathrm{d}a_j}{\mathrm{d}t} = \gamma_j a_j - A a_k a_l (F_j \cos\alpha + G_j \sin\alpha), \tag{6-48a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}=-\Delta\omega+A\sum_{j,k,l}\frac{a_k a_l}{a_j}(F_j\sin\alpha-G_j\cos\alpha). \tag{6-48b}$$

这里假设模式 $k=1$ 是线性增长的，有 $\gamma_1>0$；模式 $k=2,3$ 线性阻尼，有 $\gamma_2,\gamma_3<0$. 系统通过振幅$\{a_j\}$的线性变化与外界交换能量，因为存在关系 $\sum_{j=1}^{3}F_j=\sum_{j=1}^{3}G_j=0$，方程中的非线性项不会带来系统总能量的增益或损失.

系统(6-48)的能量改变率为

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{j=1}^{3}a_j^2=\sum_{j=1}^{3}\gamma_j a_j^2. \tag{6-49}$$

我们记得，哈密顿系统的相体积是用它的正则坐标和正则动量来定义的，考虑到方程(6-48)在无耗散时蜕化到方程(6-12)，为与后者这个哈密顿系统一致，这里定义相体积元为

$$\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\prod_{j=1}^{3}\mathrm{d}a_j^2\,\mathrm{d}\alpha, \tag{6-50}$$

它的变化率是

$$\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{a_j}\frac{\partial}{\partial a_j}\left(a_j\frac{\mathrm{d}a_j}{\mathrm{d}t}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}=2\gamma, \tag{6-51}$$

这里 $\gamma\equiv\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3$. 对于给定的$\{\gamma_j\}$，相体积变化率是一个常数，$\gamma<0$ 时相体积以不变的速率收缩，轨道最终流向一个相体积为 0 的吸引子.

在$\{G_j\}=0$ 的简单情况下容易找到系统(6-48)的不动点即定态解，用上标 s 表示，它满足方程 $\mathrm{d}a_j^s/\mathrm{d}t=0$，$\mathrm{d}\alpha^s/\mathrm{d}t=0$. 不失一般性，设 $\mathrm{sgn}(F_1)=-\mathrm{sgn}(F_2)=-\mathrm{sgn}(F_3)$和 $\mathrm{sgn}(\gamma_1)=-\mathrm{sgn}(\gamma_2)=-\mathrm{sgn}(\gamma_3)$，解得

$$a_j^s=\sqrt{\frac{\gamma_k\gamma_l}{F_kF_l}\left[1+\left(\frac{\Delta\omega^2}{\gamma}\right)\right]}, \tag{6-52a}$$

$$\alpha^s=\arctan\left(-\frac{\Delta\omega}{\gamma}\right). \tag{6-52b}$$

上式是系统(6-48)在$\{G_j\}=0$ 时的一个非平凡不动点，需要强调的是，虽然在不动点上模式的振幅 $a_j^s$ 以及位相之和 $\alpha$ 都是常数，各模式的位相 $\alpha_j$ 本身却并不处于定态，$\dot{\alpha}_j(t)|_s\neq0$. 在一个稳定的定态$(a_1^s,a_2^s,a_3^s,\alpha^s)$上，每个模式的位相 $\alpha_j$ 都以非零频率振荡，但它们之间保持着恒定的关系 $\alpha^s\equiv(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)|_s=\mathrm{const.}$. 因此，一个稳定的定态实际上是耗散三波系统的线性增长模式 $\phi_1^*$（* 表示复共轭）与两个线性阻尼模式 $\phi_2,\phi_3$ 之间建立起的一种具有定常相差的完美相同步态. 从这个简单的耗散三波系统已经看出，耦合非线性振子系统有强烈的相同步趋势，在一定条件下它们可能实现完美的相同步，这样的例子我们在后面还会一再遇到.

非线性动力学首先要关心的是一个不动点是否稳定，以及可能发生什么样的

不稳定性的问题. 对$\{G_j\}=0$时的模型(6-48),采用第五章中的分析方法,假设$a_j(t)=a_j^s+\delta a_j(t)$,$\alpha(t)=\alpha^s+\delta\alpha(t)$,以及扰动量的线性演化有指数形式,$\delta a_j(t)=\delta a_j(0)e^{\lambda t}$等,可以找到对定态$\{a_j^s\}$,$\alpha^s$扰动的本征方程如下[174]

$$\left|\begin{matrix} \gamma_1-\lambda & -\gamma_1 a_1/a_2 & -\gamma_1 a_1/a_3 & q_1 \\ -\gamma_2 a_2/a_1 & \gamma_2-\lambda & -\gamma_2 a_2/a_3 & q_2 \\ -\gamma_3 a_3/a_1 & -\gamma_3 a_3/a_2 & \gamma_3-\lambda & q_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 & \gamma-\lambda \end{matrix}\right|_s = 0, \tag{6-53}$$

这里

$$p_j \equiv \left[-\frac{F_j a_k a_l}{a_j^2}+\frac{F_k a_l}{a_k}+\frac{F_l a_k}{a_l}\right]\sin\alpha\,\Big|_s, \tag{6-54a}$$

$$q_j \equiv F_j a_k a_l \sin\alpha\,\Big|_s, \tag{6-54b}$$

下标 s 表示变量在定态处取值.

本征方程(6-53)有 4 个本征值,假设弱耗散,$|\gamma_j|\ll|F_j|$和$|\Delta\omega|(j=1,2,3)$,可将方程(6-48)($\{G_j=0\}$)的各变量关于小量$\{\gamma_j\}$展开近似求解. 在最低阶上得到 2 个零根,$\lambda_{1,2}^{(0)}=0$,以及 2 个共轭的纯虚根

$$\lambda_{3,4}^{(0)}=\pm\,\mathrm{i}\Omega, \tag{6-55}$$

这里

$$\Omega \equiv |\Delta\omega|\sqrt{\frac{2(\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2)}{\gamma^2}-1}. \tag{6-56}$$

这样,我们就在$\{\gamma_j\}$的零阶近似下找到系统(6-48)的本征振荡频率为$\Omega$,它依赖于线性振子的频率失谐$\Delta\omega$,并随模式振幅线性增长率$\{\gamma_j\}$改变.

在$\{\gamma_j\}$的一阶近似下,对应$\lambda_2^{(0)}$求得

$$\lambda_2^{(1)}=-\frac{12\gamma_1\gamma_2\gamma_3}{2(\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2)-\gamma^2}, \tag{6-57}$$

根据$\{\gamma_j\}$的符号,知道$\lambda_2^{(1)}$是负定的,不会引起不稳定性. 对应$\lambda_{3,4}^{(0)}$求得

$$\lambda_{3,4}^{(1)}=\gamma+\frac{6\gamma_1\gamma_2\gamma_3}{2(\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2)-\gamma^2}, \tag{6-58}$$

上式右边第一项$\gamma<0$,第二项是正定的,因此在$\gamma\to-0$的过程中,$\lambda_{3,4}^{(1)}$必然在某一组$\{\gamma_j\}$处从负值变为正值. 将式(6-58)与零阶解(6-55)合并,就得到了一对共轭的复本征值

$$\lambda_{3,4}=\lambda_{3,4}^{(1)}\pm\mathrm{i}\Omega, \tag{6-59}$$

随$|\gamma|$减小,它的实部将跨过虚轴,由负变正.

$|\gamma|$正比于相体积的收缩率,因此,本征值(6-59)表明,当相体积收缩得足够慢时,不动点(6-52)将发生 Hopf 分岔,失稳频率和扰动增长率分别由式(6-59)的虚部和实部给出. 在数值实验中可选取满足 Hopf 分岔发生的参数,对不动点(6-52)施以微扰,在扰动很小时,它们的演化基本上由其线性化方程制约,因为系统存在

本征振荡频率 $\Omega$，在初始阶段可观察到模式振幅振荡地指数变化，对振荡包络指数增长的情形，可计算出定态(6-52)的失稳频率和增长率.

图 6-3 用实线画出了 $\lambda_{3,4}$ 解析解(6-59)的实部 $\mathrm{Re}(\lambda_{3,4})$ 和虚部绝对值 $|\mathrm{Im}(\lambda_{3,4})|$ 随 $\gamma$(固定 $\gamma_2$，$\gamma_3$，改变 $\gamma_1$)的变化，$\mathrm{Re}(\lambda_{3,4})$ 随 $\gamma$ 几乎线性地变化，在它从负方向跨过 0 时本征频率 $\Omega$ 失稳，Hopf 分岔发生. 数值模拟证实了这一点. 从数值模拟方程(6-48)$\{G_i=0\}$找到的失稳频率在图上用小圆圈标出，它与 $|\mathrm{Im}(\lambda_{3,4})|$ 符合得很好. 图中虚线是 $\lambda_2$，它保持为负实数，不会引出任何新频率.

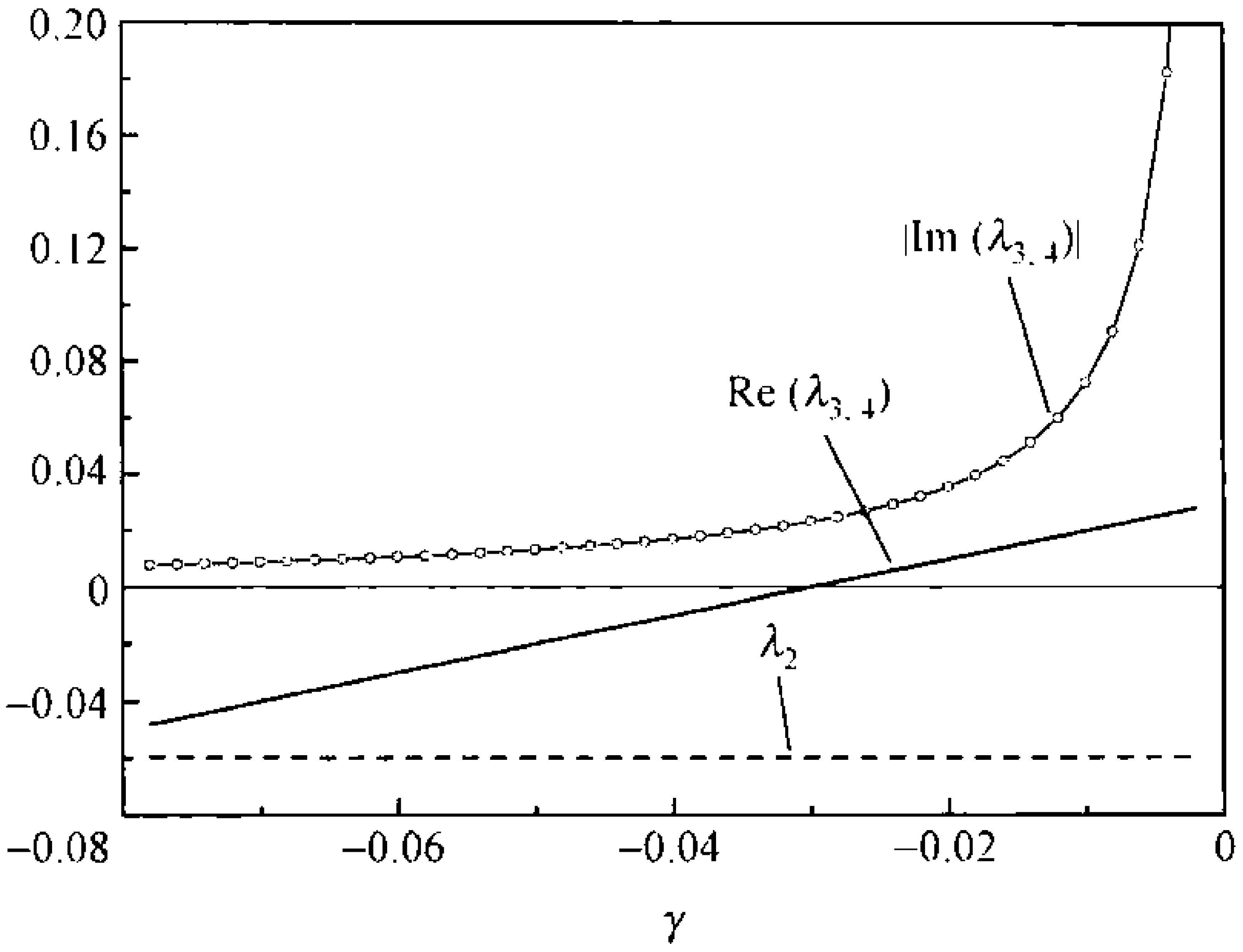



图 6-3 耗散三波相互作用系统(6-48)($\{G_j=0\}$)定态解的扰动本征值随 $\gamma$ 的变化

当 $\mathrm{Re}(\lambda_{3,4})<0$ 时，如果对定态施以较大的扰动，在暂态中也能看到系统的本征振荡，不过它的振幅指数地衰减，最终归于定态. 由此找到的 Hopf 失稳前的本征频率，一并用小圆圈画在图 6-3 中，它们与理论预言结果也完全符合. 可见耗散非线性系统的本征频率不一定都能在运动中表现出来，只有失稳频率会出现在渐近运动中.

在文[172]建立的耗散漂移三波模型(6-48)中，一般$\{G_j\}$取为非零值，这一项描写电子密度对电场的非绝热响应引起的非线性效应. 在包括这一项时该文作者数值计算找到了稳定的定态，以及定态失稳后的周期和混沌振荡状态，这是首次在漂移波模型中观察到的混沌运动. 遗憾的是，在相空间收缩得很慢($\gamma$ 很小)时，这个模型给出的模式振幅$\{a_j\}$有可能混沌地振荡发散，它对应相空间无穷远处的一个混沌吸引子. 下一小节我们要将耗散的漂移三波模型(6-48)推广到与离子声波耦合的情形，在这个新模型中，非物理的发散将得以克服，更重要的是，它显示了非线性动力学理论预言的向混沌转变的 Ruelle-Takens 途径.

### 6.2.2 与离子声波耦合的耗散漂移三波和向混沌转变的 Ruelle-Takens 途径

让我们从方程组(6-28)出发，建立一个包括与离子声波耦合的效应在内的耗

散三波相互作用模型. 通过磁力线小的平行分量，漂移波 $\phi$ 与离子声波 $J$ 出现耦合，除线性耦合外，方程中的非线性耦合$[\phi, J]$也将包括在三波模型中. 采用与前面类似的推导方法，假设 $\phi$ 与 $J$ 的傅里叶模式分别有式(6-30)和(6-31)的形式，截断到共振三波 $\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2+\boldsymbol{k}_3=0$，定义漂移三波位相之和 $\alpha\equiv\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 以及漂移波与平行流模式的位相差 $\theta_j\equiv\alpha_j-\beta_j$，可导出有耗散时漂移波与离子声波耦合的三波相互作用由下面的方程制约[175]

$$\frac{\mathrm{d}a_j}{\mathrm{d}t}=\gamma_j a_j+\kappa_j b_j\sin\theta_j-A(F_j\cos\alpha-G_j\sin\alpha)a_l a_m, \tag{6-60a}$$

$$\frac{\mathrm{d}b_j}{\mathrm{d}t}=-\kappa_j a_j\sin\theta_j+2A[a_l b_m\cos(\alpha-\theta_m-\theta_l)-a_m b_l\cos(\alpha-\theta_j-\theta_l)], \tag{6-60b}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\theta_j}{\mathrm{d}t}=&\ \omega_j+\kappa_j\left(\frac{b_j}{a_j}-\frac{a_j}{b_j}\right)\cos\theta_j+A(F_j\sin\alpha+G_j\cos\alpha)\frac{a_l a_m}{a_j}\\&+2A[a_l b_m\sin(\alpha-\theta_m-\theta_j)-a_m b_l\sin(\alpha-\theta_j-\theta_l)]/b_j,\end{aligned} \tag{6-60c}$$

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}=\Delta\omega+\sum_{j=1}^{3}\frac{\kappa_j b_j}{a_j}\cos\theta_j+A\sum_{j,l,m}(F_j\sin\alpha+G_j\cos\alpha)\frac{a_l a_m}{a_j}, \tag{6-60d}$$

$$(j=1,2,3)$$

这是一组有 10 个变量$\{a_j\}$，$\{b_j\}$，$\{\theta_j\}$和 $\alpha$ 的封闭非线性方程组，类似于系统(6-48)，在 3 个漂移波模式中有一个是线性增长的($\gamma_1>0$)，另外 2 个线性阻尼($\gamma_{2,3}<0$)，系统的能量靠线性增长模式从外部泵入，通过线性阻尼模式流出. 其他参数与前面一样，要求满足条件$\sum_{j=1}^{3}F_j=\sum_{j=1}^{3}G_j=0$ 和$\sum_{j=1}^{3}\kappa_j=0$.

与节 6.1.2 中哈密顿系统一致，定义系统(6-60)的相体积元为

$$\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\prod_{j=1}^{3}(\mathrm{d}a_j^2\,\mathrm{d}b_j^2\,\mathrm{d}\theta_j)\mathrm{d}\alpha, \tag{6-61}$$

它随时间的变化率是

$$\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^{3}\left[\frac{1}{a_j}\frac{\partial}{\partial a_j}\left(a_j\frac{\mathrm{d}a_j}{\mathrm{d}t}\right)+\frac{1}{b_j}\frac{\partial}{\partial b_j}\left(b_j\frac{\mathrm{d}b_j}{\mathrm{d}t}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta_j}\frac{\mathrm{d}\theta_j}{\mathrm{d}t}\right]+\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}=2\gamma, \tag{6-62}$$

我们再次看到，当 $\gamma\equiv\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3<0$ 时，相体积 $V$ 以不变的速率收缩.

能量变化率为

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{j=1}^{3}(a_j^2+b_j^2)=\sum_{j=1}^{3}\gamma_j a_j^2. \tag{6-63}$$

与模型(6-48)类似，系统的总能量变化率 $\mathrm{d}W/\mathrm{d}t$ 与漂移波模式的线性增长和阻尼率有关，不过在内部能量交换方面 2 个模型有一个重要差别：模型(6-48)中能量只在 3 个漂移波模式$\{\phi_j\}$之间交换，而在模型(6-60)中，通过波矢量在平行于磁力

线方向上的分量$\{\kappa_j\}$,能量可以从漂移波模式$\{\phi_j\}$流向离子声模式$\{J_j\}$,或者反过来,从离子声模式流向漂移波模式,此外,这两类模式还可以通过非线性渠道交换能量.这些过程都有效地调节了漂移三波的能量,在数值模拟的所有参数范围内,只要相体积是收缩的,模型(6-60)都没有出现发散的振幅$\{a_j(t)\}$.

数值模拟方程组(6-60)观察到了不同类型的状态,如渐近的定态、周期轨道、二维环和混沌态.图 6-4 给出了不同参数下 3 个典型计算结果,(a)中 3 个模式的振幅都从很小的值出发,$a_1$ 因线性不稳定先振荡地指数上升,随后振幅 $a_2$,$a_3$ 开始增加,经过复杂的能量交换过程,3 个模式最终都趋向定态;(b)中初始条件设在系统的定态解,只画了一个模式,它失稳到调制振荡,轨道最终落在了一个二维环上;在(c)中的参数下 3 个模式振幅的轨道都是渐近混沌的.

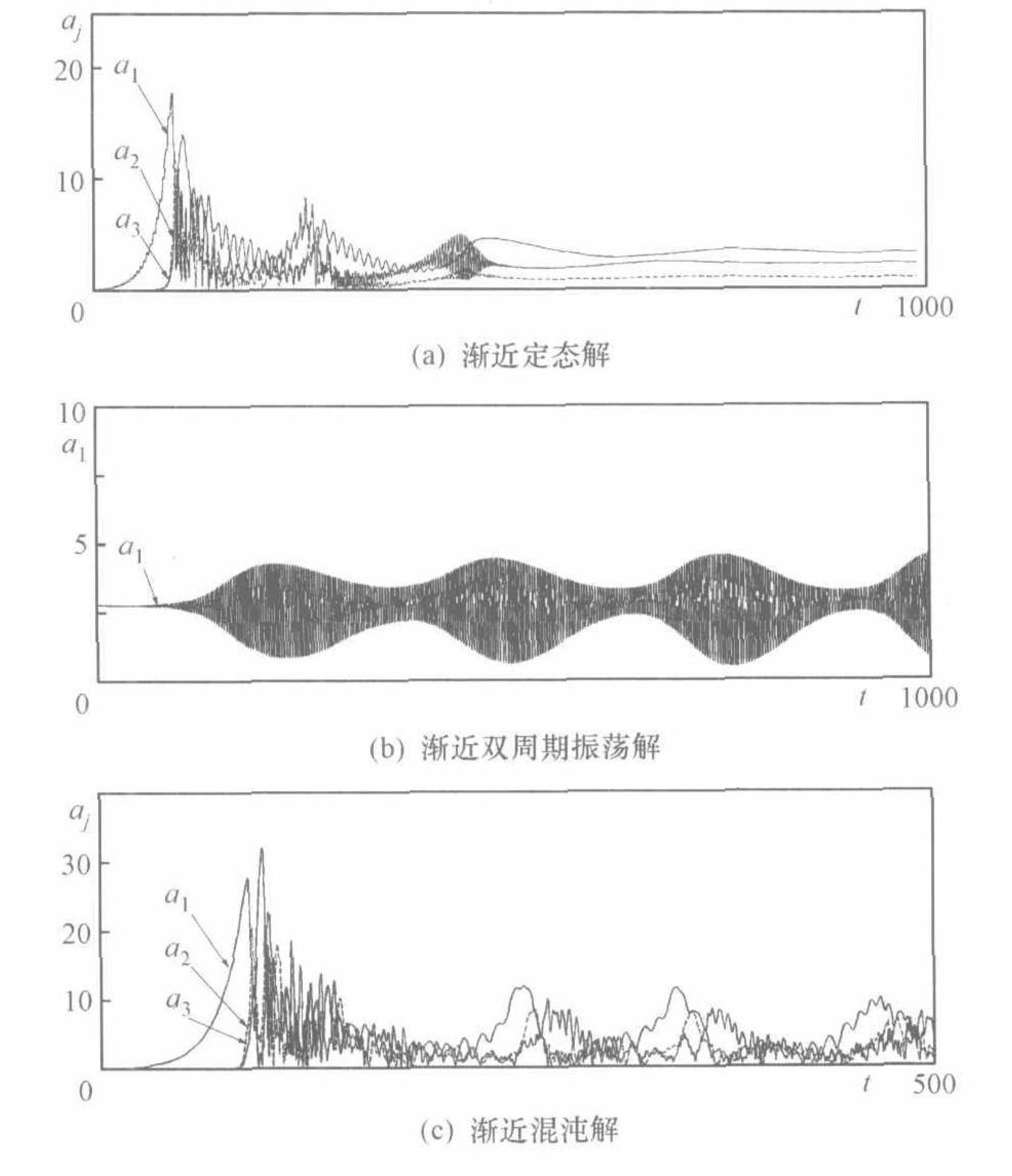



图 6-4　在不同控制参数下与离子声耦合的耗散
漂移三波系统(6-60)模式振幅随时间的演化(无量纲单位)

模拟的结果概括在二维参数空间的状态图 6-5 中,模拟中给定了 $\gamma_2$,$\gamma_3$ 的值,故横轴上 $\gamma_1$ 增加对应相体积收缩率$|\gamma|$减小,收缩率为 0 的位置由 $\gamma_t=0$ 标出;又因为存在关系 $\sum_{j=1}^{3}\kappa_j=0$,纵坐标 $\kappa_1$ 增加对应模式$\{\phi_j\}$与模式$\{J_j\}$之间的耦合增强.

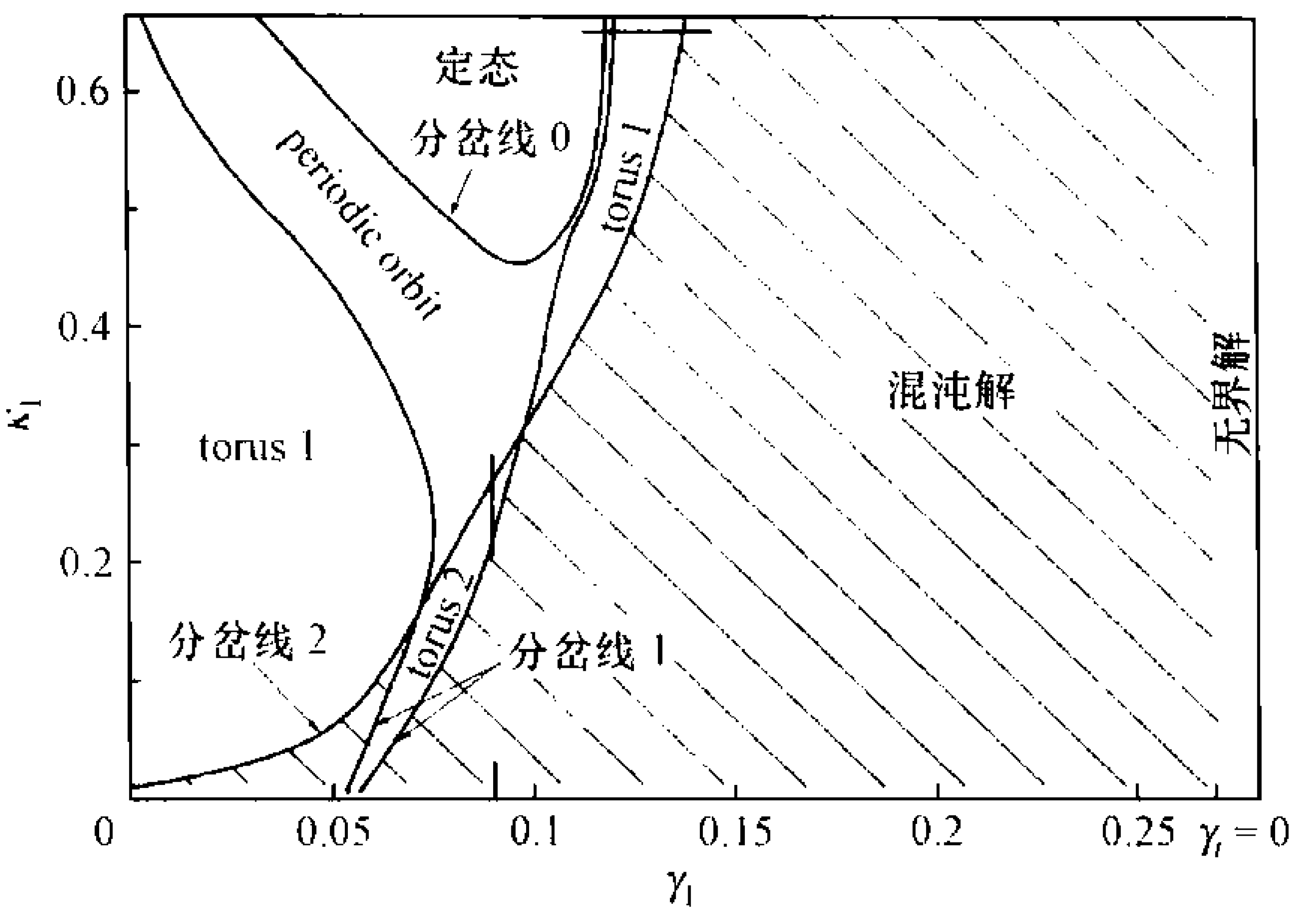



图 6-5 在参数($\gamma_1$,$\kappa_1$)空间中系统(6-60)渐近解的状态图
(图中标出了定态解、周期轨道解、torus 1 和 torus 2 类型解以及混沌解出现的参数区)

在图 6-5 上画出了渐近的定态解、极限环、二维环和混沌解出现的参数区,其中混沌态的参数区用阴影标记. 特别地,模拟观察到两种类型的二维环,记为 torus 1 和 torus 2,它们是根据频率等特征加以区分的.

分析状态图 6-5 得到的一个重要结论是:系统(6-60)的运动遵循 Ruelle-Takens 途径向混沌转变. 第五章已经说明,所谓 Ruelle-Takens 途径是说,第三个独立频率的出现将破坏二维环形拓扑,直接导致运动向混沌转变. 方程组(6-60)的动力学清楚地显示了这个途径,下面我们结合状态图 6-5 描写该系统的运动向混沌转变的动力学.

让我们从渐近定态解开始,在图 6-5 中它们出现在耦合强度{$\kappa_j$}较大的一个 U 形参数区内,这时两类模式的振幅{$a_j$,$b_j$}、它们的相位差{$\theta_j$}、以及相位之和 $\alpha$ 都随时间 $t$ 趋向常数. 在与 U 形区紧邻的下方参数区中找到简单的极限环解,这时各个变量都弛豫到单频率的周期振荡,这个现象提示 U 形参数区的下边界对应一条从稳定定态解发生 Hopf 不稳定性的分岔线,这一点可以从求解方程组(6-60)的定态并分析其稳定性得到证实.

将系统(6-60)的定态方程写成下面的形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underline{X}^s = \underline{F}(\underline{X}^s) = 0, \tag{6-64}$$

这里已将方程组(6-60)右边统一用算符$\underline{F}$ 表示,$\underline{X}=(a_j,b_j,\theta_j,\alpha)^{\mathrm{T}}(j=1,2,3)$. 式(6-64)是有 10 个变量的耦合非线性代数方程组,在给定参数时可以采用牛顿下降法迭代求解. 与系统(6-48)一样,它的稳定定态[如图 6-4(a)的渐近态]也是一个具有定常相差的同步态,除相同步的漂移三波外,漂移波模式与平行流模式的相差 $\theta_j\equiv\alpha_j-\beta_j$ 也分别是常数.

讨论给定参数下定态解 $\underline{X}^s$ 的稳定性问题的方法是标准的，假设 $\underline{X}=\underline{X}^s+\underline{\delta X}$，由此得到关于微扰 $\underline{\delta X}$ 的线性化方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underline{\delta X}=\underline{\underline{L}}(\underline{X}^s)\cdot\underline{\delta X}, \tag{6-65}$$

式中 $\underline{\underline{L}}$ 是 10×10 的矩阵，它的矩阵元 $L_{ij}=\partial F_i/\partial X_j^s$ 依赖于定态解 $\underline{X}^s$ 的取值，由于系统的非线性，$\underline{\underline{L}}(\underline{X}^s)$ 拥有非零的非对角元素. 假设微扰随时间演化遵循形式 $\underline{\delta X}(t)=\underline{\delta X}(0)e^{\lambda t}$，从式(6-60)得到本征方程

$$|\underline{\underline{L}}(\underline{X}^s)-\lambda\underline{\underline{I}}|=0, \tag{6-66}$$

这里 $\underline{\underline{I}}$ 是 10×10 单位矩阵. 对于系统(6-60)，定态方程(6-64)、微扰的线性化方程(6-65)以及矩阵 $\underline{\underline{L}}(\underline{X}^s)$ 都有繁复的形式，但推导是直接的，这里不再给出.

将矩阵 $\underline{\underline{L}}(\underline{X}^s)$ 对角化，可求得它的 10 个本征值 $\lambda_k(k=1,\cdots,10)$，它们决定定态解 $\underline{X}^s$ 的稳定性质. 计算表明，$\underline{\underline{L}}$ 的本征值一般是 5 对共轭复数，$\lambda_k=\lambda_k^{(r)}\pm i\lambda_k^{(i)}$，改变参数$(\gamma_1,\kappa_1)$计算不同定态解$\underline{X}^s(\gamma_1,\kappa_1)$下的本征值，结果证实，图 6-5 中 U 形区的下边界正是定态解发生 Hopf 不稳定性的分岔线，记为分岔线 0. 在分岔线 0 的上方，所有本征值 $\lambda_k$ 都有负实部，$\lambda_k^{(r)}<0$，而向下越过这条线时，有一对共轭本征值的实部变为正值，$\lambda_{k=k^*}^{(r)}>0$，且它的虚部大小与数值模拟中得到的渐近周期运动(periodic orbit)(见图 6-5 中标注有"periodic orbit"的参数区)的频率符合，下面将这个失稳的高频频率记为 $\omega_1$.

参数$(\gamma_1,\kappa_1)$继续改变时周期运动的极限环失稳，如 $\gamma_1=0.122$，$\kappa_1=0.65$ 时高频周期振荡被一个低频所调制[参考图 6-4(b)]，运动流形的拓扑变为二维环，显然，极限环上的运动在参数空间中遭遇了另一次 Hopf 分岔.

根据数值模拟结果分析，图 6-5 中从极限环向二维环转变的 Hopf 分岔线有两条：其中一条约从$(\gamma_1\approx0.05,\kappa_1=0)$出发，像舌头一样向上伸出两条支线；另一条约从$(\gamma_1\sim0,\kappa_1=0)$出发，向右上方伸展. 为方便叙述，我们称前一条为分岔线 1，后一条为分岔线 2.

当参数从极限环区越过分岔线 1 时，有一个极低频的频率出现，它调制了以高频 $\omega_1$ 振荡的振幅，造成了如图 6-4(b)中高频振荡的包络，这一类运动在状态图 6-5上标记为 torus 1. torus 1 运动的典型谱函数见图 6-6，图中有显示高频 $\omega_1$ 和低频 $\omega_2$ 以及它们的拍频的谱线($\omega_1\gg\omega_2$).

图 6-7 是 torus 1 类型吸引子庞加莱截面的一个例子，在 $\alpha(t)=\pi/2$ 和 $3\pi/2$ 处截取轨道点，分别画出 $a_2(t)$，$a_3(t)$作为 $a_1(t)$的函数，它们各形成两条封闭曲线，就像面包圈被拦腰一刀留下的两个切口，只是因为取了 $2\pi$ 范围内的主值，切口在 $a_2$，$a_3=0$ 处折叠. 这个图生动地揭示出流形的二维环拓扑结构，虽然系统多达 10 个变量，经过非线性调节，吸引子轨道落在了十分光滑圆润的拓扑环上.

参数从极限环区越过分岔线 2 时,出现了另一个新频率,相应的运动流形也是一个二维环,在图 6-5 上将这类二维环标注为 torus 2. 图 6-8 给出 torus 2 类型解谱函数的一个特例,在相应参数下两个特征频率之间出现了锁频,其中 $\omega_1$ 与图 6-6 中的 $\omega_1$ 大小差不多,都接近分岔前在极限环上的振荡频率,但另一特征频率却明显大于图 6-6 中的 $\omega_2$,典型地在图 6-8 中高频 $\omega_1$ 仅数倍于 $\omega_2$. 图 6-9 是典型的 torus 2 类型解的庞加莱截面,截取方法同图 6-7,在这组参数下,因为没有出现锁频,庞加莱截面图上也显示两条封闭曲线,否则截面图上只有有限个孤立截点.

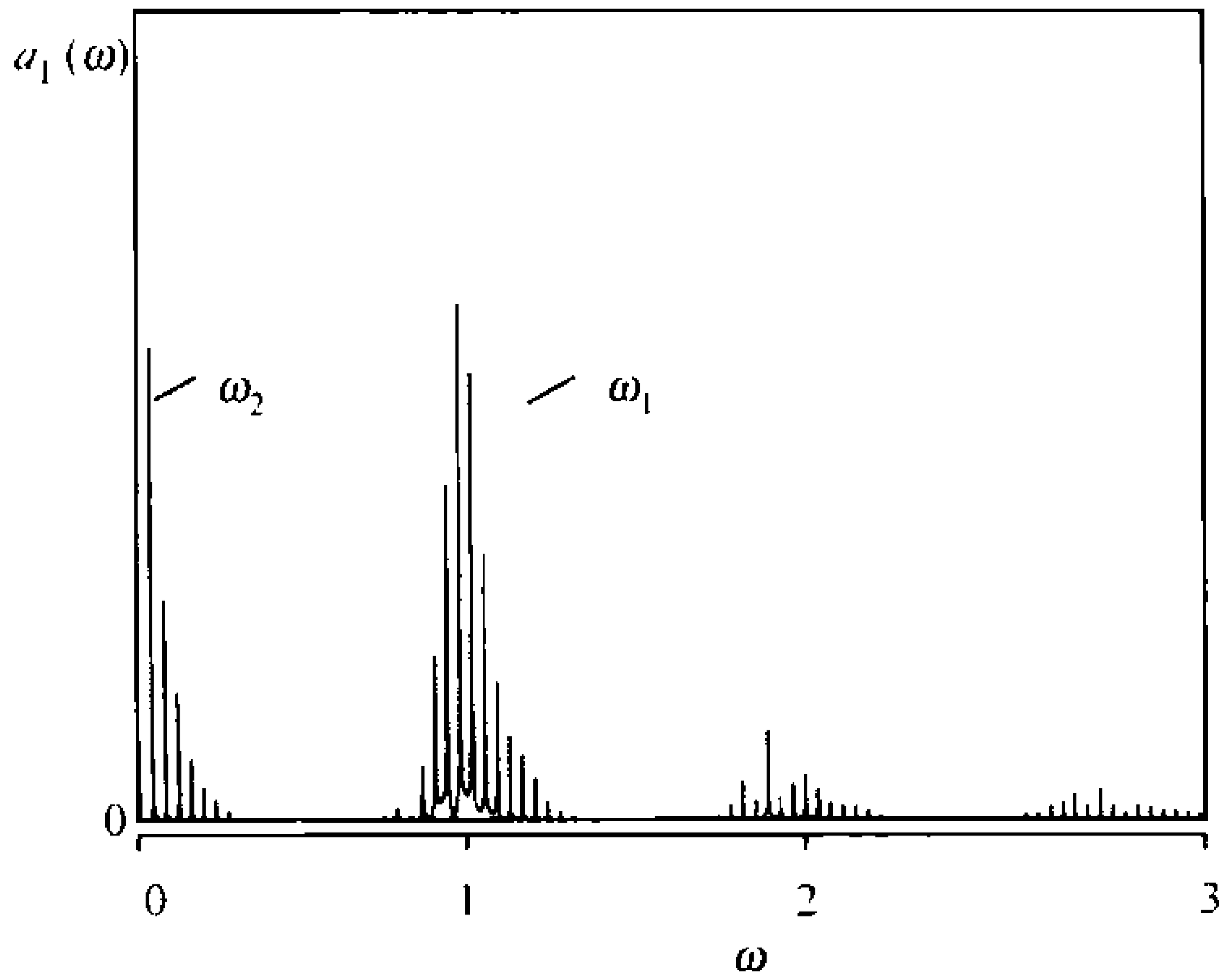



图 6-6 torus 1 类型解的频谱

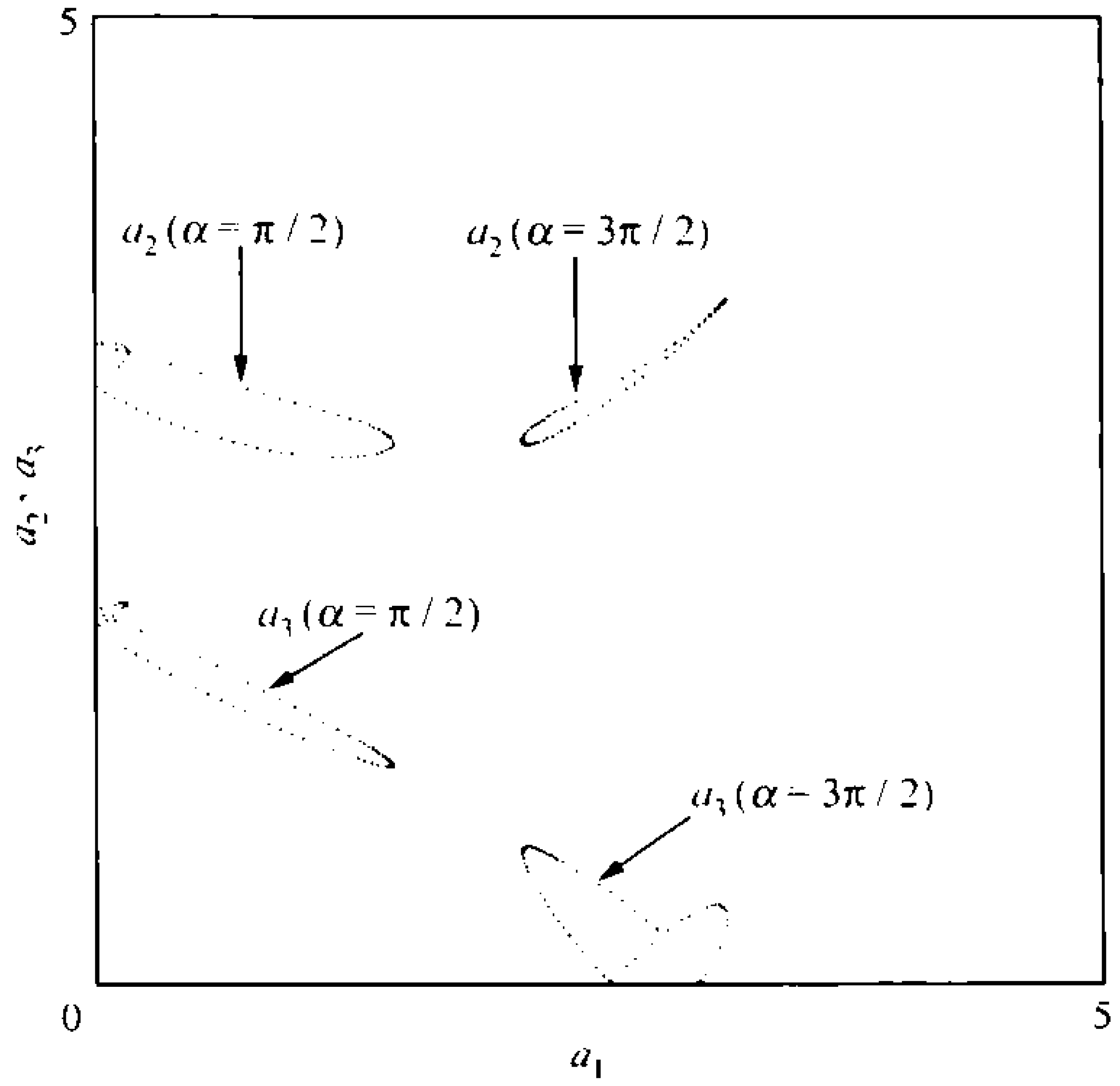



图 6-7 torus 1 类型解的庞加莱截面图

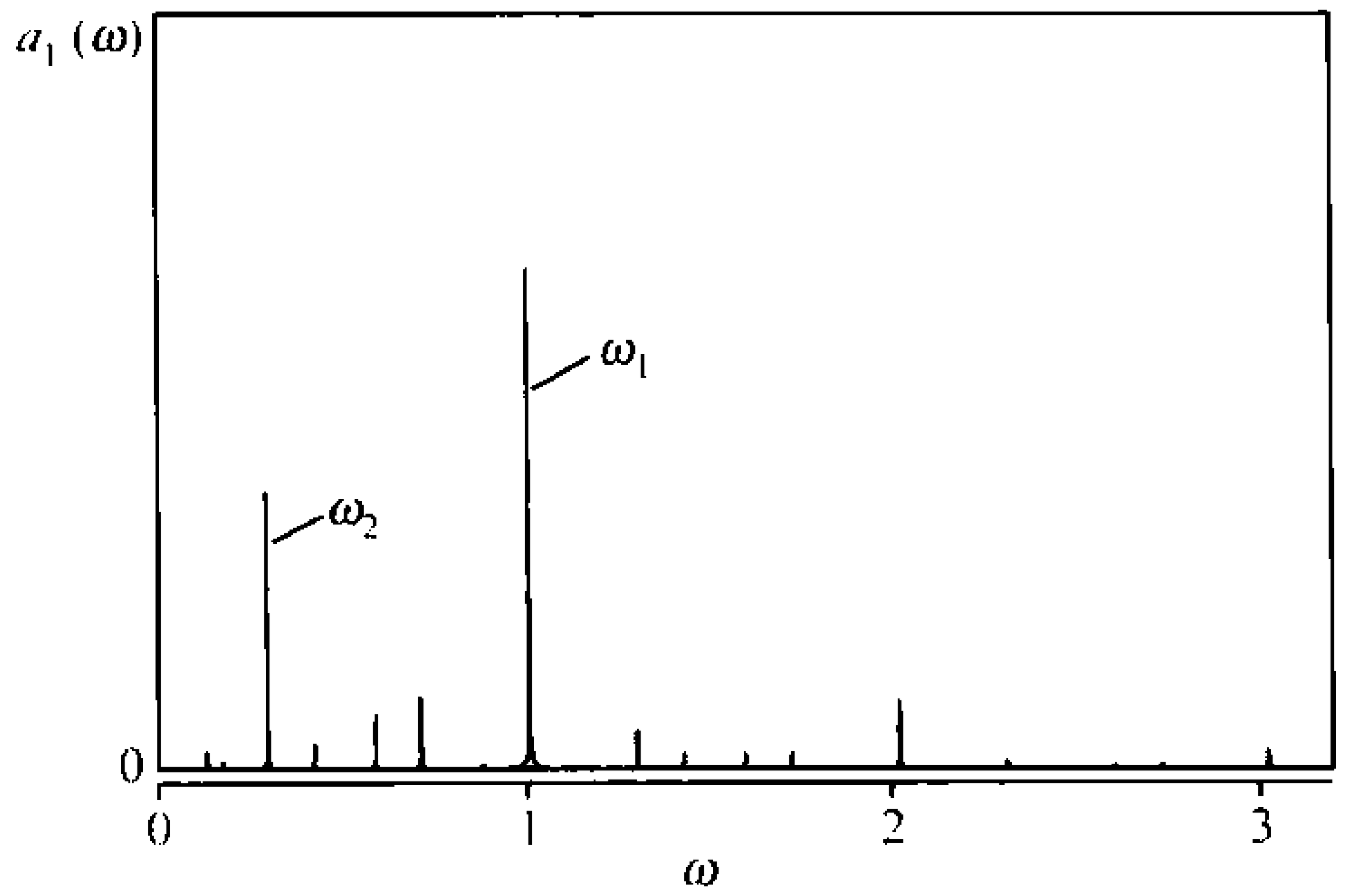



图 6-8 torus 2 类型解的频谱

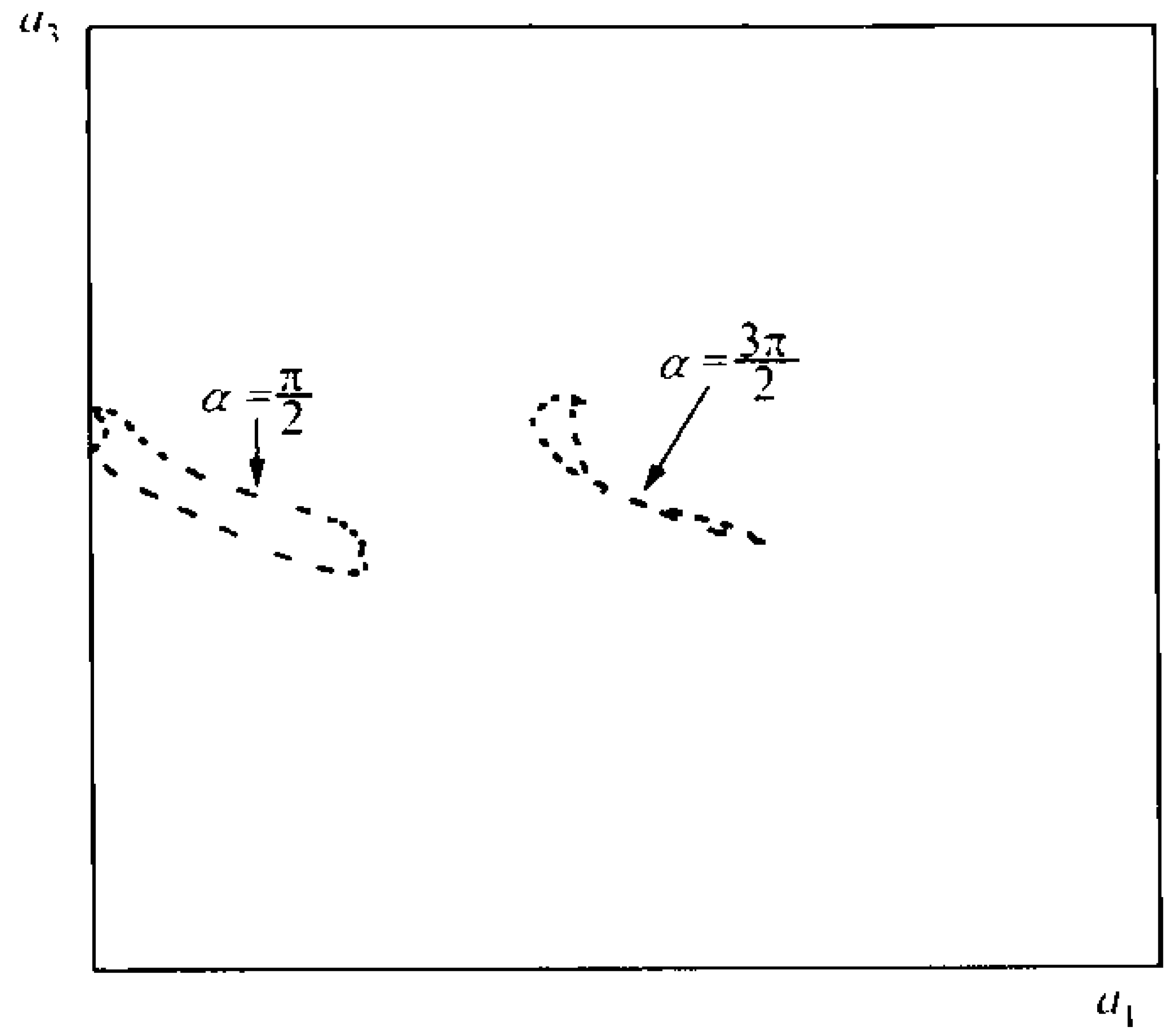



图 6-9 torus 2 类型解的庞加莱截面图

Hopf 分岔线 1 和 2,再加上从 U 形渐近定态解区的 Hopf 分岔线 0,这样,在状态图 6-5 上已找到 3 条 Hopf 分岔线. 仔细观察图 6-5,可以发现,从 U 形区的

稳定定态解出发，相继跨越分岔线 0 和分岔线 1 后，总是观察到 torus 1 类型的解，相继跨越分岔线 0 和分岔线 2 时，总是观察到 torus 2 类型的解，而如果同时越过 0，1 和 2 这三条分岔线，则总是遇到有混沌解的阴影区. 这个结果与非线性动力学预言的向混沌转变的 Ruelle-Takens 途径符合，的确，第三个独立频率的出现破坏了二维环的拓扑稳定性，直接导致了运动向混沌转变.

图 6-10 是取定 $\kappa_1=0.65$ 时 $a_1(t)$的傅里叶谱随 $\gamma_1$（沿图 6-5 中横向线段指示的路径）的变化，图(a)中 $\gamma_1=0.12$，显示典型的单周期运动的傅里叶谱，只出现频率 $\omega_1$ 及其谐频 $m\omega_1$（$m$ 和下面的 $n$ 是整数）的谱线；图(b)中 $\gamma_1=0.122$，对应在二维环上的双周期运动，傅里叶谱中多出了一个极低的频率 $\omega_2$ 以及它与 $\omega_1$ 的拍频 $m\omega_1\pm n\omega_2$；图(c) $\gamma_1=0.139$ 中一个新的独立频率 $\omega_3$ 出现，$\omega_2<\omega_3<\omega_1$，二维环开始被破坏，在傅里叶谱中 3 个频率峰仍然明显，不过已可见噪声样背景；进一步增加 $\gamma_1$，运动迅速变得混沌，如在图(d) $\gamma_1=0.2$ 中出现了很宽的傅里叶谱.

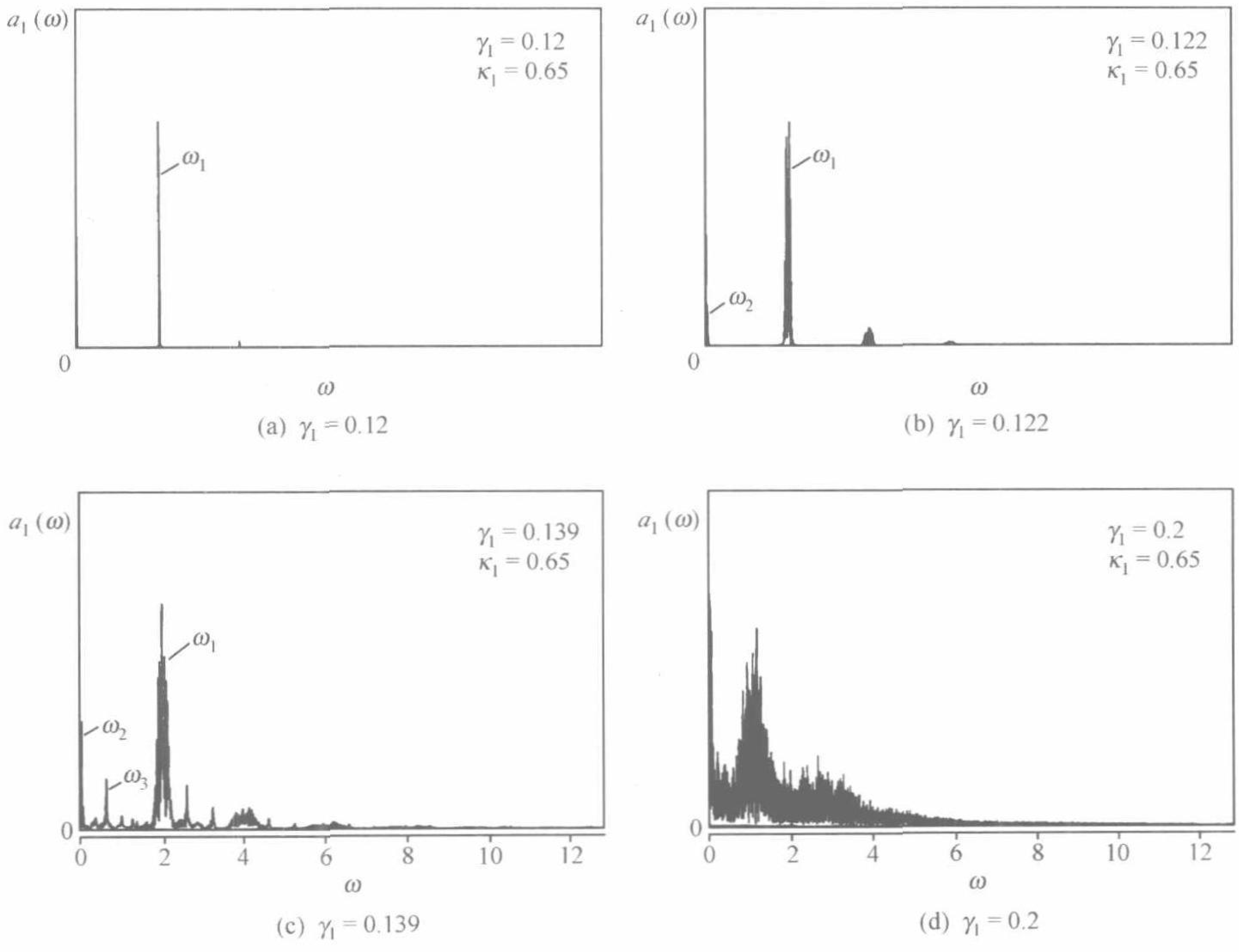



图 6-10　模式振幅 $a_1(t)$的频谱随 $\gamma_1$ 的变化（$\kappa_1=0.65$）

图 6-11 是固定 $\gamma_1=0.09$ 时 $a_1(t)$的频谱随 $\kappa_1$（沿图 6-5 中纵向线段指示的路径）的变化，图(a)中 $\kappa_1=0.2654$，对应二维环上的运动有两个独立频率 $\omega_1$，$\omega_2$；

在图 6-11(b) $\kappa_1=0.2638$ 和(c) $\kappa_1=0.2436$ 中这两个频率变得可约，分别有 $\omega_1/\omega_2=7/2$ 和 18/5，这是二维环蜕变为闭合曲线的例子；在图 6-11(d) $\kappa_1=0.2249$ 中一个极低新频率 $\omega_3$ 依稀可辨，图中已可见噪声样背景，在继续增加到 $\kappa_1=0.225$ 时，傅里叶谱突然变宽，说明这第三个独立频率的出现使运动变得混沌. 图 6-10 和图 6-11 这两组结果都有力地支持系统的运动遵循向混沌转变的 Ruelle-Takens 途径.

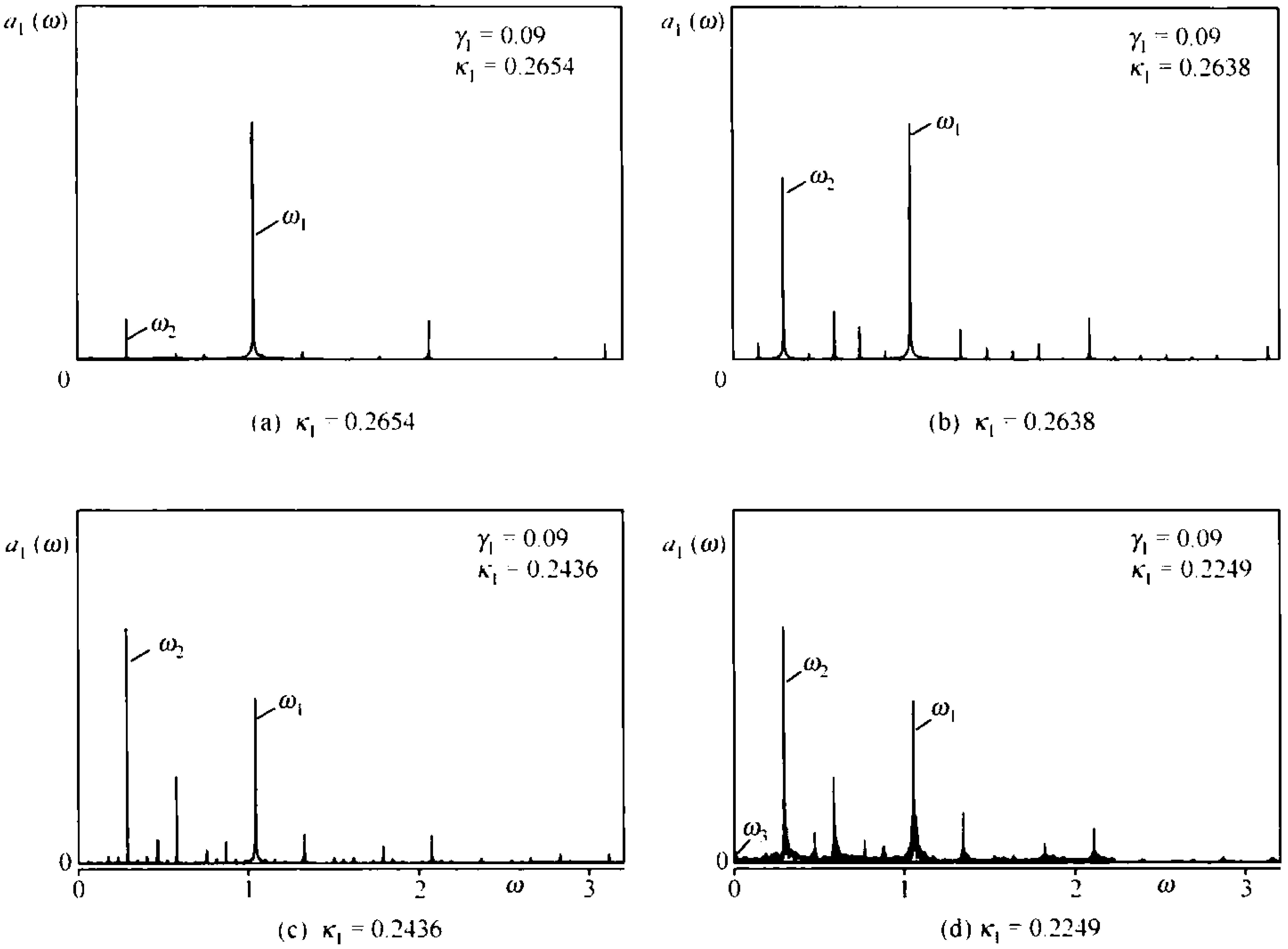
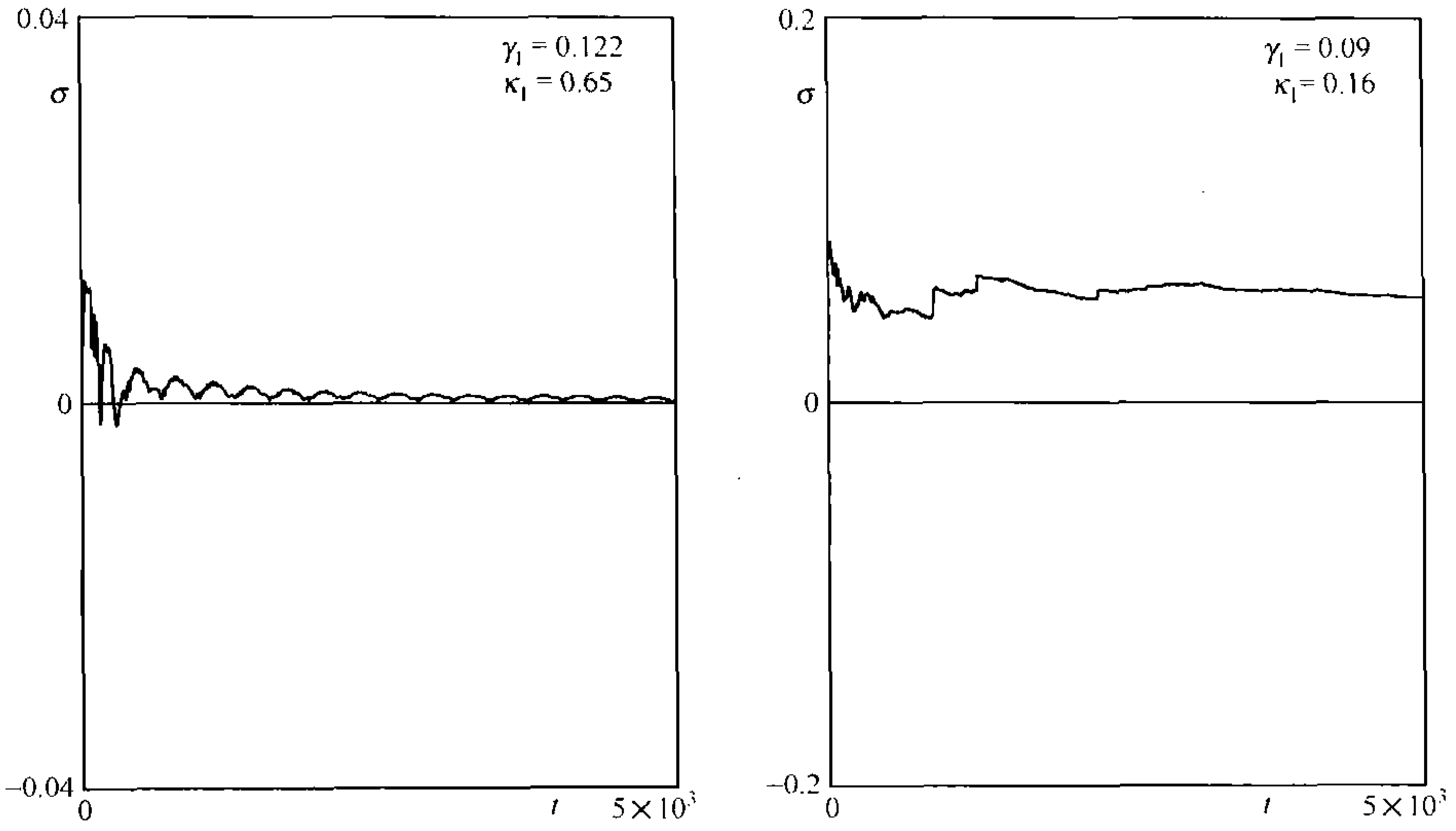



图 6-11 模式振幅 $a_1(t)$的频谱随参数 $\kappa_1$ 的变化($\gamma_1=0.09$)

图 6-12 是计算最大 Lyapunov 指数 $\sigma$ 的结果，图(a)中 $\gamma_1=0.122$，$\kappa_1=0.65$，对应双周期运动，$\sigma$ 随时间逐渐趋于 0，图(b)是 $\gamma_1=0.09$，$\kappa_1=0.16$，对应混沌运动，$\sigma$ 趋向有限的正值，说明在第三个独立频率出现后运动确实变得混沌.

在运动中有多个频率同时出现时，常见的一个现象是锁频. 在二维环上两个频率出现锁频时，运动蜕化为单周期运动，在图 6-11(b)，(c)中已看到在 torus 2 上锁频的例子. 锁频可以在很宽的参数范围内发生，图 6-13 固定 $\gamma_1=0.09$，计算 torus 2 上两个特征频率之比 $\omega_1/\omega_2$ 随耦合强度 $\kappa_1$ 的变化，由图可见它们的比值先后锁定在整数比 18/5，17/5 和 7/2.

类似的锁频现象在自然界极为普遍，甚至在人体上就可观察到. 人体是一个高度非线性的耗散系统，存在着许多特征频率，例如，呼吸和心跳各有自己的节律，它




(a) $\gamma_1 = 0.122, \kappa_1 = 0.65$  (b) $\gamma_1 = 0.09, \kappa_1 = 0.16$

图 6-12 最大 Lyapunov 指数 $\sigma$(无量纲单位)随时间的演化

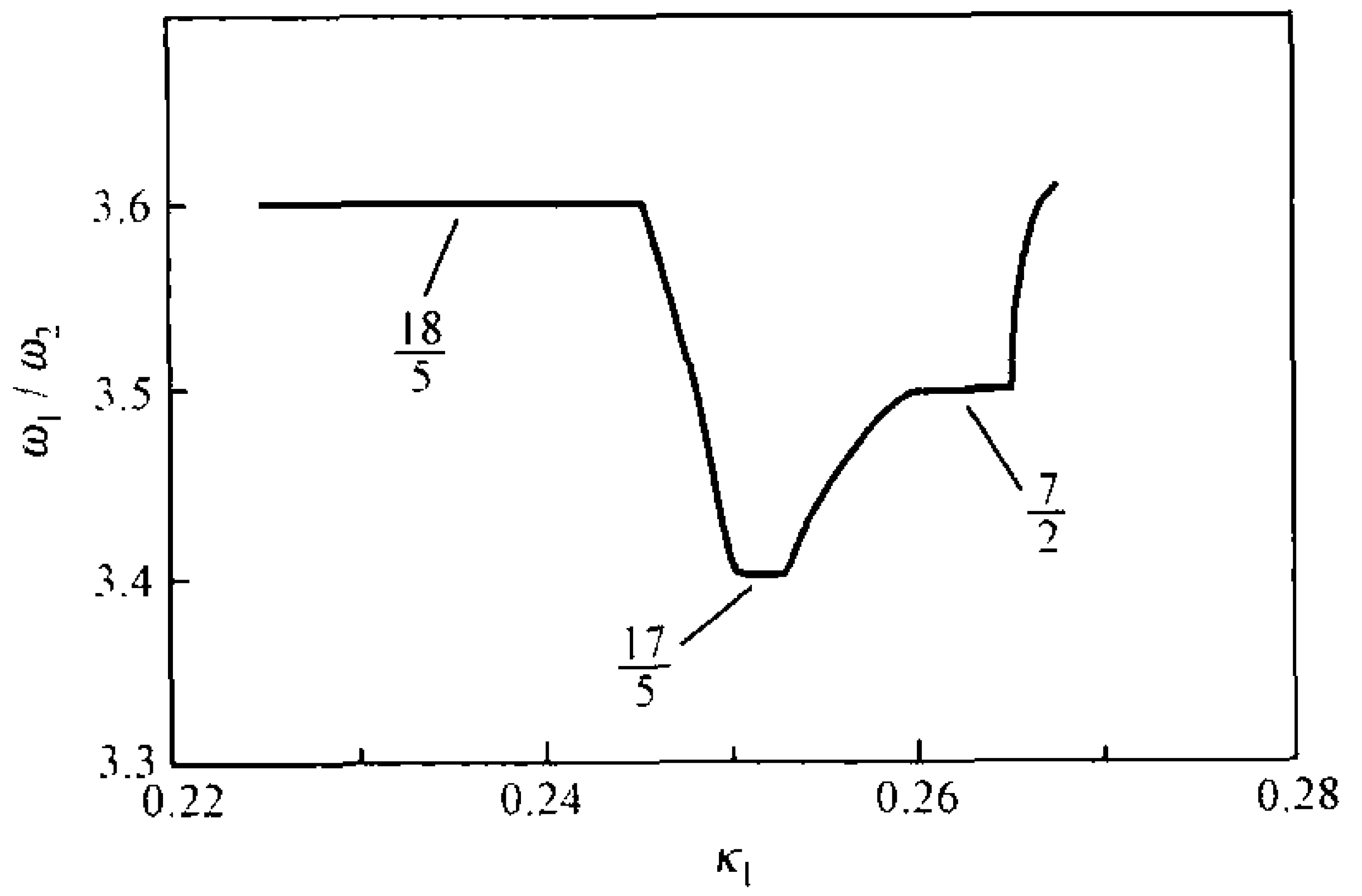



图 6-13 在 torus 2 类型环上运动的两个特征频率之比 $\omega_1/\omega_2$ 随 $\kappa_1$ 的变化($\gamma_1=0.09$)

们(通过大脑)相互耦合,实验研究发现,这两个运动节律之间常常发生锁频.如在有关的一个实验中被测试者处于自然呼吸状态[176],在另一个实验中被测试者根据指示灯按一定节律呼吸[177],两组实验都发现了心跳频率和呼吸频率时常锁在整数比平台附近,如 3/2,5/2,7/3,后者还观察到了锁频的 Arnol'd 舌头.还有研究揭示出脑部不同区域活动之间以及脑区的活动与肌电活动之间都可以出现相同步,位相差的取值在统计意义上有一定的偏好[178].

除模型(6-60)外,更早些时候在一个驱动中性流体的理论模型中也观察到了向混沌转变的 Ruelle-Takens 途径[179,180].这个途径还得到了不少物理实验的支持,如在第五章中曾提到,以水银为介质的 Rayleigh-Bénard 对流在强磁场条件下就

观察到了简单周期振荡失稳到二维环、再因第三个独立频率的出现而变为混沌运动的例子,见图 5-9. 在漂移波实验方面,德国的一个小组在一个装置上观察到了弱湍漂移波[38,181],通过测量等离子体密度、空间电荷势等场量的时间演化,计算出相应的功率谱和相空间吸引子,证实了波动向混沌转变的 Ruelle-Takens 途径,在图 6-14 上可以清楚地看到参数变化时场量在相空间中的极限环、二维环和混沌运动状态,其间还出现了锁频现象. 实验研究不像理论上那样可从方程计算轨道,图中吸引子是利用延迟时间嵌入(delayed time embedding)进行相空间重构(phase space reconstruction)得到的,有关技术可见文[182].

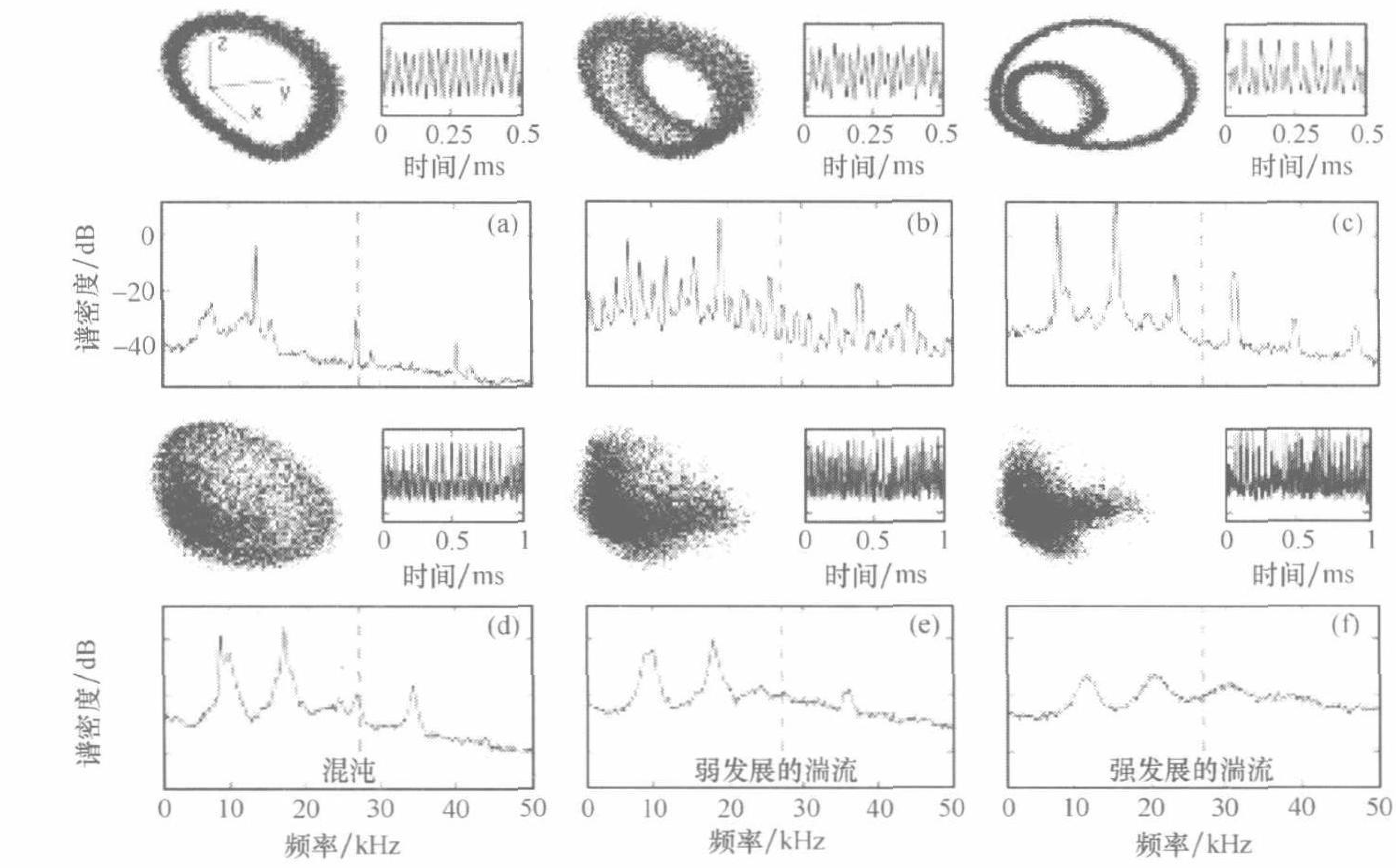



图 6-14 弱湍漂移波的实验结果(引自文[38])
(第 1,3 行给出了密度振荡在相空间中的吸引子和时间演化曲线,第 2,4 行是相应的谱密度图)

这个实验小组还在另一个装置上观察到了强湍漂移波[181],不过该文章并没有提及向强湍转变的途径,看来 Ruelle-Takens 途径比较成功地解释了弱湍的起因,但没有证据说明它也是强湍发生的机制.

事实上,采用波-波相互作用模型研究非线性波的动力学,在理论上会遇到一个不能回避的问题:一个简化到只有几个共振模式的模型,它的动力学能够代表依赖于时间和空间变量的波动系统的情形吗? 原则上波动系统包含了无穷多个随时间演化的模式,即使考虑到极短波模式的能量被粒子热运动所耗散,实际上起作用的模式不会有无穷多,但波-波相互作用模型毕竟还是过于简化了. 在非线性波动系统中,每一个模式都可能与许多模式形成共振的模-模耦合过程,如二次非线

性下的共振三波，若把每个这样的过程看做是系统的一个“细胞”，那么能量有可能通过公共模式在“细胞”间转移，传递到更多的空间尺度上. 强湍正是这样的涉及了大量不同空间尺度的运动，在强湍的发展中能量从大尺度向小尺度级联，最后形成了有幂率分布的波数谱，像三波这样的只有几个特征空间尺度的模型，是不可能用以讨论强湍中的能量级联问题的. 为分析强湍动力学，引进空间变量非常必要，例如直接讨论描写非线性波动的偏微分方程的动力学. 在探索依赖于时空变量的非线性系统之前，让我们先介绍文[183]作者的另一个思路，他们在耦合波-波相互作用模型的基础上，考虑了模式的空间展宽，用这种方法部分地加入了空间效应，并以此讨论能量级联现象.

## §6.3　空间展宽的波-波相互作用系统中的能量级联

在节 6.1.1 中知道，共振三波作为二次非线性的元过程，它可以表现为一个可积的保守哈密顿系统，能量在 3 个模式之间转移回归. 在实际的非线性波中，有无数这样的过程，通过公共模式耦合，部分能量将可能被转移出原来的共振三波. 文[183]考虑了由 4 个波动模式($\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3,\boldsymbol{k}_4$)组成的系统，它们满足下面 2 个共振条件

$$\boldsymbol{k}_1=\boldsymbol{k}_2+\boldsymbol{k}_3,\quad \boldsymbol{k}_1=\boldsymbol{k}_4-\boldsymbol{k}_2,$$
$$\Omega_{\boldsymbol{k}_1}\approx\Omega_{\boldsymbol{k}_2}+\Omega_{\boldsymbol{k}_3},\quad \Omega_{\boldsymbol{k}_1}\approx\Omega_{\boldsymbol{k}_4}-\Omega_{\boldsymbol{k}_2},\tag{6-67}$$

允许模式间有频率失谐 $\delta_{3,4}=\Omega_{\boldsymbol{k}_1}\mp\Omega_{\boldsymbol{k}_2}-\Omega_{\boldsymbol{k}_{3,4}}$，这里 $\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2$ 是 2 个三波过程的公共模式. 文章讨论了模式复振幅$\{A_j\}$($j=1,2,3,4$)演化满足的耦合方程组，发现 2 个三波过程的耦合将破坏原来无耦合系统的可积性.

这里重点介绍文中讨论的另一个效应. 考虑因受到空间非均匀扰动，模式复振幅$\{A_j\}$出现了空间展宽，用傅里叶展开将其表示为

$$A_j(x,t)=\sum_{n=-N/2+1}^{N/2}a_{j_n}(t)\mathrm{e}^{inkx},\tag{6-68}$$

式中 $N$ 为偶数，$n=0$ 的项代表模式 $A_j(x,t)$空间均匀的部分，非零的 $a_{j_{n\neq0}}$ 使 $A_j(x,t)$展宽成一个波包. 设波包以群速度 $v_{g_j}$ 运动，将它们满足的耦合非线性方程写做

$$\frac{\partial A_1}{\partial t}+v_{g_1}\frac{\partial A_1}{\partial x}=A_2A_3-rA_2^*A_4,\tag{6-69a}$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial t}+v_{g_2}\frac{\partial A_2}{\partial x}=-A_1A_3^*-rA_1^*A_4,\tag{6-69b}$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial t}+v_{g_3}\frac{\partial A_3}{\partial x}=\mathrm{i}\delta_3A_3-A_1A_2^*,\tag{6-69c}$$

$$\frac{\partial A_4}{\partial t}+v_{g_4}\frac{\partial A_4}{\partial x}=\mathrm{i}\delta_4 A_4+rA_1A_2,\tag{6-69d}$$

其中 $r$ 为耦合强度. 方程组(6-69)是一个保守系统,它可以从一个哈密顿密度函数导出. 当 $r=0$ 时,系统是可积的共振三波($A_1$,$A_2$,$A_3$)哈密顿和一个独立的线性波 $A_4$;$r\neq 0$ 时,模式 $A_4$ 耦合进三波系统.

假设在没有空间非均匀扰动时系统的背景状态为

$$A_1(t=0)=\mathscr{A}\neq 0,\tag{6-70a}$$

$$a_{j_n}(t=0)=0,\quad (j=2,3,4)\tag{6-70b}$$

这里 $\mathscr{A}$ 是个复常数,这就是说,未扰初态只有模式 $j=1$ 的空间均匀($n=0$)分量是非零的. 现假设初始时这个空间均匀背景受到小扰动

$$A_j(x,t)=a_{j_1}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa x}+a_{j_{-1}}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\kappa x},\tag{6-71}$$

这里 $a_{j_{\pm1}}$ 是一定频率的小幅度振荡,有 $a_{j_{\pm1}}\sim\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ 和 $|a_{j_{\pm1}}|\ll|\mathscr{A}|$,只要 $\kappa\neq 0$,初始扰动 $A_j$ 就是空间非均匀的. 计算在这样的初始假设下系统(6-69)的演化,观察能量能否出现向小尺度转移的现象.

为此,定义平均波数

$$\sqrt{\langle N^2\rangle}=\left[\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{4}n^2\,|a_{j_n}|^2\Big/\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{4}|a_{j_n}|^2\right]^{1/2},\tag{6-72}$$

这里 $N$ 是计算中采用的模式总数,因为以模式振幅加权,$\sqrt{\langle N^2\rangle}$的值反映了携带较多能量的运动模式处在什么波数范围.

先讨论空间均匀扰动的情形,这时$\{A_j\}$只包含 $j_0$ 模式,即

$$A_j(x,t)=a_{j_0}(t),\tag{6-73}$$

方程组(6-69)退化为一个与空间变量无关的时序系统. 研究表明,此时位相失谐对系统的动力学有重要影响,在给定其他参数下,当频率失谐 $\delta_3=0$ 时,无论耦合强度 $r$ 取什么值,系统都是可积的,而随 $\delta_3$ 增大运动从有规变得混沌. 如 $r=1$ 时,对应 $\delta_3=0.0001$,耦合三波的运动完全是有规的,而对应 $\delta_3=0.1$,运动变得混沌,且混沌的程度随耦合强度 $r$ 增加而增加. 在混沌状态下原来可积系统的拓扑环已被破坏,不过空间均匀的扰动(6-73)并未增加系统的自由度,运动仍被约束在 $2\times4$ 维相空间中,不可能出现能量向更小尺度的转移.

再考虑 $\kappa\neq 0$ 时形式为式(6-71)的空间非均匀扰动,在这样的扰动下系统(6-69)的运动获得了更多的自由度,那么能量是否因此可以在更高维的相空间中流动呢? 文章发现,能量能否出现级联与在同样参数下受到空间均匀扰动(6-73)时的时序子系统的运动状态密切相关,当子系统的运动有规时,并没有出现能量向小尺度转移的趋势,只有子系统运动混沌,能量才能向小尺度级联. 如在图 6-15 中,$r=1$ 时,在小频率失谐 $\delta_3=0.0001$ 时(对应时序子系统有规运动),平均波数

$\sqrt{\langle N^2 \rangle}$几乎一直为0；而在大频率失谐 $\delta_3=0.1$ 时(对应时序子系统混沌运动)，$\sqrt{\langle N^2 \rangle}$随时间持续上升，仅伴有小幅振荡，表明能量逐渐向小尺度转移.

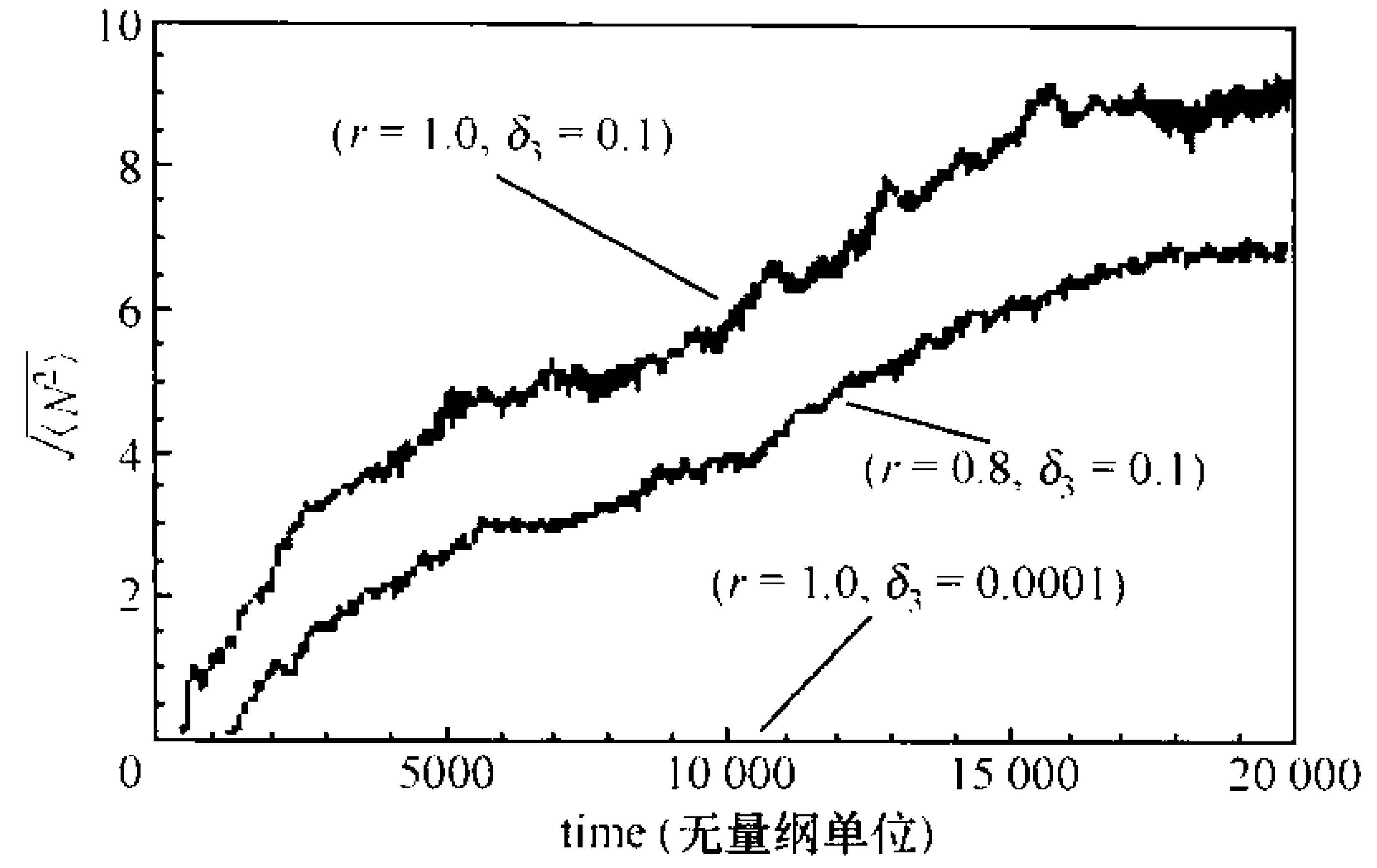



图 6-15 空间展宽的波-波相互作用系统(6-69)中平均波数 $\sqrt{\langle N^2 \rangle}$随时间的演化(引自文[183])

该文作者认为，这个结果表明，相空间中的低维时序子系统就像一个热源，可以把能量输送到它所嵌入的高维系统的其他自由度上去，当子系统运动有规时，没有热量可供利用，而当子系统运动混沌时，它拥有充足的热量向越来越小的尺度传送. 此外，可利用的热量与子系统的混沌程度有关，混沌程度越高，在空间非均匀扰动下热量就更快地向小尺度转移，如图 6-15 中在 $r=0.8,\delta_3=0.1$ 时，平均波数 $\sqrt{\langle N^2 \rangle}$随时间上升的速度比 $r=1,\delta_3=0.1$ 时为慢，这与前者对应混沌程度较低的子系统有关.

这个模型似乎给人以希望，它将由空间均匀模式构建的波-波相互作用看做是嵌在更高维的相空间中的一个内核，空间非均匀扰动的小尺度模式从内核汲取热量，与内核中那些只能在低维相空间中运动的模式相比，它们是一些活跃的模式，能够更自由地在高维相空间中流动和进行能量交换，并在一定条件下出现能量级联.

因为部分地引入了空间变量，模型(6-69)为能量级联提供了无穷维的相空间，美中不足的是，在图 6-15 中能量级联的演化曲线总体上呈持续上升的态势，只有小幅振荡，若不是受到计算中所采用的模式总数 $N$ 的限制，系统能量似乎将不断地向波数越来越短的模式上堆积；若计算运动的谱函数，它们必定有较窄的峰，且峰值频率一定不断向高波数方向移动. 这显然不符合从实际流体湍流得到的图像，充分发展湍流的能谱有很宽的惯性区，那里谱强度随波数增加以幂率形式下降.

只有讨论空间延展系统中非线性波的动力学，才有可能理解诸如能量级联这类强湍流中的特有现象. 我们知道，一个空间延展系统有无穷维的相空间，关于非

线性波在这个相空间中的运动，模型(6-69)为我们构建了这样一个图像：时序系统的均匀模式被约束在高维相空间的一个低维子空间中，形成一个相对“呆滞”的内核，大量活跃模式扰动这个内核并从中汲取能量.我们通过对实际非线性波方程动力学的深入分析，得出了不尽相同的图像.在恰当的运动坐标系中观察所获得的这个图像中，也有活跃模式这个不可缺少的因素，它们负责能量在不同尺度间转移；如果说该图像中也存在一个被活跃模式扰动的内核的话，那么这个内核只是高维相空间中的一个不动点，一个非平凡的不动点.读者可能会问，一个不动点根本不可能成为一个热库，它对活跃模式能起什么作用呢？我们将说明，对空间延展系统来说，这个不动点对应着真实空间中的一个(运动着的)结构，这些由模式黏在一起运动形成的结构就像一个空间势，影响着那些活跃模式，并与它们共同造就了非线性波千变万化的时空斑图.下一章我们将揭开新的一页，说明这个图像是怎样逐步建立起来的.

# 第七章　空间相干和非相干波动解

如果在一定条件下非线性波只有少数模式被激发，它的运动有低维相空间，波-波相互作用模型是一个不错的近似，但在大多数情况下，它并不是非线性波的动力学的理想模型. 这类模型最大的缺憾在于，它不能告诉我们在坐标空间中无穷多个波动模式是如何自组织的. 例如，第五章中曾经提到，在依赖于时间和空间的系统中，模式可能“黏在一起”运动，形成空间相干的结构，如孤立子、激波以一定的群速度运动，涡旋波则一边以一定的角速度旋转，一边以一定的群速度前进，用波-波相互作用模型不可能讨论这类问题.

既然模式有自组织形成空间相干结构的倾向，一个更重要的问题是：这些相干结构稳定吗？它们能否经得起扰动？经验告诉我们，有一些自然形成的结构是不稳定的，例如在一个有限大小的底面上慢慢地添加沙子，这些沙子会堆积成一定形状的沙堆，当沙堆到了某个高度，再继续添加哪怕很少的沙粒，它都会出现各种尺度的坍塌，说明沙堆存在一个不稳定的临界结构状态. 在理论物理中，沙堆问题是讨论自组织临界性(self-organized criticality, SOC)的典型模型[181]. 在波动系统中，相干的波动结构对扰动如何响应，它们在扰动下能不能保持稳定，同样是一个重要和有兴趣的问题.

组成相干结构的模式由于“黏在一起”运动已经变得不再活跃，设想一个相干结构受到扰动，扰动模式没有被黏在相干结构中，仍然保持活跃，不过，它的运动不可能不受到相干结构的影响. 想象一下沙漠中的情形，沙子在风力作用下自组织成一排排沙丘，此时若再有随风飘来的散在沙粒滚落其上，沙粒的运动必然要受到沙丘的加速或减速. 模式当然不是沙粒，它们是空间延展量，黏在一起形成的空间结构还常以一定的群速度运动(其实沙丘也在缓慢移动)，不过在一定意义上我们仍然可以作这样的类比：假设在空间中已存在由模式架构起的相干定态波动(如果方程允许这样的解，理论上总可以把这个解设定为初始状态)，当活跃模式作为扰动进入系统，就像散在的沙粒落到沙丘上，它们的运动一定也会受到这个相干结构的影响. 在与相干结构作用的同时，这些扰动模式又将怎样自组织呢?

诸如波动模式如何架构起相干结构以及活跃模式如何受它们的影响这些效应，只有在考虑了空间变量以后才有可能讨论. 在此后的几章中，我们将试图探讨这些问题. 本章先重点介绍非线性波方程的相干波动解以及非相干波动解的一些现象，包括保守及有驱动和耗散的情形. 保守的非线性波方程的定态波解常常可以

用解析方法漂亮地得到，不过这并不意味着这些解对扰动一定是稳定的. 对于保守系统来说，定态波解的稳定性取决于相应非线性波动方程是否可积，而方程的可积性又与它的解在复平面上奇点的性质有关系. 与保守系统中的情形类似，许多有耗散的非线性波方程也有空间相干的定态波解. 在模拟一些非线性波动方程时发现，它们的(稳定和不稳定的)定态波解在参数空间中高度有组织，特别是，在一个非线性漂移波模型中观察到，出现湍流解的参数区与一类不稳定相干波动解存在的参数区密切相关，这个现象为分析湍流产生机制提供了十分重要的线索.

## §7.1 保守系统

在实际系统中观察到的空间相干结构现象，已从一些非线性波动方程的解得到解释. 在第二章中曾提到 KdV 方程的孤立子解，在数学上它可以用逆散射(inverse scattering)方法求出. 逆散射是相对于散射而言的，在量子力学问题中，对于给定空间势阱，人们可以找到它引起波函数散射的数据，逆散射方法则是在已知散射数据时，反过来求这个空间势(方程的解)，这就好比从一个客体作机械振动所发出的所有声音信息，如每个频率的能量或振幅，来寻找出该客体的形状[1]. 空间相干解与“势”这个概念真有不解之缘，在逆散射方法和后面关于非线性波的动力学分析中，我们都会看到它的身影.

### 7.1.1 空间局域化和非局域化的相干波动解

除孤立子那样的空间局域化的相干结构外，流体系统中更常见的相干结构有波列形状，如海洋中一排排波浪，波形光滑形状不变，且以一定的群速度运动. 许多非线性波方程都有这样空间周期变化的定态波解，本书中称之为孤立波(solitary wave)解，以区别于空间局域化的孤立子解.

其实，孤立子解是孤立波解在空间周期趋于无穷长时的极限情形，让我们以下面的方程为例来说明这一点，

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + a\frac{\partial^3 \phi}{\partial t \partial x^2} + b\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + c\frac{\partial \phi}{\partial x} + f\phi\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \tag{7-1}$$

$a=0$ 时，上式是 KdV 方程(3-13)，$b=0$ 时，它是一维非线性漂移波方程(3-46). 这里我们在各项前分别加了可调系数 $a,b,c,f$.

让我们寻找具有行波形式 $\phi(\xi)$ 的空间相干解，其中 $\xi \equiv x-ut$，此时方程(7-1)蜕化为关于变量 $\xi$ 的常微分方程

$$-u\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi} + (b-ua)\frac{\mathrm{d}^3\phi}{\mathrm{d}\xi^3} + c\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi} + f\phi\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi} = 0, \tag{7-2}$$

积分一次，得到

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\xi^2}=\frac{(u-c)\phi-\frac{1}{2}f\phi^2+c_1}{b-ua},\tag{7-3}$$

方程两边乘以 $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}\xi$,积分,求得

$$\xi-\xi_0=\int_{\phi(\xi_0)}^{\phi(\xi)}\mathrm{d}\phi\sqrt{\frac{b-ua}{c_2+2c_1\phi+(u-c)\phi^2-f\phi^3/3}},\tag{7-4}$$

式中 $c_1,c_2$ 是积分常数.

将式(7-4)改写做

$$\sqrt{\frac{-f}{3(b-ua)}}(\xi-\xi_0)=\int_{\phi(\xi_0)}^{\phi(\xi)}\frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{(\phi-\phi_a)(\phi-\phi_b)(\phi-\phi_c)}},\tag{7-5}$$

上式右边是一个椭圆积分,其中常数 $\phi_a,\phi_b,\phi_c$ 是三次方程,即 $-f\phi^3/3+(u-c)\phi^2+2c_1\phi+c_2=0$ 的 3 个根,满足下面的关系

$$\phi_a+\phi_b+\phi_c=\frac{3(u-c)}{f},\tag{7-6}$$

此外它们还依赖于积分常数 $c_1,c_2$.

从式(7-3)可见,如果将 $\xi$ 视为时间变量,$\phi$ 就好像是在势阱中运动的一个粒子,这类势阱称为 Sagdeev 势,这里有三次幂函数的形式

$$V(\phi)=\frac{2}{\phi_c-\phi_a}c_{\pm}^2(\phi-\phi_a)(\phi-\phi_b)(\phi-\phi_c).\tag{7-7}$$

图 7-1 给出势函数 $V(\phi)$的一个实例.

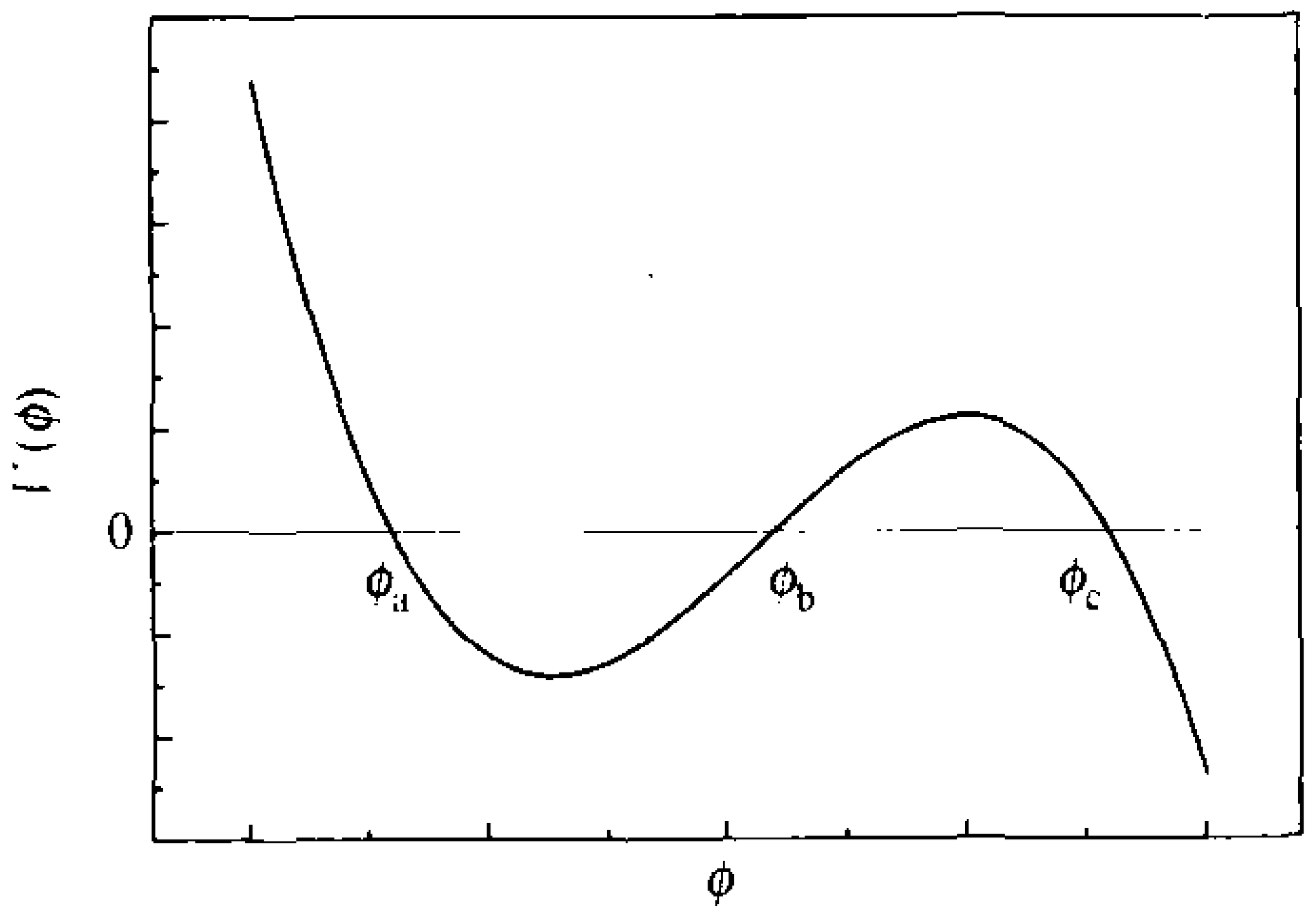



图 7-1　Sagdeev 势 $V(\phi)$示意图

其中 $\phi_a,\phi_b,\phi_c$ 是函数 $V(\phi)$与实轴的 3 个交点,它们满足下面的关系:

$$c_{\pm}\equiv\sqrt{\frac{\pm f(\phi_c-\phi_a)}{12(b-ua)}}.\tag{7-8}$$

式(7-5)已将 $\xi$ 表示为 $\phi$ 的椭圆积分,它的反函数就给出 $\phi$ 随 $\xi$ 变化的显式解.设 $\phi_a\leqslant\phi_b\leqslant\phi_c$,在 4 个不同参数区找到的解 $\phi_0(\xi)$都可以用椭圆函数表达[185],它们是

(1) 在 $\phi \leqslant \phi_a$ 范围内的解是

$$\phi_0(\xi) = \frac{\phi_a - \phi_c[1 - \mathrm{sn}^2(c_- \xi \mid p)]}{\mathrm{sn}^2(c_- \xi \mid p)}, \tag{7-9}$$

(2) 在 $\phi_a < \phi \leqslant \phi_b$ 范围内的解是

$$\phi_0(\xi) = \phi_a + (\phi_b - \phi_a)\mathrm{sn}^2(c_- \xi \mid q), \tag{7-10}$$

(3) 在 $\phi_b < \phi \leqslant \phi_c$ 范围内的解是

$$\phi_0(\xi) = \phi_c - (\phi_c - \phi_b)\mathrm{sn}^2(c_- \xi \mid p), \tag{7-11}$$

(4) 在 $\phi_c < \phi$ 范围内的解是

$$\phi_0(\xi) = \frac{\phi_c - \phi_b \mathrm{sn}^2(c_- \xi \mid q)}{1 - \mathrm{sn}^2(c_- \xi \mid q)}, \tag{7-12}$$

上面各式中 $\mathrm{sn}(c_- \xi)$ 是雅可比椭圆函数，宗量 $p, q$ 分别为

$$p \equiv \sqrt{\frac{\phi_c - \phi_b}{\phi_c - \phi_a}}, \quad q \equiv \sqrt{\frac{\phi_b - \phi_a}{\phi_c - \phi_a}}. \tag{7-13}$$

需要注意的是，解(7-9)～(7-12)中的参数 $\phi_a, \phi_b, \phi_c$ 受到关系(7-6)和(7-8)的约束，因此反过来，如果任意选定参数 $\phi_a$、$\phi_b$、$\phi_c$ 和 $u$ 构造出(7-9)～(7-12)形式的函数，那么只有当方程(7-1)的各个系数满足相应的约束条件，它们才是方程的解，换句话说，这时方程的系数不能完全独立选取.

让我们分析在 $\phi_a < \phi \leqslant \phi_b$ 范围内的解(7-10)，这是一个孤立波类型的解. 在第六章中已经知道，宗量为 $q(0<q<1)$ 的椭圆函数 $\mathrm{sn}(x \mid q)$ 有周期 $4K(q)$，这里 $K(q)$ 是完全椭圆积分，由此可以计算出孤立波解(7-10)的轨道周期. 在 $q \to 0$ 时椭圆函数 $\mathrm{sn}(c_- \xi) \to \sin(c_- \xi)$，不过此时波动幅度 $(\phi_b - \phi_a) \to 0$，因此 $q=0$ 对应的是一个具有有限大小的振动频率但振动幅度为 0 的状态，这与单摆静止时的平衡态十分相似.

图 7-2 给出孤立波解(7-10)的时间行为随 $q$ 值的改变，由图可知，随 $q$ 值增加从(a)到(c)运动周期不断加长，随波动幅度增大波形逐渐偏离 $q=+0$ 时的正弦平方形状，提示分波频率渐次增强；最后，在 $q \to 1$ 时 $\mathrm{sn}(c_- \xi) \to \mathrm{sech}(c_- \xi)$，周期将变得无穷长，孤立波解(7-10)趋向如下形式的孤立子解.

$$\phi_0(\xi) = \phi_a + (\phi_b - \phi_a)\mathrm{sech}^2(c_- \xi), \tag{7-14}$$

这是一个空间局域化的解，其形状可参考图 7-5 中的实线，波的能量聚集在很小的空间范围.

图 7-3 中的实线给出孤立波解(7-10)的相图，$\mathrm{d}\phi_0(\xi)/\mathrm{d}\xi$ 作为 $\phi_0(\xi)$ 的函数，图中取定 $\phi_a$ 和 $\phi_c$，改变 $\phi_b$. 当 $\phi_b = \phi_a$（即 $q=0$）时轨道是相图上的一个孤立点，随着 $\phi_b$ 增加（即 $q$ 增加），这个孤立点发展成越来越大的孤立波周期轨道，它们的运动被约束在 $\phi_a$ 与 $\phi_b$ 之间的势阱中（参考图 7-1）；在 $\phi_b = \phi_c$（即 $q=1$）时，孤立波解变成为有无穷长空间周期的孤立子解(7-14)，在相图 7-3 上它是一条包围那些周期轨道

的同宿轨道[参考图 4-5(b)]，在 $\xi \to -\infty$ 时从同宿点($\phi_a$,0)出发，在 $\xi \to +\infty$ 时又回到这一点.

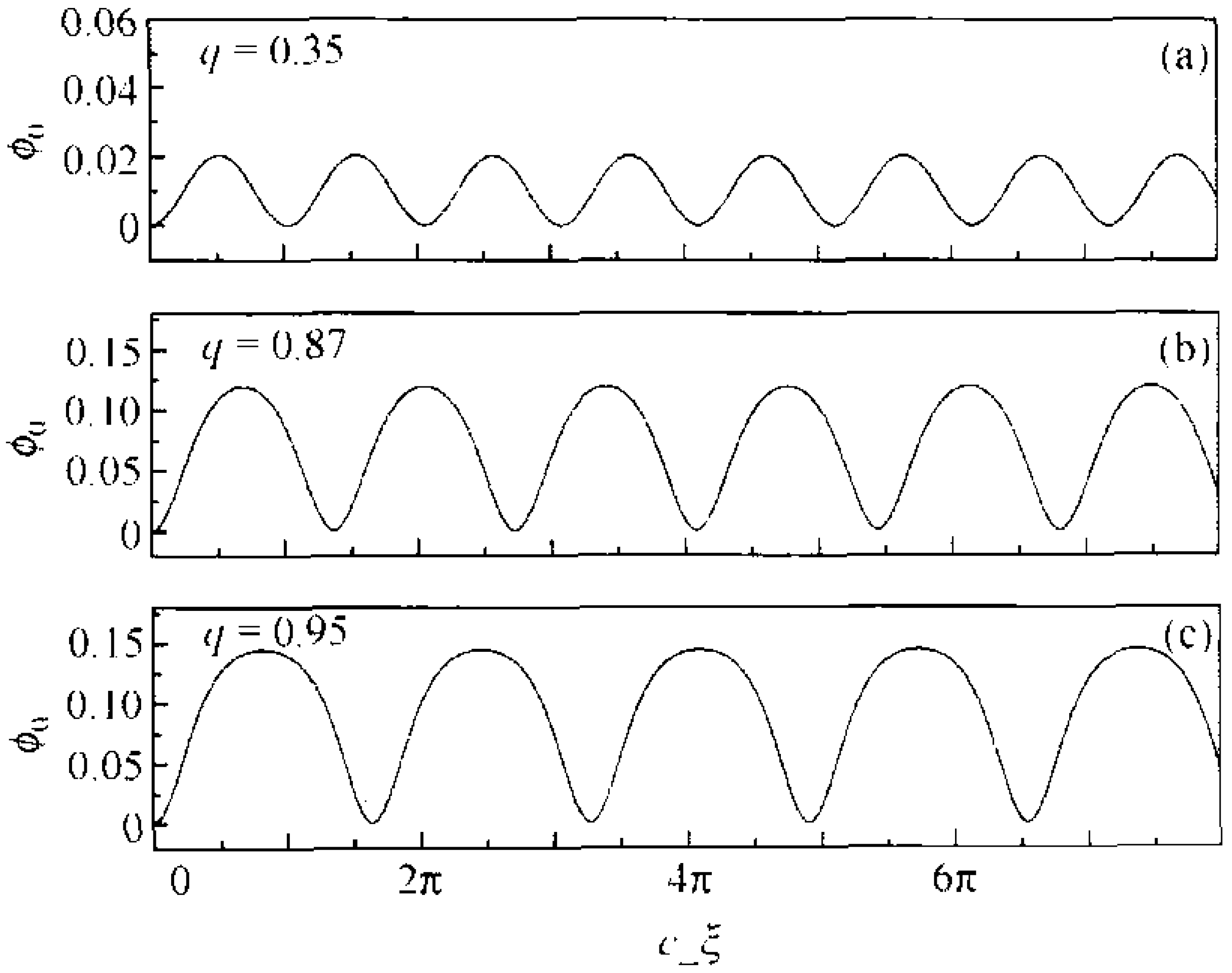



图 7-2 不同 $q$ 值下的孤立波解 $\phi_0(\xi)$ [式(7-10)]

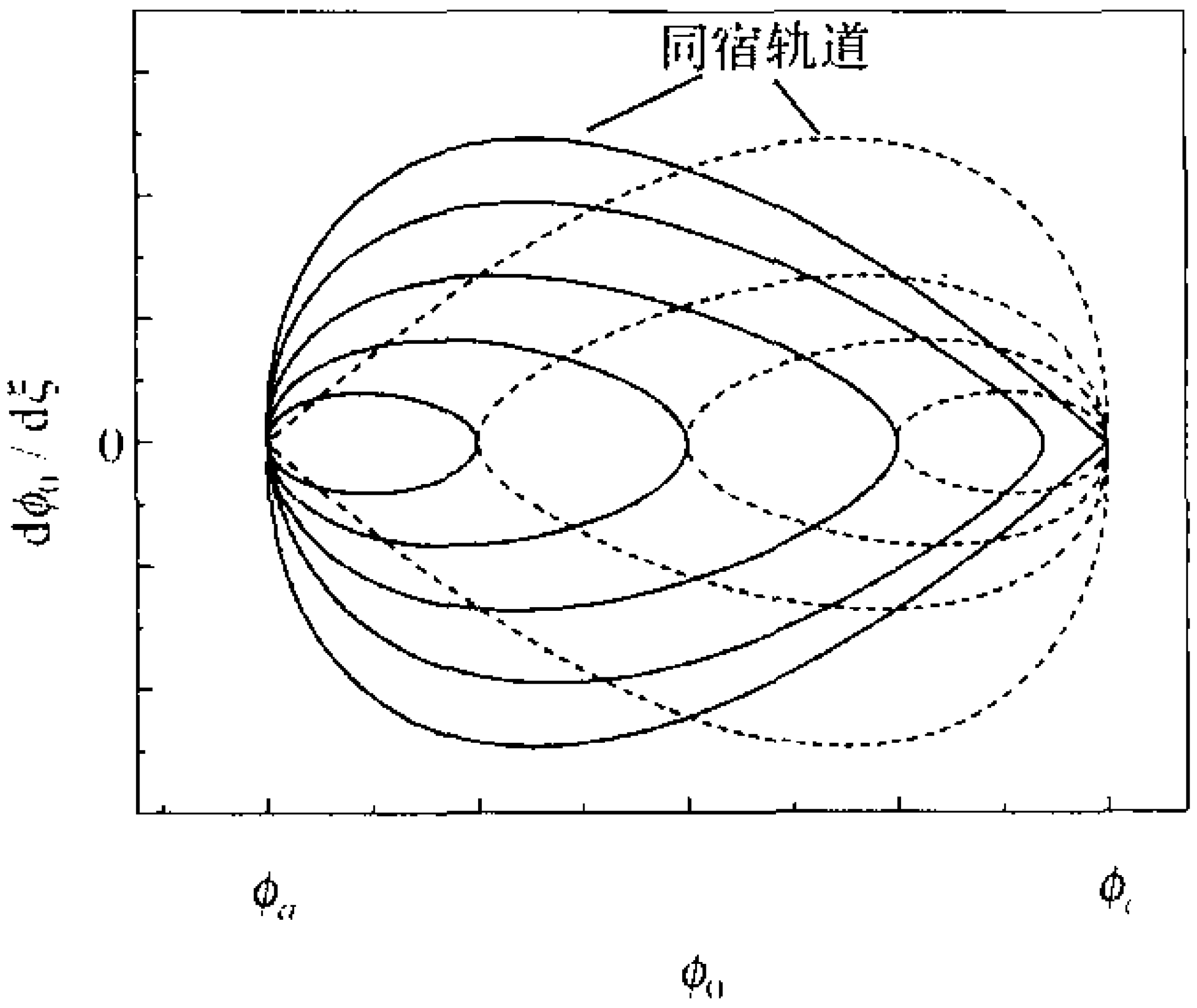



图 7-3 孤立波解 $\phi_0(\xi)$的相图 [式(7-10)为实线和式(7-11)为虚线]

在图 7-3 中还给出了($\phi_b$,$\phi_c$]范围内的解(7-11)，用虚线表示. 图 7-4 中则同时画出了(7-10)和(7-12)这两组解，在($\phi_c$,$\infty$)范围内的解(7-12)的幅度可以变得很大.

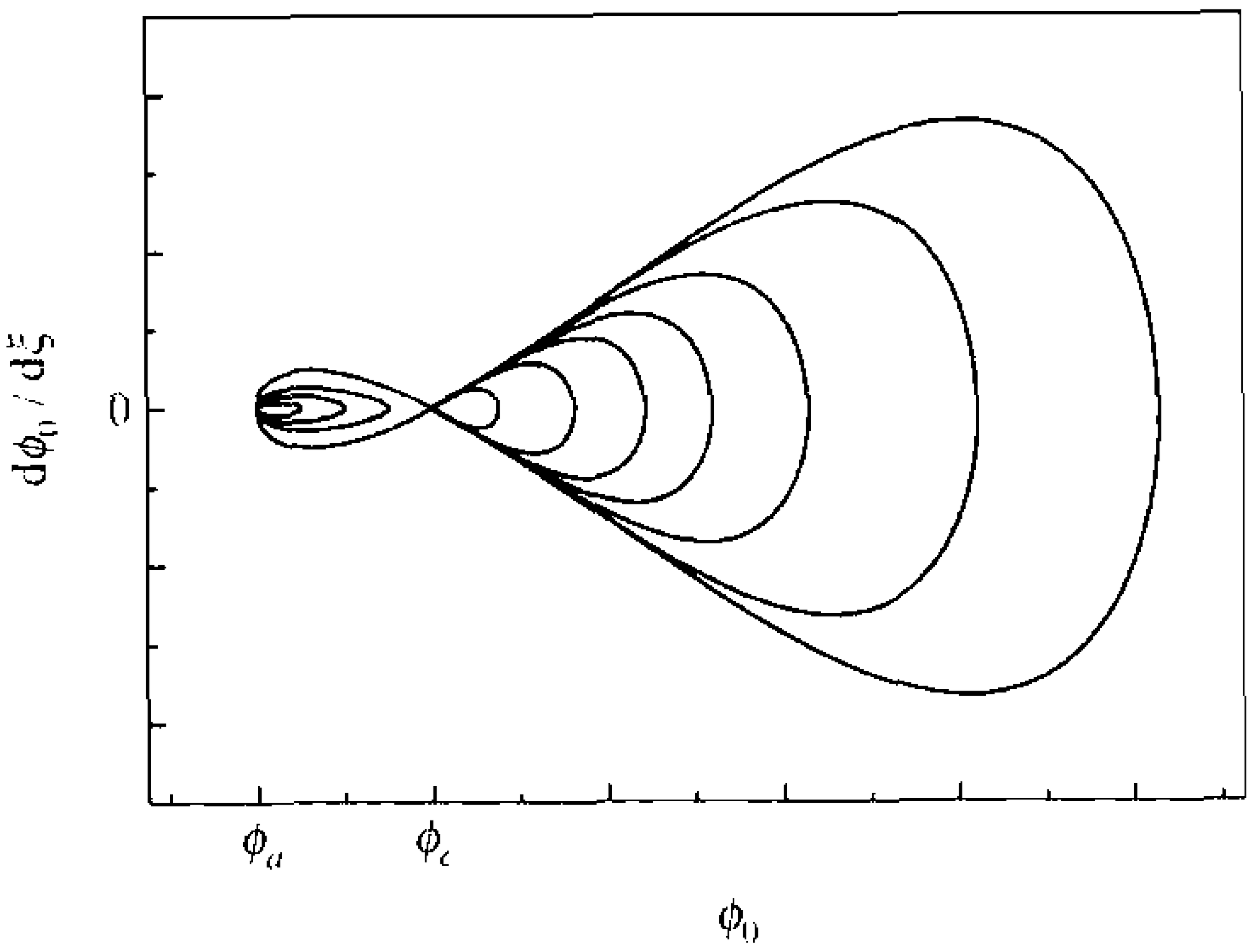



图 7-4 孤立波解 $\phi_0(\xi)$[式(7-10)和式(7-12)]的相图

在随波运动坐标系 $\xi = x - ut$ 中不能分辨空间坐标 $x$ 和时间坐标 $t$，若把 $\xi$ 看做是时间，孤立波 $\phi_0(\xi)$的运动就是一个非线性时序系统的问题. 我们看到，孤立波解(7-10)的演化与单摆有某些相似之处，例如，单摆的平衡位置是一个摆幅为 0 的正弦振荡，对应相图上一个孤立点，类似于解(7-10)在 $q \to 0$ 时的情形；随摆幅加大，单摆频谱中谐波谱线渐次出现，相图上的孤立点变成了周期轨道，这也与孤立波解(7-10)在 $q$ 增加时的情形相似. 不过，孤立波解(7-10)与单摆运动的对称性质

不同，包围单摆相图上椭圆轨道的是两条异宿轨道，包围孤立波相图上的周期轨道的是一条同宿轨道. 无论是在单摆的异宿轨道上还是孤立子的同宿轨道上，运动的特征时间尺度都是无穷长.

将空间周期为 $L$ 的孤立波解 $\phi_0(\xi)$ 作傅里叶展开，有 $\phi_0(\xi)=\sum_k A_k\cos(k\beta\xi+\theta_k)$，这里 $\beta\equiv 2\pi/L$，可见孤立波是由不同尺度 $l_k\equiv L/k(k=0,1,2,\cdots,\infty)$ 的振子形成的空间相干的周期结构，每个振子有常数位相 $\theta_k$ 和振幅 $A_k$，任意两个振子间的位相差都是常数. 这样，在随波坐标系 $\xi=x-ut$ 中，稳定的孤立波解实际上是这些不同尺度的振子之间建立的一个完美相同步状态. 在实验室坐标系 $(x,t)$ 中，孤立波解的展开是 $\phi_0(x-ut)=\sum_k A_k\cos(k\beta x-k\beta ut+\theta_k)$，因此，为实现这个相干状态，每个振子的频率都需要作相应的多普勒移动 $-k\beta u$. 可以把这看做是非线性系统普遍存在的相同步现象在空间延展系统中的特殊表现形式.

在中性流体中，像式(7-14)这样的孤立子解是重力势能的空间局域化，在等离子体中它们可以是静电势能或电磁能局域化的结果. 第三章中介绍的激光在等离子体中传播时光电场慢变部分所满足的 Zakharov 方程(3-75)和非线性薛定谔方程(3-77)都有这样以一定群速度传播的空间局域化解. 以 Zakharov 方程(3-75)为例，它有下面形式的包络孤立子解[57]，

$$\tilde{E}(x,t)=\sqrt{2}\eta\sqrt{1-V_g^2}\,\mathrm{sech}[\eta(x-V_gt)]\mathrm{e}^{iV_gx/2-i(V_g^2/4-\eta^2)t}, \tag{7-15}$$

这里 $\eta$ 和 $V_g$ 依赖于初始条件，离子在这个高频场压力下出现密度凹陷 $\delta n$，大小正比于场的能量

$$\delta n=-2\eta^2\mathrm{sech}^2\eta(x-V_gt). \tag{7-16}$$

因此，较之振荡电场的包络，$\delta n$ 有更窄的半宽度，见示意图 7-5. Zakharov 方程和非线性薛定谔方程的这些结果，很好地解释了激光入射到等离子体这样的非线性介质中时出现的成丝现象. 不过，Zakharov 方程的孤立子不像非线性薛定谔方程的那样坚固，它们在碰撞中会发生复杂的变化.

介质的非线性性质极大地改变了辐照的传播特性，甚至一些根据线性色散关系被禁止通过介质的辐射都可能借助非线性效应在介质中传播. 例如在超晶格中传播的辐照，线性色散关系规定介质有一个禁带间隙，频率位于间隙中的辐照被禁止传播，但如果折射率依赖于空间局域光强，情况就不一样了，理论计算表明，辐照可以进入介质，且波动沿传播方向的分布呈包络孤子形状[14]. 这样的孤子称为间隙孤子(gap soliton)，很多理论和实验都证实了间隙孤子的存在[186~188]，如文[189]将在周期结构中传播的电场分成快慢两部分，发现慢变振幅满足非线性薛定谔方程并有孤立子解.

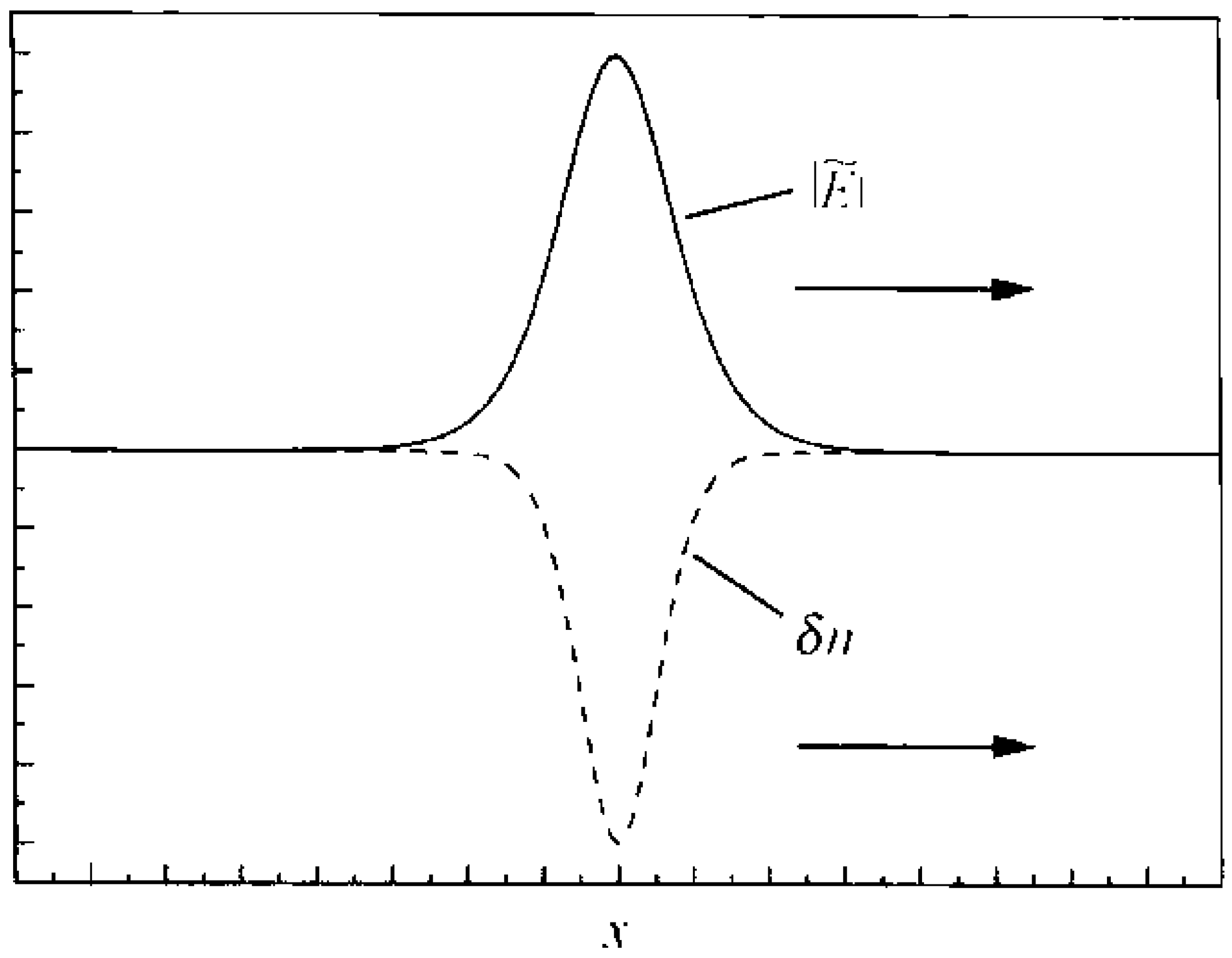



图 7-5　激光在等离子体中传播时光电场的包络孤立子解$|\tilde{E}(x)|$(实线)
和等离子体离子密度扰动 $\delta n(x)$的腔子解(虚线)示意图
(图中已将 $\delta n$ 乘以因子 0.01)

## 7.1.2　约化微扰方法

在不少实际流体和等离子体系统中都观察到空间相干结构解,在第三章中知道,描写这类系统的运动常采用流体力学方程组,形式非常复杂.对于中性流体,它包括了连续性方程、运动方程,以及能量方程或状态方程;如果是带电粒子系统,还需要与麦克斯韦方程组联立求解,其中若属于静电问题的要应用泊松方程,如果是电磁问题,涉及的方程就更多了.很多时候还需要处理多种成分带电粒子,例如,除电子和离子外,有时还有带电的尘埃,描写这类系统需要一个庞大的方程组,即使用计算机求解也非易事,解析方法还能奏效吗?

针对这类问题,人们发展了一个近似方法,删繁就简,将复杂的方程体系约化到简洁的非线性波动方程,以便于寻找到解析形式的解,这就是所谓的约化微扰方法(reduced perturbation method)[190].在这个方法中,要将时间和空间变量分别作关于小量的恰当尺度变换,再将待解函数作微扰展开并逐级求解.下面我们以强电子束在等离子体中传播为例,说明采用这个方法如何将描写系统运动的复杂流体力学方程组约化到 KdV 方程并由此找到孤立子解[191].

计算机数值模拟显示,强电子束在等离子体中传播时,如果受到横向电磁扰动,会出现成丝现象,在束电子成丝的地方,背景等离子体电子被排开,出现密度凹陷[192].类比激光在等离子体中的传播,容易想到,强电子束的成丝极有可能也是一种非线性的自组织行为.

假设系统在电子束传播方向 $z$ 轴上是均匀的,只需要考虑垂直于束流平面上带电粒子的运动.设初始时有密度 $n_b(0)$、速率 $v_b(0)=u_b$ 的束电子沿 $z$ 轴方向流动,密度 $n_p(0)$、速率 $v_p(0)=u_p$ 的等离子体电子反向于 $z$ 轴流动,且 $n_b(0)=\alpha n_p(0)$,这里 $\alpha\ll 1$ 是常数,束电子和等离子体电子在纵向是冷的,在垂直于 $z$ 轴平面上有

小的热分散，横向温度分别为 $\theta_b$ 和 $\theta_p$. 假设初始时有电流中性化，$n_b(0)u_b = n_p(0)u_p$，系统处在一个平衡态. 这个平衡态并不稳定，让我们忽略离子运动，讨论受扰束电子和等离子体电子的运动.

因为电子有定向运动流，这个问题涉及的不是简单的静电现象，带电粒子的密度涨落将引起横向电磁扰动. 限于讨论沿 $x$ 轴方向的一维问题，假设电子密度涨落引起的电势涨落为 $\phi$，且沿 $z$ 轴方向有矢势 $A_z$，可以导出束电子和等离子体电子运动满足的无量纲化流体方程组如下[193]

$$\frac{\partial n_b}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(n_b v_b) = 0, \tag{7-17a}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} - (-u_p + A_z)\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\theta_p}{n_p}\frac{\partial n_p}{\partial x} = 0, \tag{7-17b}$$

$$\frac{\partial v_b}{\partial t} + v_b\frac{\partial v_b}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} - (u_b + A_z)\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\theta_b}{n_b}\frac{\partial n_b}{\partial x}. \tag{7-17c}$$

它们需要与下列关于标势 $\phi$ 和矢势 $A_z$ 的方程联立求解，

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = n_p + n_b - 1 - \alpha, \tag{7-18a}$$

$$-\frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} = n_b u_b - n_p u_p + (n_b + n_p)A_z. \tag{7-18b}$$

导出上述方程时利用了纵向正则动量守恒条件，$v_{j,z} = \pm u_j + A_z$（$j$ 为 b，p，分别对应于 $\pm$ 号）.

在消去 $\phi$ 之后，方程组可写成下面简约的形式[191]，

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{\underline{W}} \cdot \frac{\partial \underline{U}}{\partial x} + \left[\sum_{\beta=1}^{1}\prod_{\alpha=1}^{3}\left(\underline{\underline{H}}_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial t} + \underline{\underline{K}}_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial x}\right)\right] \cdot \underline{U} = 0, \tag{7-19}$$

这里列矢量 $\underline{U}$ 为

$$\underline{U} = (n_b, v_b, n_p, A_z)^{\mathrm{T}}, \tag{7-20}$$

系数矩阵 $\underline{\underline{W}}$ 为

$$\underline{\underline{W}} = \begin{bmatrix} v_b & n_b & 0 & 0 \\ \theta_b/n_b & v_b & -\theta_p/n_p & u_b + u_p \\ 0 & -n_b & v_b & 0 \\ 0 & -\dfrac{u_b + u_p}{n_b + n_p} n_b & 0 & v_b \end{bmatrix}, \tag{7-21}$$

$\underline{\underline{H}}_\alpha^\beta$ 和 $\underline{\underline{K}}_\alpha^\beta$ 各有 12 个 4×4 矩阵，这里没有具体写出它们的矩阵元的形式，重要的是，这些矩阵元依赖于未知函数 $n_b, v_b, n_p, A_z$，因此方程(7-19)是非线性的.

对应系统初始的平衡态 $\underline{U}(0) = \underline{U}_0$ 有

$$\underline{\underline{W}}(\underline{U}_0) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 \\ \theta_b/\alpha & 0 & -\theta_p & (1+\alpha)u_b \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha u_b & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{7-22}$$

可求得其本征值为

$$\lambda = \pm\left[\theta_b + \alpha\theta_p - \alpha(1+\alpha)u_b^2\right]^{1/2}, \tag{7-23}$$

在 $\theta_b + \alpha\theta_p > \alpha(1+\alpha)u_b^2$ 时本征值 $\lambda$ 是实数.

现假设系统满足这个条件,有实的本征值 $\lambda$,作变换

$$\xi = \varepsilon^{1/2}(x - \lambda t), \quad \eta = \varepsilon^{3/2}t, \tag{7-24}$$

并将所有变量对小量 $\varepsilon$ 作展开

$$\underline{U} = \underline{U}_0 + \varepsilon\underline{U}^{(1)} + \varepsilon^2\underline{U}^{(2)} + \cdots, \tag{7-25}$$

代入方程(7-19),按照约化微扰方法,按 $\varepsilon$ 的幂次逐级寻找扰动量满足的方程.

在 $\varepsilon^{3/2}$ 级上得到

$$\underline{U}^{(1)} = n_b^{(1)}(\xi,\eta)\,\underline{R} + \underline{V}^{(1)}(\eta), \tag{7-26}$$

这里 $\underline{R}$ 是矩阵 $\underline{\underline{W}}_0 \equiv \underline{\underline{W}}(\underline{U}_0)$ 对应本征值 $\lambda$ 的右本征矢量,其中对应 $n_b^{(1)}$ 的分量归一化为 1, $\underline{V}^{(1)}$ 可由边界条件决定,假设在无穷远处系统趋向平衡态解 $\underline{U}_0$,则有 $\underline{V}^{(1)} = 0$.

在 $\varepsilon^{5/2}$ 级上,用 $\underline{\underline{W}}_0$ 的左本征矢量 $\underline{L}$ 乘以方程(7-19)两边,消去 $\underline{U}^{(2)}$,得到关于束电子扰动 $n_b^{(1)}$ 的方程为

$$\frac{\partial n_b^{(1)}}{\partial\eta} + P_b n_b^{(1)}\frac{\partial n_b^{(1)}}{\partial\xi} + Q_b\frac{\partial^3 n_b^{(1)}}{\partial\xi^3} = 0, \tag{7-27}$$

这里

$$P_b \equiv \frac{1}{\underline{L}\cdot\underline{R}}\left[\underline{L}\cdot\sum_i r_i\left(\frac{\partial\underline{\underline{W}}}{\partial u_i}\right)_0\cdot\underline{R}\right], \tag{7-28a}$$

$$Q_b \equiv \frac{1}{\underline{L}\cdot\underline{R}}\left[\underline{L}\cdot\sum_{\beta=1}^{4}\prod_{\alpha=1}^{3}\left[-\lambda\underline{\underline{H}}_{\alpha 0}^{\beta} + \underline{\underline{K}}_{\alpha 0}^{\beta}\right]\cdot\underline{R}\right], \tag{7-28b}$$

式中下标 0 表示在平衡态处取值,$r_i$ 是 $\underline{R}$ 的第 $i$ 个分量.

$$\underline{R} = (1, \lambda/\alpha, -1, -u_b)^{\mathrm{T}}, \quad \underline{L} = \left(1, \frac{\alpha\lambda}{\theta_b}, -\frac{\alpha\theta_p}{\theta_b}, \frac{\alpha(1+\alpha)u_b}{\theta_b}\right), \tag{7-29}$$

显然,束电子扰动 $n_b^{(1)}$ 满足的方程(7-27)是一个 KdV 方程.

在弱非线性情形,寻找束电子密度形式为 $n_b^{(1)}(\xi - a\eta)$ 的解,得到

$$n_b^{(1)} = \frac{3a}{P_b}\operatorname{sech}^2\left\{\left(\frac{a\varepsilon}{4Q_b}\right)^{1/2}\left[x - x_0 - (\lambda + \varepsilon a)(t - t_0)\right]\right\}, \tag{7-30}$$

这是一个孤立子解,传播速度为 $\lambda + \varepsilon a$,波幅 $3a/P_b$,半宽度 $(a\varepsilon/4Q_b)^{1/2}$.

类似地,将 $\underline{R}$ 相应于 $n_p$ 的分量归一化为 1,用同样的方法找到背景等离子体

电子密度扰动 $n_p^{(1)}$ 满足下面的方程

$$\frac{\partial n_p^{(1)}}{\partial \eta} + P_p n_p^{(1)} \frac{\partial n_p^{(1)}}{\partial \xi} + Q_p \frac{\partial^3 n_p^{(1)}}{\partial \xi^3} = 0, \tag{7-31}$$

它也是一个 KdV 方程，也有孤立子解，只需把式(7-30)中的下标换作 p 即是. 容易说明 $Q_p = Q_b$ 和 $P_p = -P_b$，因此在束电子 $n_b^{(1)}$ 局域化成密度峰的地方，等离子体电子 $n_p^{(1)}$ 出现密度凹陷，它的形状和传播速度都与束电子密度扰动的孤子相同. 束电子的孤立子解和等离子体电子的腔子解见示意图 7-6.

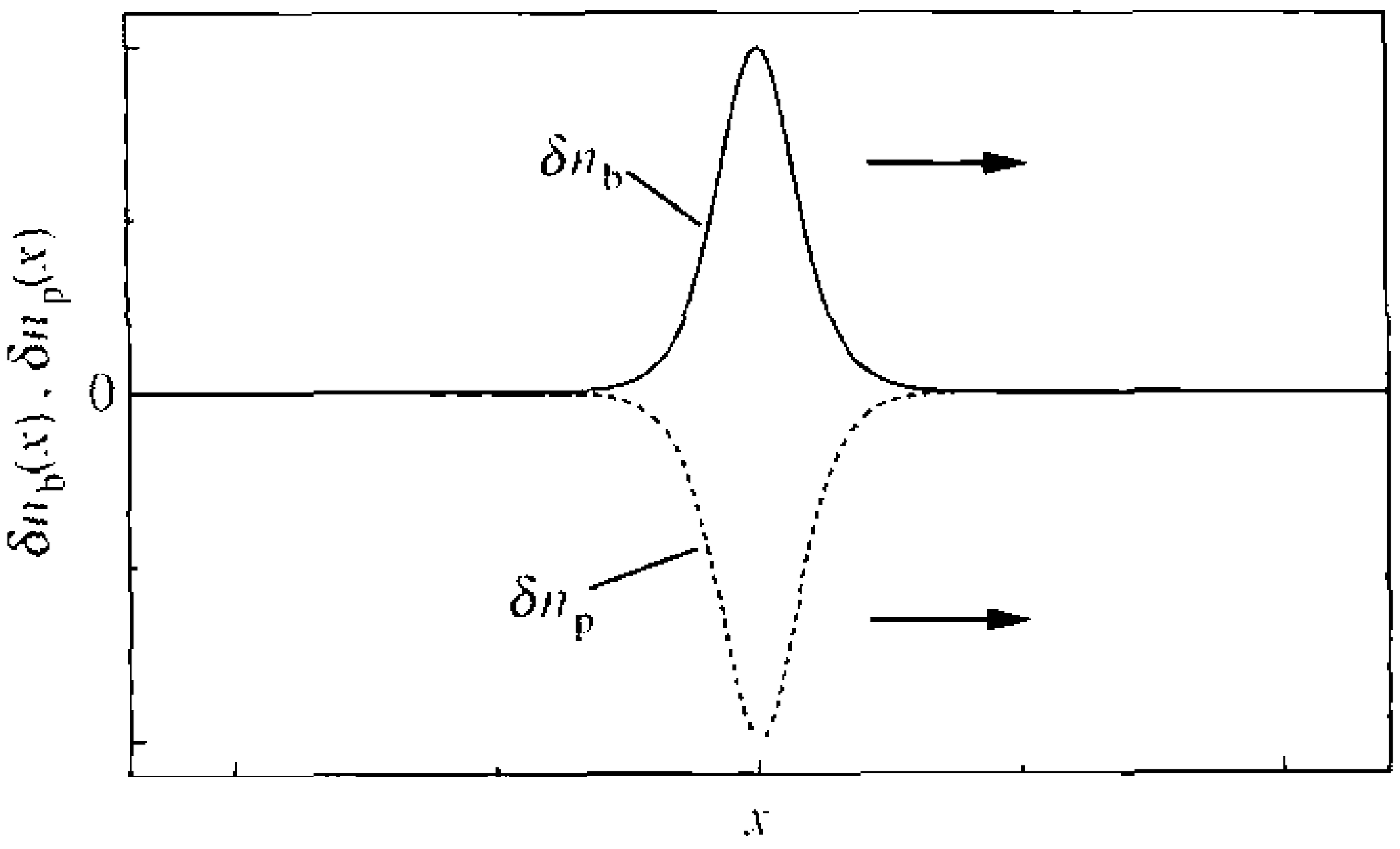



图 7-6　强电子束在等离子体中传播时，束电子密度扰动 $\delta n_b$ 的孤立子解(实线)和等离子体电子密度扰动 $\delta n_p$ 的腔子解(虚线)示意图

这样，通过约化微扰方法，我们找到了复杂磁流体系统(7-17)～(7-18)成对出现的孤子和腔子解，它们与数值模拟结果[192]定性一致. 我们知道，激光在等离子体中传播的成丝现象中，高频电场能量的聚集是电荷中性化受到破坏的结果，高频电场的压力排开了等离子体离子，造成了离子密度的凹陷；与此相对照，强电子束在等离子体中传播时成丝现象的出现，是电流中性化受到破坏引起电磁能量局域化的结果，电磁场的压力排开了背景等离子体电子使之出现密度凹陷.

## 7.1.3 非线性波动方程的可积性问题

从第四章哈密顿系统理论知道，如果运动常数的数目等于系统自由度的数目，这个系统是完全可积的，它的运动轨道被唯一地确定；而当运动常数的数目小于自由度的数目时，它的轨道不能被唯一地确定，哈密顿系统就不是完全可积的，它有可能出现混沌运动. 考虑波动系统的情形，由于依赖于空间变量，它的相空间有无穷多个自由度，因此需要有无穷多运动常数才能唯一地决定系统的轨道，成为一个完全可积系统. KdV 方程[方程(7-1)中 $a=0$]就属于这样的情形，已经证明，它有无穷多的运动常数[1]，因此 KdV 孤立子轨道已经被完全决定，如果两个 KdV 孤立子相互碰撞，它们分开后形状和速度与碰撞前相比没有任何改变，碰撞完全是弹性的.

从非线性波动方程找到了形式为 $\phi(x-ut)$ 的孤立波或孤立子解，并不意味着

这些解对扰动就是稳定的，例如虽然非线性漂移波方程[方程(7-1)中 $b=0$]也有与 KdV 孤立子形式相似的相干波动解，但它们并不像 KdV 孤立子那样在扰动下稳定. 有工作数值分析了形式为 $u_t+(u^n)_x+u_{xxx}-u_{txx}=0$ 的方程($n=2,3$，其中 $n=2$ 时若去掉空间三阶导数项就是一维非线性漂移波方程)，发现方程的两个孤立子解碰撞后，形状和速度都发生了变化，碰撞是非弹性的[194]. 考虑到一维非线性漂移波方程与 KdV 方程的差别仅在于色散项 $u_{txx}$，不同的色散行为一定在非弹性碰撞中起了关键作用. 孤立子解非弹性碰撞的例子还可见文[195]. 为了与 KdV 孤立子相区别，我们称这一类不稳定的孤立子解为类孤立子.

类孤立子与 KdV 孤立子行为上的差别是不是与相应非线性波方程不完全可积有关呢? 让我们首先从运动常数来分析这个问题. 为方便，将一维非线性漂移波方程单独写出如下

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+a\frac{\partial^3\phi}{\partial t\partial x^2}+c\frac{\partial\phi}{\partial x}+f\phi\frac{\partial\phi}{\partial x}=0. \tag{7-32}$$

这里 $a<0$，目前只找到它有 3 个运动积分，它们是

$$M=\frac{1}{2}\int_D\phi(x,t)\mathrm{d}x, \tag{7-33}$$

$$E=\frac{1}{2}\int_D[\phi^2(x,t)-a\phi_x^2(x,t)]\mathrm{d}x, \tag{7-34}$$

$$H=\frac{1}{2}\int_D\left[c\phi^2(x,t)+\frac{1}{3}f\phi^3(x,t)\right]\mathrm{d}x, \tag{7-35}$$

其中 $D$ 是积分的区域. 一般称 $M$ 为波的质量，$E$ 为波的能量(有人认为，如果与 KdV 的运动积分 $\frac{1}{2}\int_D\phi(x,t)^2\mathrm{d}x$ 类比，称 $E$ 为动量更合适). 上述 3 个运动常数远不足以唯一地决定系统的运动轨道，在无穷维相空间中轨道仍有相当的自由度可以取不同的走向，表现为它的类孤子解在扰动下不稳定. 鉴于漂移波方程(7-32)不像 KdV 方程那样有无穷多个运动常数，它很有可能不是完全可积的.

研究表明，微分方程是否可积，与方程的解在延拓到复平面后奇点的性质有关. 为便于讨论，这里引用 Drazin 等人书中介绍的有关微分方程奇点的一些概念[1].

让我们把一个微分方程的解延拓到复空间，讨论解的奇点性质. 如果微分方程是线性的，那么奇点在复平面上的位置与积分常数没有关系，也就是说，线性微分方程的奇点是不动的(fixed). 例如方程

$$z\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+w=0 \tag{7-36}$$

的通解为

$$w(z)=c/z, \tag{7-37}$$

这里 $c$ 是任意常数，对所有 $c\neq 0$，这个解有简单极点 $z=0$，它与积分常数 $c$ 的取值无关，因此方程(7-36)解的极点是不动的.

非线性常微分方程则不同，它们的解在复平面上可以有可动奇点(movable singularity)，即奇点的位置依赖于积分常数. 例如方程

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+w^2=0 \tag{7-38}$$

有通解

$$w(z)=\frac{1}{z-z_0}, \tag{7-39}$$

这里 $z_0$ 是任意复数，这个解有一个极点 $z=z_0$，它依赖于积分常数 $z_0$ 在复平面上的位置，因此方程(7-38)有一个可动极点.

复变函数理论告诉我们，如果一个函数是解析的，在延拓到复平面时它的所有奇点都是极点，该函数可以被展开为罗朗级数. 一般地，一个函数还可能存在临界点(critical point，包括分支点和本性奇点)，临界点不是极点，在临界点上该函数不是解析的，它不能被展开作罗朗级数. 例如方程

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=\mathrm{e}^{-w} \tag{7-40}$$

有通解

$$w(z)=\log(z-z_0), \tag{7-41}$$

这里 $z_0$ 是任意复常数，这个解不是一个解析函数，它有一个可动的对数分支点 $z=z_0$.

对一个常微分方程来说，如果它所有的可动奇点都是极点，即不存在临界点，那么就说这个常微分方程具有潘勒韦(Painlevé)性质. 根据对许多常微分方程性质的研究，发现具有 Painlevé 性质的常微分方程都是完全可积的.

后来关于 Painlevé 性质的讨论被推广到偏微分方程[196~198]，通过分析 KdV 方程这个完全可积系统，发现它可以被约化到具有 Painlevé 性质的一个常微分方程. 综合类似的一些研究，人们猜想，如果一个偏微分方程具有 Painlevé 性质，即它的所有可动奇点都是极点，那么这个偏微分方程也是完全可积的，尽管这一点并没有被严格证明.

检验 Painlevé 性质的方法最先也是针对常微分方程提出来的：将方程的解看做是时间变量的解析函数，在延拓到复空间后进行形式上的罗朗展开，代入原方程，比较各级展开系数求得一系列递推关系，如果所有的递推关系都相容，表明这个罗朗展开是成功的，方程所有的可动奇点都是简单极点，因此方程具有 Painlevé 性质，它应该是可积的；如果递推关系出现了不相容，说明罗朗展开不成功，该函数的奇点不都是极点，相应的方程不具有 Painlevé 性质，它可能不是完全可积的. 这

个判断方法被称为 Painlevé 判据.

后来，Painlevé 判据被推广应用于偏微分方程系统[199]，这时同样需要将方程的解延拓到复平面，但与常微分系统中单变量的情形不同，在偏微分系统中函数的极点一般不再是孤立的，以两变量情形为例，如果函数 $f(x,t)$ 是复变量 $(x,t)$ 的亚纯(meromorphic)函数，它的奇异性将沿着由条件

$$\psi(x,t) = 0 \tag{7-42}$$

决定的某个流形发生. 因此，可将偏微分方程的解 $\phi(x,t)$ 延拓到复空间，并在形式上展开成奇异流形 $\psi$ 的罗朗级数

$$\phi(x,t) = \psi^{\alpha}\sum_{j=0}^{\infty}u_j\psi^j, \tag{7-43}$$

这里 $\alpha>0$，并且 $\psi(x,t)$ 和 $u_j(x,t)$ 是在流形 $\psi=0$ 邻域中的解析函数.

将展开式(7-43)的主导项($j=0$ 的项)代入所要讨论的偏微分方程，比较最奇异的项，可以求出 $\alpha$ 的值以及主导项系数 $u_0$ 作为 $\psi$(及其导数)的函数表达式；将结果代入，再比较次主导项的指数以寻找奇异性可能在 $j$ 的哪一级上出现；然后按照 $\psi$ 的幂次逐级求出展开系数 $\{u_j\}$ 的递推关系

$$F_j(u_j, u_{j-1}, u_{j-1,t}, u_{j-1,x}, \cdots, u_0, \cdots, \psi_t, \psi_x, \psi_{xt}, \cdots) = 0, \tag{7-44}$$

这里 $j=1,2,\cdots$，如果所有的递推关系都相容，表明方程的解 $\phi(x,t)$ 可以展开成罗朗级数(7-43)，相应的偏微分方程就具有 Painlevé 性质，它是可积的；如果递推关系在某一级上出现了不相容，解就不能展开成罗朗级数，相应的方程就不具有 Painlevé 性质，它可能不是完全可积的. 采用这个方法已经证明，许多著名的非线性波动方程，如伯格斯(Burgers')方程、KdV 方程以及修正 KdV 方程都满足 Painlevé 判据，将它们的复空间解在形式上展开成罗朗级数时，所得到的递推关系分别完全相容，这说明解的可动奇点都是简单极点，这些结果与相应方程的完全可积性质一致[199].

让我们用 Painlevé 判据来检验非线性漂移波方程(7-32)是否可积，按照上面同样的步骤，将方程在复空间 $(x,t)$ 的解 $\phi(x,t)$ 在形式上展开成罗朗级数式(7-43)以后，可以求得 $\alpha=2$ 和主导项系数 $u_0=-(12a/f)\psi_x\psi_t$，并在次主导项下找到奇异性可能出现在 $j=-1,4,6$ 上；然而，在检查递推关系的相容性时发现，在 $j=4$ 一级上得到的递推关系与前面的递推关系不相容，这说明并不存在一组恰当的系数 $\{u_j\}$ 使得非线性漂移波方程(7-32)在复空间的解能够展开为罗朗级数，因此它的可动奇点不都是简单极点，方程(7-32)不具有 Painlevé 性质，应该不是完全可积的[200]. 也许这就是为什么漂移波类孤子解虽然表面上酷似 KdV 孤子，两个这样的类孤子碰撞却表现出非弹性性质的原因.

由上面的讨论我们知道，非线性微分方程解的轨道是完全有规还是可以无序变化，这些表观行为上的差异可能是深藏于解内部的可动奇点性质不同所致. 对于

常微分系统来说,所谓可动奇点真正是复空间中依赖于积分常数的一个几何点,而对偏微分系统来说,奇异性却沿着流形发生,它更像与某种波动解有关.事实上,湍流现象与奇异性是否有关系一直是讨论湍流时的一个话题[3],Painlevé 判据是否提示,如果湍流现象确与奇异性有关,它应该表现为某种流形或波动解的奇异性呢?

## §7.2 耗散系统

实际系统都是有耗散的,在有边界的问题中,系统的能量可以因摩擦等原因通过边界流失,即使不考虑边界效应,波的集体运动能量也可因碰撞等过程转变为粒子无规运动的热能,对波动系统而言,这些能量就损失掉了.粒子碰撞的平均自由程远小于宏观波动的空间尺度,所以,波动能量通常是在小尺度上被耗散的.在第五章中曾经介绍了描写黏滞流体湍流的 Navier-Stokes 方程(5-50),现重新写出如下

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\,\boldsymbol{v}=-\nabla\,p+\mu\nabla^2\boldsymbol{v}, \tag{7-45}$$

如果单独考虑黏滞项 $\mu\nabla^2\boldsymbol{v}$ 的作用,可知波数为 $k$ 的模式将以指数 $e^{-\mu k^2 t}$ 的形式衰减,这正反映了能量在高 $k$ 或短波长时更容易被耗散这一事实.

耗散是影响流体运动状态的一个重要因素,如在黏滞率为 $\mu$ 水平速度为 $v$ 的流体中放置一个半径为 $L$ 的光滑小球,在极低雷诺数 $Re\equiv vL/\mu$ 时,流场是定常的,随 $Re$ 增加,出现了周期和涡旋等运动状态,在雷诺数很高时运动变为湍流.因此,在其他条件一定时,耗散的大小可以决定系统处于层流还是湍流状态.

### 7.2.1 驱动-耗散的非线性波

**1. 在时间周期驱动下的 Sine-Gordon 方程**

1983 年,Bishop 等人建立了一个有周期驱动和耗散的 sine-Gordon 方程,并以此作为研究时空混沌的模型[158].

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\sin\phi=\Gamma\sin(\omega_d t)-\varepsilon\frac{\partial\phi}{\partial t}, \tag{7-46}$$

方程右边第一项是时间的周期力,它是非线性时序系统模型常用的驱动力形式,另一项引起能量从系统中流失.若将上式中 $\phi(x,t)$ 展开作空间傅里叶模式 $k$ 之和,容易看到,驱动项 $\Gamma\sin(\omega_d t)$ 的作用是将能量直接提交给模式 $k=0$,譬如一个带电粒子系统受到这样的静电力驱动,全空间的粒子将以频率 $\omega_d$ 同步抖动;方程(7-46)中 $\sin\phi$ 一项包含了非线性,模式 $k=0$ 的能量可以通过它转移到 $k\neq0$ 的有限尺度上去.

在很多情况下,驱动力不仅随时间而且沿空间也呈周期性变化,如前面提到的潮汐力,它是月球绕地运动引起的,对海洋来说,这个力随时间和空间都是周期变

化的，是一种类似于波的驱动，在带电粒子系统中，波场作为驱动力的情形更是非常普遍，例如电离层中总有许多外输入电波传播，托卡马克也常用电磁波加热等离子体. 在讨论空间延展系统的非线性动力学时，考虑波作为外驱动比仅随时间变化的外驱动有更普遍和实际的意义. 作为最简单的模型，讨论周期为 $2\pi$ 的空间一维系统，可采用简谐波 $\sin(\kappa x-\omega t)$作为驱动力，这相当于在波数 $k=\kappa$ 处将外驱动的能量输入系统，尺度为 $2\pi/\kappa$ 的模式直接获得能量，通过非线性系统的模-模耦合过程再将它的能量转移到其他 $k\neq\kappa$ 模式上. 当 $\kappa=0$ 时，这一项就蜕化为仅随时间周期变化的驱动力，如方程(7-46)中所采用的那样.

**2. 在时空周期驱动下的非线性漂移波方程**

让我们以非线性漂移波方程(7-32)为基础建立一个讨论非线性波的动力学的模型，加上简谐波的驱动以及适当的耗散项以后，方程(7-32)变为

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+a\frac{\partial^3\phi}{\partial t\partial x^2}+c\frac{\partial\phi}{\partial x}+f\phi\frac{\partial\phi}{\partial x}=-\gamma\phi-\varepsilon\sin(x-\Omega t),\tag{7-47}$$

其中 $a(a<0)$，$c$，$f$ 为常数，$\gamma$ 为耗散参数，$\Omega$ 和 $\varepsilon$ 分别为驱动波的相速度和幅度，这里假设周期边界条件 $\phi(x+2\pi,t)=\phi(x,t)$，已取驱动波数 $\kappa=1$. 若将驱动项写做更一般的形式 $\sin(\kappa x-\Omega t)$，其中 $\kappa$ 总可通过对空间变量作标度变换去掉.

之所以采用一维非线性漂移波方程或称 BBM 方程(7-32)作为模型(7-47)的基础，是因为：首先这个方程在中性流体和等离子体中都有明确的物理意义，它比 KdV 方程更合理，特别是在等离子体漂移波情况下，方程(7-32)能够从流体力学方程组和麦克斯韦方程组在一定近似下导出，这些在第三章中已经讨论过；其次方程中含系数 $c$，$a$，$f$ 的项分别描写波的漂移、线性色散和非线性效应，它们都是波动系统中最重要的物理过程；还有，在节 7.1.3 中我们曾说明，方程(7-32)在形式上与 KdV 方程极为相似，却很可能不完全可积，在奇点性质和对扰动的响应方面与后者对比十分鲜明，轨道有更多的自由度演化. 这样一个方程在驱动和耗散的共同作用下有怎样的响应，自然是十分有兴趣的问题，而且方程(7-47)简单的一维形式也便于细致分析其动力学行为.

让我们把未加驱动和耗散的系统(7-47)看做是一个非线性介质，固定介质参数 $a$，$c$，$f$ 以及耗散参数 $\gamma$ 不变(后面的讨论中取 $a=-0.28711$，$c=1.0$，$f=-6.0$，这里 $a<0$ 是物理上要求的，多位有效数字不是必须的，只是沿用了调程序时的参数)，将驱动波的相速度 $\Omega$ 和幅度 $\varepsilon$ 作为控制参数，讨论在改变 $\Omega$，$\varepsilon$ 时非线性介质对驱动的响应.

### 7.2.2 定态波解及其在参数空间中的组织

与保守的非线性波动方程类似，许多有驱动和耗散的非线性波动方程也存在空间相干的定态波解，在完全没有扰动的理想情形下，这些解像孤立波那样以光滑

不变的波形和一定的速度传播，在受到扰动时它们有的是稳定的，有的是不稳定的. 让我们以方程(7-47)为模型观察这类相干波动解随参数变化有怎样的规律，暂时回避它们的稳定性问题.

方程(7-47)的定态波解有 $\phi_0(x-\Omega t)$ 的形式，为了找到方程的定态波解，包括稳定的和不稳定的，可将系统变换到随波运动坐标系[201]

$$\xi = x - \Omega t,$$
$$\tau = t, \tag{7-48}$$

在这个坐标系中，定态波解 $\phi_0(\xi)$ 满足下面的方程

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial \tau} = 0. \tag{7-49}$$

或

$$(c-\Omega)\frac{\mathrm{d}\phi_0}{\mathrm{d}\xi} - a\Omega\frac{\mathrm{d}^3\phi_0}{\mathrm{d}\xi^3} + f\phi_0\frac{\mathrm{d}\phi_0}{\mathrm{d}\xi} + \gamma\phi_0 + \varepsilon\sin\xi = 0. \tag{7-50}$$

展开

$$\phi_0(\xi) = \sum_{k=1} A_k\cos(k\xi + \theta_k). \tag{7-51}$$

代入上式，得到 $\phi_0(\xi)$ 的模式振幅和相位 $\{A_k, \theta_k\}$ 服从的方程为

$$\begin{aligned}
&-k[c-(1-ak^2)\Omega]A_k\sin\theta_k + \gamma A_k\cos\theta_k \\
&\quad -\frac{kf}{4}\Big[\sum_{i+j=k}A_iA_j\sin(\theta_i+\theta_j) + \sum_{i-j=k}A_iA_j\sin(\theta_i-\theta_j) \\
&\quad + \sum_{i+j=k}A_iA_j\sin(-\theta_i+\theta_j)\Big] = 0,
\end{aligned} \tag{7-52a}$$

$$\begin{aligned}
&-k[c-(1-ak^2)\Omega]A_k\cos\theta_k - \gamma A_k\sin\theta_k + \varepsilon\delta_{1,k} \\
&\quad -\frac{kf}{4}\Big[\sum_{i+j=k}A_iA_j\cos(\theta_i+\theta_j) + \sum_{i-j=k}A_iA_j\cos(\theta_i-\theta_j) \\
&\quad + \sum_{i-j=k}A_iA_j\cos(-\theta_i+\theta_j)\Big] = 0,
\end{aligned} \tag{7-52b}$$

$$(k = 1,2,\cdots,N;\ N\to\infty)$$

这是无穷维的一组耦合非线性代数方程，只要作恰当的有限 $N$ 截断，原则上可以在给定猜值下迭代求解. 选择合适的参数区，在那里解的定性性质主要由少数长波模式决定，那么不需要太大的 $N$(如十几到几十个模式)就不至于丢掉关键的动力学信息. 在控制参数$(\Omega,\varepsilon)$给定时，定态波的模式振幅和位相 $\{A_k, \theta_k\}$ 可以有不止一组解，为寻找每一组解，都需要足够好的猜值，这对于高维相空间问题一般并不容易，好在那些稳定的定态波解可以从数值模拟方程(7-47)得到，其结果有助于寻找不稳定的定态波解.

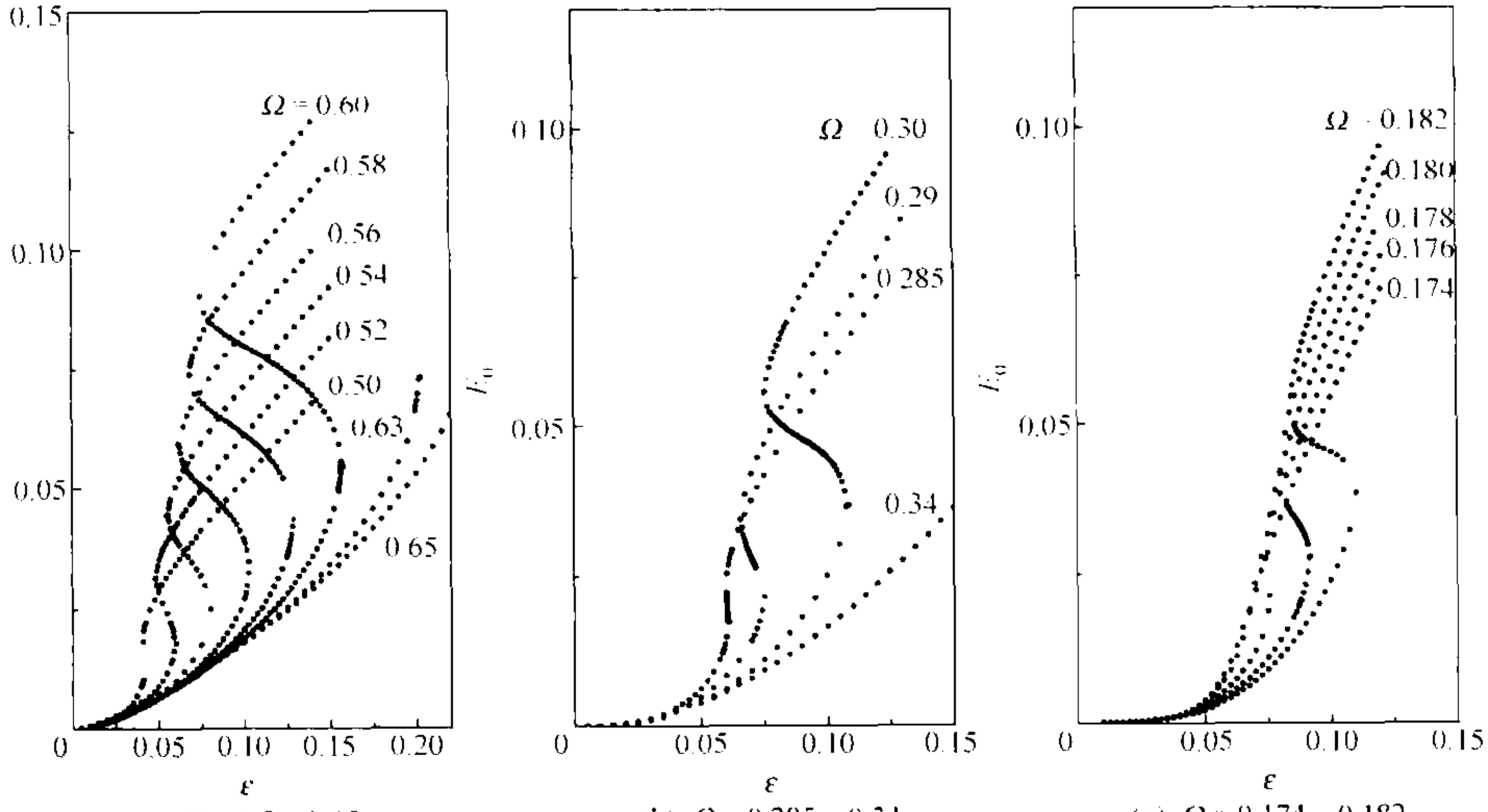
定义空间 $2\pi$ 周期中的波动能量为

$$E(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}[\phi^2(x,t) - a\phi_x^2(x,t)]\mathrm{d}x, \tag{7-53}$$

在无驱动耗散时它是系统的运动常数，在有驱动和耗散的情况下，一般 $E(t)$ 随时间变化，但对形为 $\phi_0(x-\Omega t)$ 的定态波解，$E_0 \equiv E(\phi_0)$ 为时间的常数.

给定参数 $(\Omega,\varepsilon)$，求解方程(7-52)，可计算出每一组参数下的定态波解 $\phi_0(\xi)$（注意可能不止一个解）和相应的能量 $E_0$. 在数值计算中发现的一个非常有趣的现象是，定态波解 $\phi_0(\xi)$，包括稳定的和不稳定的，它们的能量在参数空间 $(\Omega,\varepsilon)$ 中是高度有组织的[202,203]！对于给定驱动相速度 $\Omega$ 值，$E_0$ 随 $\varepsilon$ 光滑地变化，特别有意思的是，在 $\Omega$ 的一些参数区中，$E_0$ 作为 $\varepsilon$ 的函数形成 S 形的滞后(hysteresis)曲线. 已经找到了几个这样的参数区，在每个参数区中都有一簇 $E_0(\varepsilon)$ 滞后曲线.

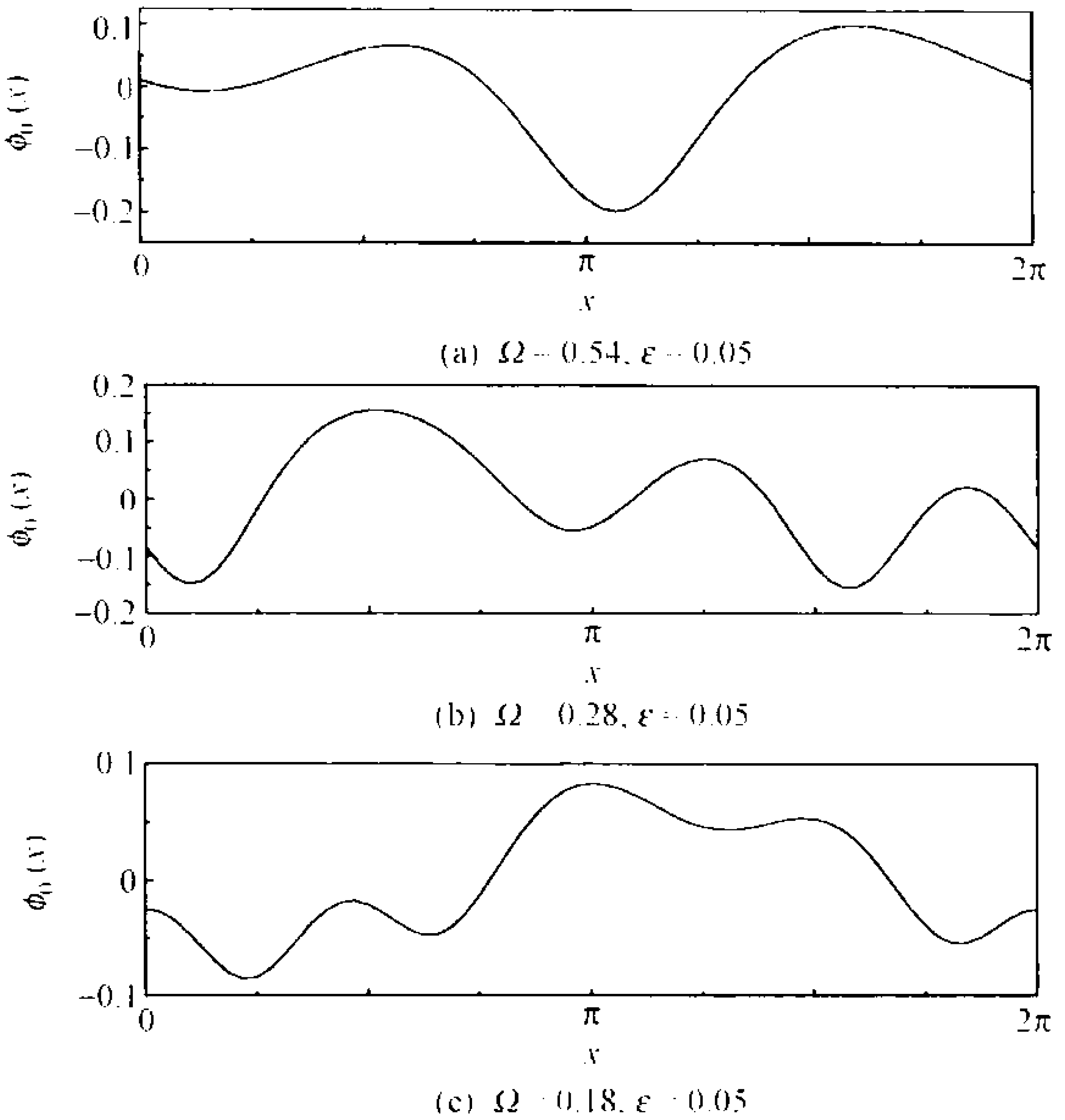
图 7-7(a)～(c)分别给出 $E_0$ 作为 $\varepsilon$ 的函数的三簇 S 形滞后曲线，每一条曲线对应一个 $\Omega$ 值，由下分支、中间分支和上分支组成. 这三簇滞后曲线分别位于 $\Omega$ 不同的参数区，其中(a)对应的 $\Omega$ 值最大，占据的 $\Omega$ 区间也最宽，在更大的 $\Omega$ 值处没有找到任何滞后曲线，但随 $\Omega$ 减小却找到了一些滞后曲线簇，图中(b)和(c)是随 $\Omega$ 减小依次找到的另两簇滞后曲线，它们占据的 $\Omega$ 区间依次变窄.




(a) $\Omega=0.5\sim0.65$　(b) $\Omega=0.285\sim0.34$　(c) $\Omega=0.174\sim0.182$

图 7-7　在 $\Omega$ 的 3 个参数区中系统(7-47)的(稳定和不稳定的)定态波能量组成的滞后曲线 $E_0(\varepsilon)$ 簇(每一条滞后曲线对应 $\Omega$ 的一个取值)

定态波解 $\phi_0(x-\Omega t)$ 的波形和相图沿滞后曲线非常有规律地变化. 波形图 7-8 和相图 7-9 中参数分别为(a) $\Omega=0.54$，$\varepsilon=0.05$，(b) $\Omega=0.28$，$\varepsilon=0.05$，(c) $\Omega=0.18$，$\varepsilon=0.05$，图中所示的定态波解 $\phi_0(x-\Omega t)$ 分别位于图 7-7(a)～(c)中相应 S 形滞后曲线的下分支.

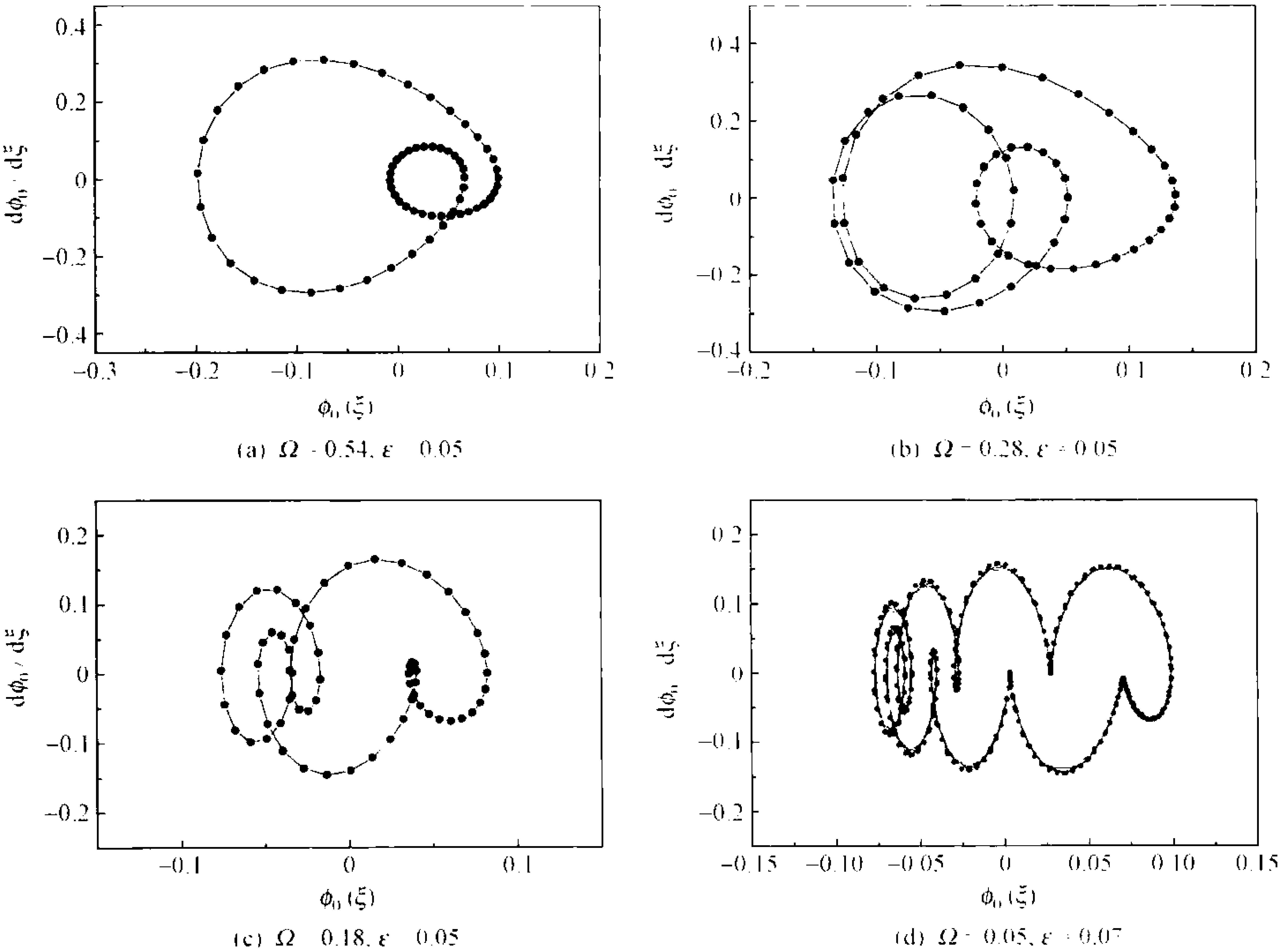



(a) $\Omega = 0.54,\ \varepsilon = 0.05$

(b) $\Omega = 0.28,\ \varepsilon = 0.05$

(c) $\Omega = 0.18,\ \varepsilon = 0.05$

图 7-8 系统(7-47)位于不同滞后曲线簇的下分支上的几个定态波解 $\phi(x)$ 的波形




(a) $\Omega = 0.54,\ \varepsilon = 0.05$

(b) $\Omega = 0.28,\ \varepsilon = 0.05$

(c) $\Omega = 0.18,\ \varepsilon = 0.05$

(d) $\Omega = 0.05,\ \varepsilon = 0.07$

图 7-9 系统(7-47)位于不同滞后曲线簇的下分支上的几个稳定定态波解 $\phi_0(\xi)$ 的相图

由图 7-8 和 7-9 可见,(a)中波形 $\phi_0(x)$有 2 个驼峰,相轨道绕 2 周,(b)中有 3 个驼峰,相轨道绕 3 周,(c)中有 4 个驼峰,相轨道绕 4 周. 这样,从(a)到(c),随 $\Omega$ 减小,每移动一簇滞后曲线,在下分支上的波形增加一个驼峰,相轨道增加一周. 随着 $\Omega$ 继续减少,找到的驼峰数和相轨道的绕数越来越多,图 7-9(d)显示了 $\Omega$ 值很小的一个结果($\Omega=0.05$,$\varepsilon=0.07$),可以看到相轨道绕了许多周,由此可知对应的波形有许多驼峰. 从这些现象再结合后面的线性色散分析可以推测,随着 $\Omega$ 从图 7-7(a)中的值开始减小,新的滞后曲线簇不断出现,它们占据的 $\Omega$ 参数区越来越窄,每出现一簇滞后曲线,相应曲线的下分支上波形就增加一个驼峰,相轨道增加一周,预料到 $\Omega\to 0$ 时波形将有无穷多个驼峰,相图上轨道绕无穷多周. 在非线性时序系统中相轨道周数在参数空间中逐一增加的现象被称为绕数分岔(winding number bifurcation).

事实上,绕数分岔不仅发生在从一簇滞后曲线的下分支改变到另一簇滞后曲线的下分支时,对同一簇 S 形滞后曲线,从下分支到上分支,也发生了绕数分岔. 例如对应图 7-7(a)中的滞后曲线,在下分支上相轨道有 2 周,到上分支发展成 3 周,(b)中的则从下分支的 3 周发展到上分支的 4 周,如此等等. 与绕数分岔对应,$\phi_0(x)$的波数谱中分波谱线也相应地增强,例如相轨道从 2 周变成 3 周时,$k=3$ 的谱线显著增高. 图 7-10 是 $\Omega=0.56$,$\varepsilon=0.08$ 时稳定定态波 $\phi_0(x-\Omega t)$的波数谱,(a),(b)分别位于 S 形滞后曲线的下分支和上分支,在这组参数下,下分支(a)中定态波的 $k=2$ 谱线甚至超过了 $k=1$ 谱线的高度,上分支(b)中 $k=3$ 谱线也超过了 $k=2$ 的高度,这样的现象用微扰论是难以解释的.

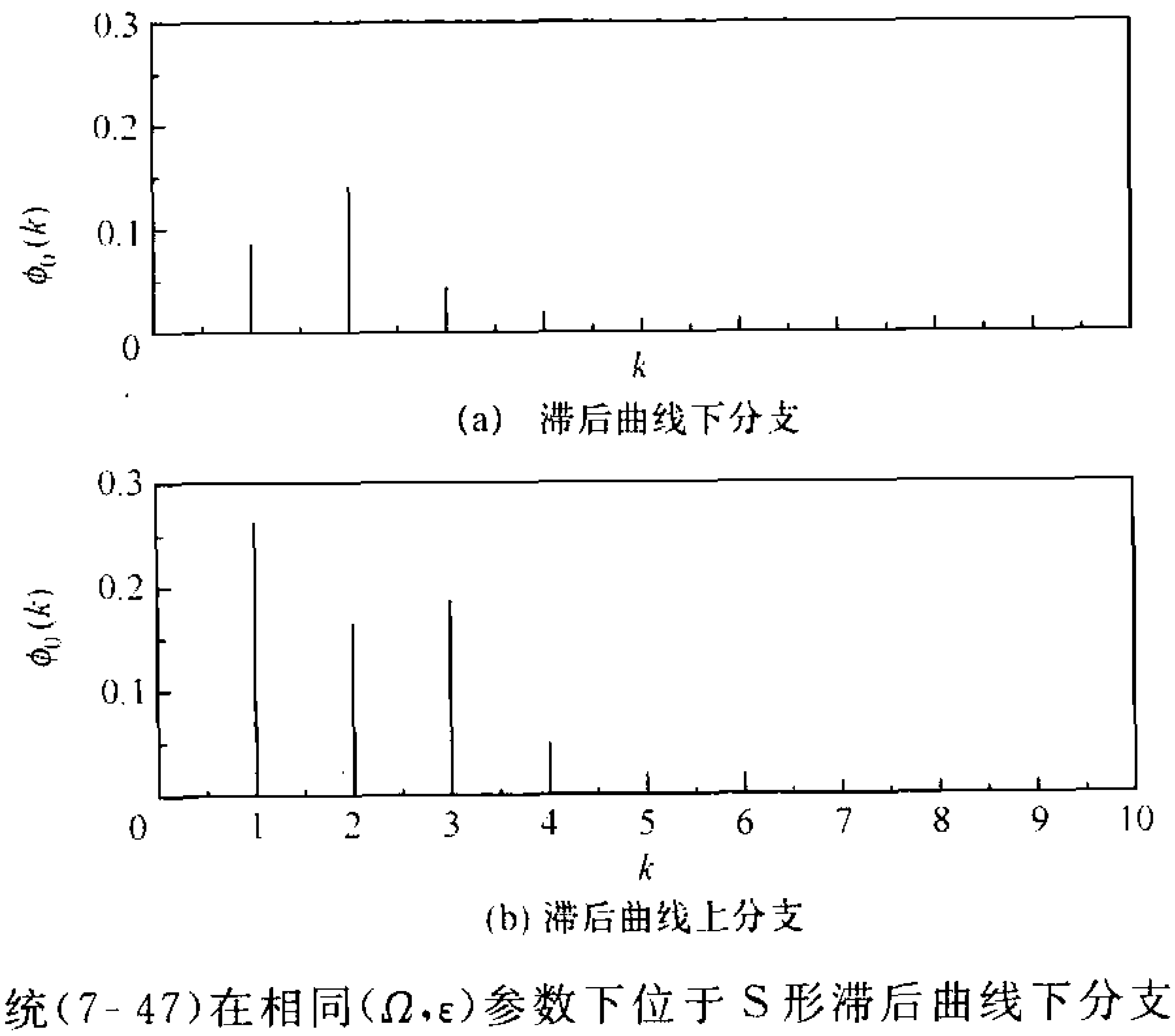



图 7-10　系统(7-47)在相同($\Omega$,$\varepsilon$)参数下位于 S 形滞后曲线下分支和上分支的稳定定态波解 $\phi_0(x)$的波数谱 $\phi_0(k)$

($\Omega=0.56$,$\varepsilon=0.08$)

有迹象表明，定态波能的滞后曲线还不止图 7-7 上看到的两级台阶，随着驱动强度 ε 的增加，有可能存在更多的甚至无穷个滞后台阶. 这一猜测可以从驱动-耗散 KdV 模型的结果得到支持[204]，方程为

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+a\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3}+f\phi\frac{\partial\phi}{\partial x}=-\gamma\phi-\varepsilon F(x-ut), \tag{7-54}$$

周期驱动 $F(x-ut)$ 可采用正弦波或相干波包，后者本身就包含了大量模式，如取作孤立波解 $\mathrm{sn}^2(\kappa,x-ut)$ 的形式，但去掉了其中的非零常数部分. 将驱动函数写做

$$F(x)=\sum_{n=1}^{N}A_n\cos(n\beta x), \tag{7-55}$$

驱动周期 $L=2\pi/\beta(\kappa)$ 依赖于椭圆函数 $\mathrm{sn}(x|\kappa)$ 的宗量 $\kappa$，在 $\kappa\to0$ 时，$\mathrm{sn}(x)\to\sin(x)$，随 $\kappa$ 增加 $\mathrm{sn}(x)$ 包含越来越多谐波分量，在 $\kappa\to1$ 时 $\mathrm{sn}(x)\to\mathrm{sech}(x)$，此时驱动力就像一个孤立子，方程(7-54)就像是描写非线性介质对入射粒子的响应.

在随波坐标系 $\xi=x-ut$ 中系统(7-54)的定态波模式也满足一组耦合非线性代数方程，类似于方程(7-52)，由此可求出系统的定态波解. 取定 $u$ 值，得到定态波能量 $E_0$ 作为驱动强度 ε 的函数，在图 7-11 上它是一条多级台阶的滞后曲线，每两级台阶都由一条负斜率分支连接. 像图中这样的滞后曲线也可以找到一簇，每一条都对应不同的 $u$ 值，为清晰起见，这里只画出了一条. 注意图 7-11 是对数坐标，ε 越大，两个台阶之间的跨度就越宽.

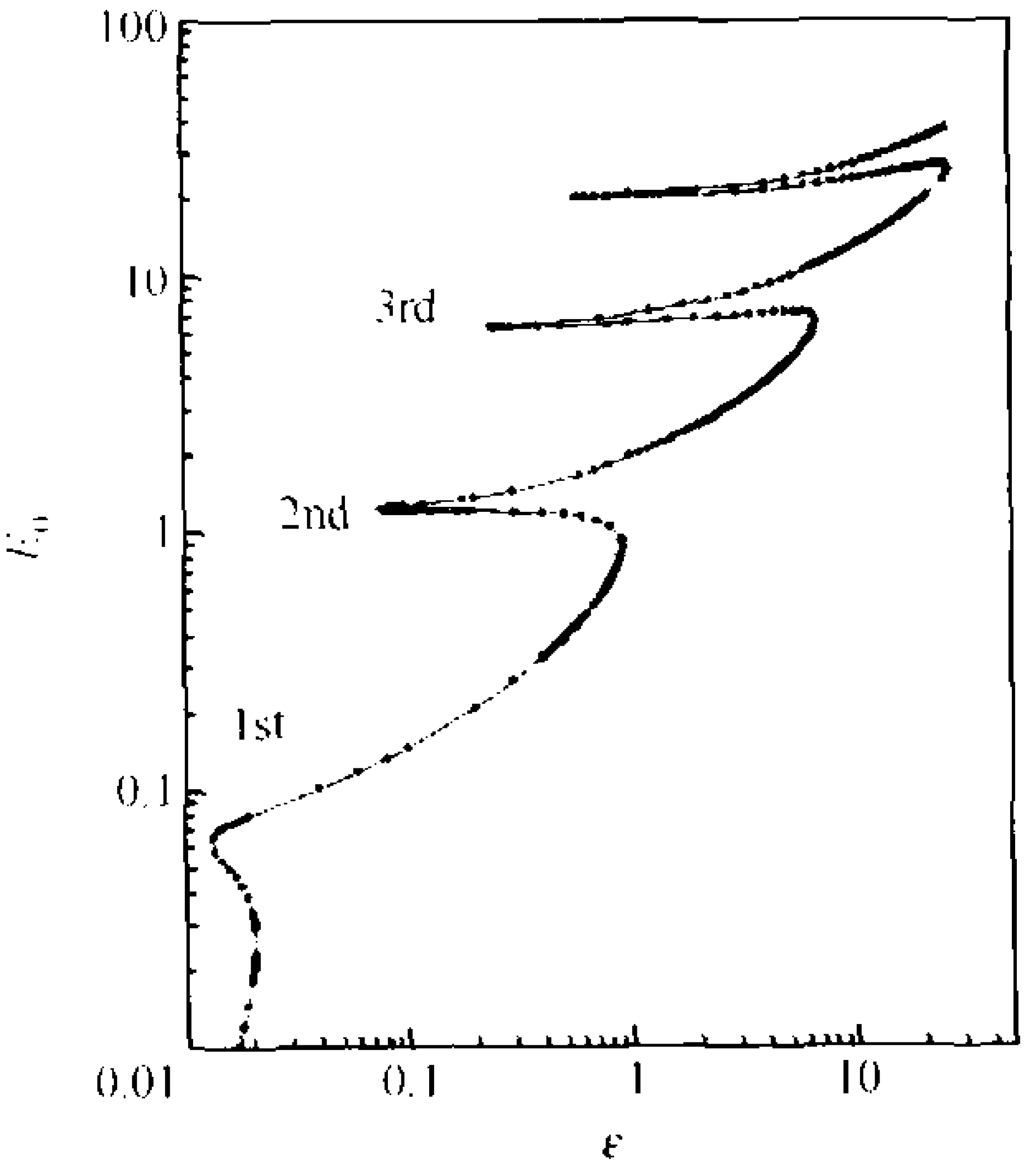



图 7-11 驱动-耗散 KdV 方程(7-54)在给定 $u$ 时定态波解的能量 $E_0$ 作为 ε 的函数
($a=-1.0, f=-6.0, \gamma=0.1, u=0.1$)

图 7-12 是系统(7-54)的稳定定态波解，左边是波形 $\phi_0(\xi)$，右边是 $\mathrm{d}\phi_0/\mathrm{d}\xi$ 作为 $\phi_0(\xi)$ 函数的相图，(a)～(c)中参数分别为 ε＝0.7,6.0,21.0，对应图 7-11 中滞后曲线第 1,2,3 台阶上的 3 个解，由图可见 $\phi_0(\xi)$ 各有 2,3,4 个驼峰，相轨道绕 2,3,4

周.不言而喻,对应(a)～(c)中定态波解的谱函数将分别有较高的特征谱线 $k=2$, 3,4.显然,在图 7-11 中每上一级台阶,相应波形 $\phi_0(\xi)$就多出一个驼峰,相轨道多发展出一周,这样,随着驱动强度 $\varepsilon$ 的增加,定态波解也出现了绕数分岔.

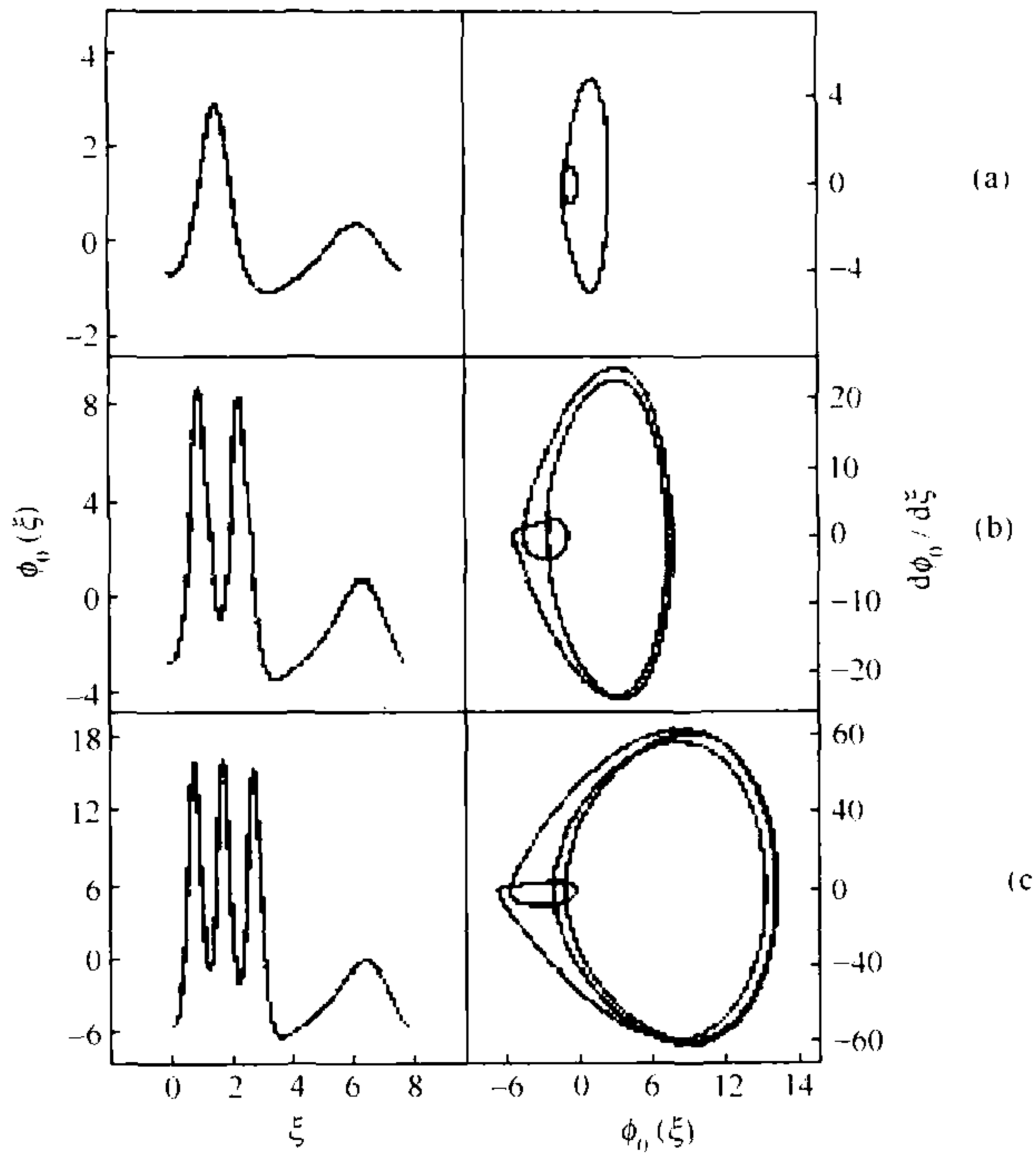



图 7-12　系统(7-54)稳定定态波解 $\phi_0(\xi)$(左)和它的相图(右)

(a) $u=0.1$, $\varepsilon=0.7$; (b) $u=0.1$, $\varepsilon=6.0$; (c) $u=0.1$, $\varepsilon=21.0$

### 7.2.3　求解非线性波动方程的赝谱方法

像方程(7-47)和(7-54)那样的非线性波方程可以通过数值模拟求解,需要注意的是,因为计算机舍人误差不可避免,不稳定的定态波解在误差扰动下将失稳到其他形态的波斑图,它本身不能在模拟中实现,因此在数值模拟中得到的波动解对应的是物理上可实现的波动状态.

对于周期边界问题,用赝谱方法(pseudo-spectral method)[205]模拟非线性波动方程(7-47)是方便的,该方法自动保证了边界的周期性.为此,将 $\phi(x,t)$作傅里叶展开(2π 周期边界)

$$\phi(x,t)=\sum_{k=-K}^{K}A_k(t)e^{ikx},\tag{7-56}$$

这里,复振幅 $A_k$ 满足 $A_k^*=A_{-k}$,取空间格点数为 $N=2^m$($m$ 是正整数),它与傅里叶空间的模式数 $K$ 满足关系 $N=2K$.为模拟求解方程(7-47),将展开式(7-56)代

入其中，两边对 $x$ 在 $2\pi$ 周期上积分，利用

$$\int_0^{2\pi} e^{i(k-k')x} dx = 2\pi\delta(k-k'), \tag{7-57}$$

得到模式 $k$ 的复振幅 $A_k(t)$ 满足的方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}(1-ak^2)A_k + ickA_k + \frac{ifk}{2}\sum_{p+q=k} A_p A_q + \gamma A_k$$
$$-\frac{\varepsilon}{2}\sin(\Omega t)\delta(k-1) - \frac{i\varepsilon}{2}\cos(\Omega t)\delta(k-1) = 0,$$
$$(k = 1,2,\cdots,N) \tag{7-58}$$

这里

$$\begin{cases} \delta(x) = 1, x = 0, \\ \delta(x) = 0, x \neq 0. \end{cases}$$

方程(7-58)是一组无穷维非线性常微分方程，卷积求和项 $\sum_{p+q=k} A_p A_q$ 的出现表明，只要满足共振条件 $p+q=k$，模式 $p$，$q$ 将通过模-模耦合对模式 $k$ 的运动产生影响.

赝谱方法与谱方法不同之处在于对卷积项的处理，一般地将卷积项写做

$$w(\underline{k}) = \sum_{\underline{p}+\underline{q}=\underline{k}} u_{\underline{p}} v_{\underline{q}}, \tag{7-59}$$

谱方法需在 $\| \underline{p} \|$，$\| \underline{q} \| < K$ 范围内对所有满足 $\underline{p}+\underline{q}=\underline{k}$ 关系的模式直接作卷积求和，耗费机时；赝谱方法则在每一个时间步长上将谱空间变量 $u(k)$，$v(k)$ 作傅里叶反变换到物理空间，得到第 $j$ 个格点上的值 $U_j$，$V_j$ 后，在物理空间中作局域积

$$W_j = U_j V_j, \quad (j = 1,2,\cdots,N), \tag{7-60}$$

然后再将 $W_j$ 变换回谱空间.

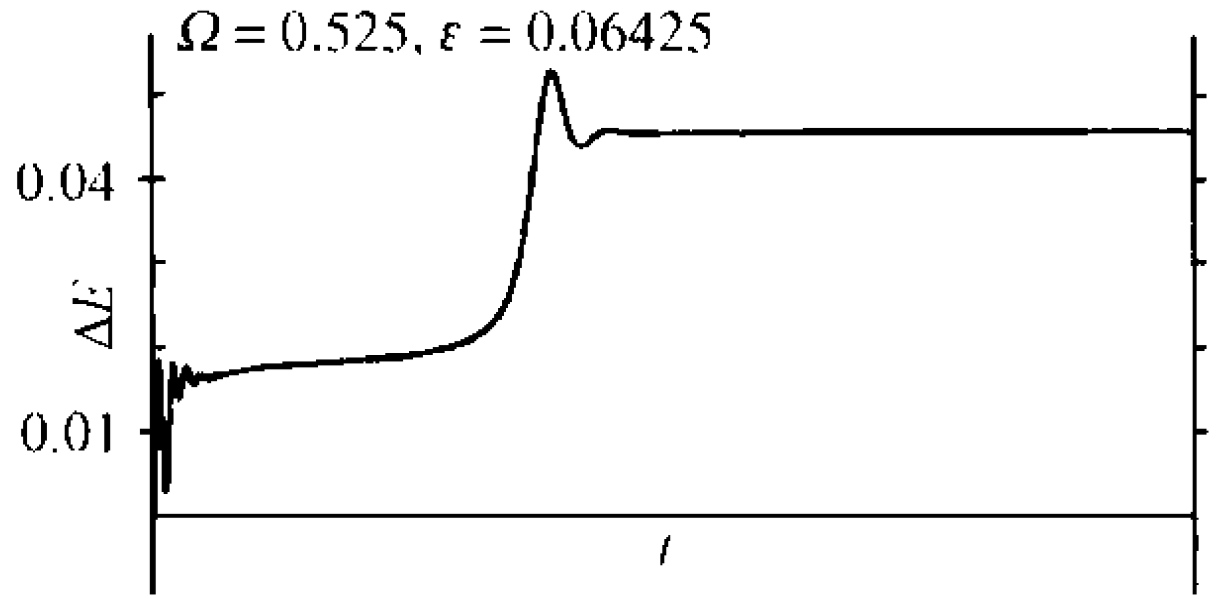
可以证明，将 $W_j$ 变换回谱空间得到的是 $w(k)+w(k+K)+w(k-K)$，显然，除所需的卷积项 $w(k)$ 之外还多出了两项，$w(k+K)$ 和 $w(k-K)$，它们是有限模式数 $K$ 引起的伪相干项，即所谓的混淆(aliasing)项. 为消除伪相干可采用去伪相干(dealiasing)技术，方法是将谱空间向短波方向适当展宽，并在 $|k| \geqslant K$ 处将 $u(k)$，$v(k)$ 置 0. 通常采用的简单作法是将谱空间 $K=N/2$ 中占模式总数 1/3 的短波部分置 0，就可以避免伪相干项，得到所需的卷积项 $w(k)$，代价是减少了计算中有效模式的数目.

### 7.2.4 空间相干波动解和湍流解

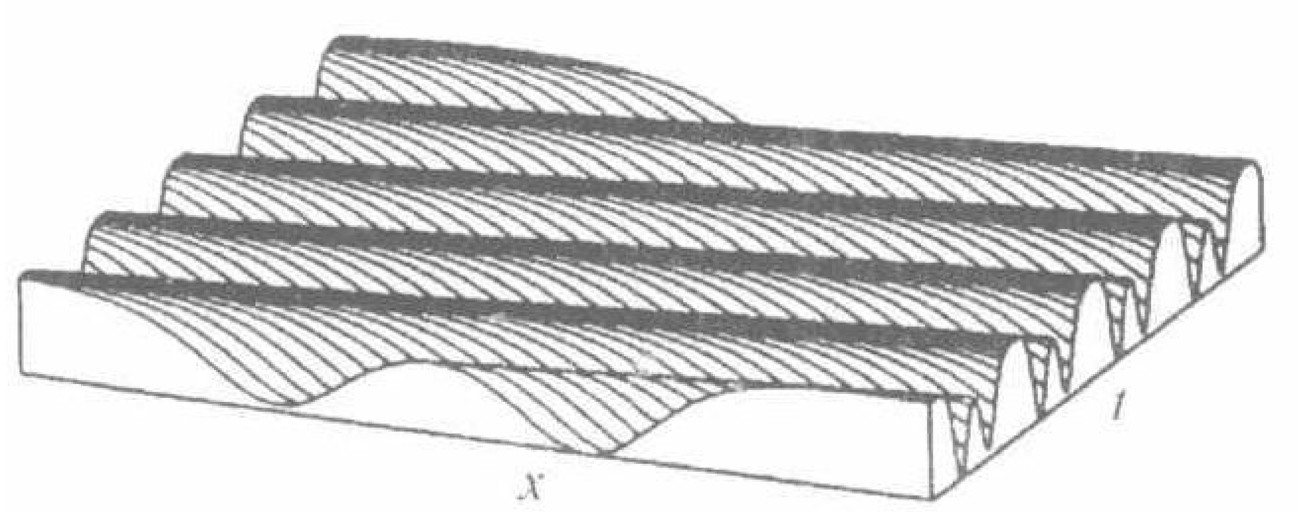
在节 7.2.2 中我们求解了系统(7-47)的定态波方程(7-50)，本小节将采用赝谱方法模拟方程(7-47)，求解 $\phi(x,t)$ 随时间和空间的演化. 因为系统(7-47)有驱动和耗散，在数值模拟时，对于给定参数($\Omega$，$\varepsilon$)，从某个初始状态 $\phi(x,t=0)$ 出发，运动将经历或长或短的暂态才能到达渐近态. 模拟得到的渐近波斑图 $\phi(x,t\to\infty)$ 花

样繁多[203]，在参数空间中观察这些波斑图有如坠入烟海，眼花缭乱. 幸运的是，借助波能 $E(t)$这个参量，我们可以多少理出些头绪，$E(t)$将场量在整个空间周期积分，提炼出运动的时间演化信息，使问题大为明朗.

有一类解的波动能量 $E(t)$经过了一段暂态，最终趋向了常数值，如图 7-13(a)所示[本图和图 7-14，16 和 17 中的纵坐标 $\Delta E(t) \equiv E(t) - E(0)$，这里 $E(0) = 7.333\times10^{-4}$是计算中所取初始波形的能量]，图 7-13(b)是相应的渐近波斑图，它是一个稳定的定态波 $\phi_0(x-\Omega t)$，与在同样参数下从定态波模式方程(7-52)得到的解完全相同，其能量落在相应的滞后曲线上.




(a) 波能随时间的演化



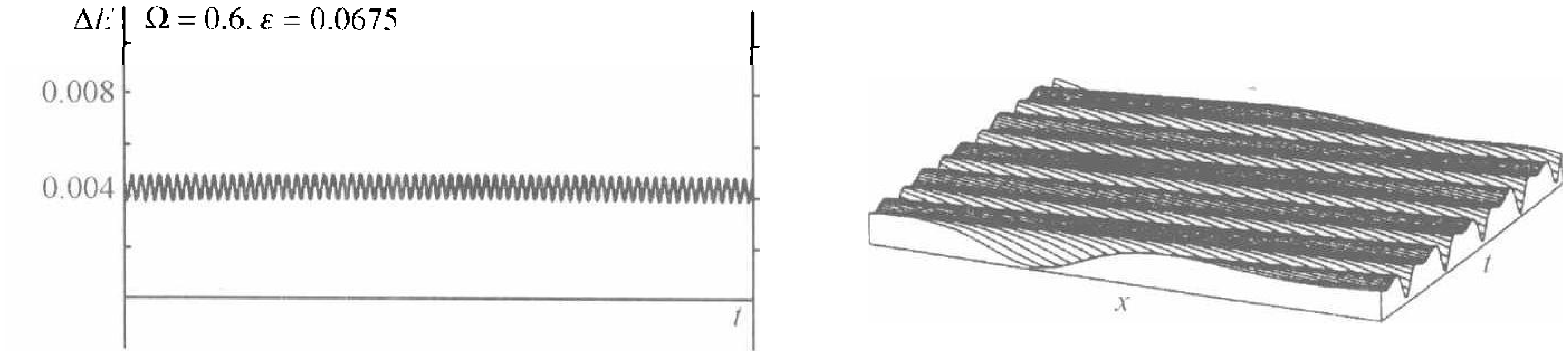

(b) 渐近态的波斑图 $\phi(x, t)$

图 7-13　数值模拟非线性波方程(7-47)得到的渐近波能为常数的解($\Omega=0.525$，$\varepsilon=0.06425$)

对于选定的 $\Omega$ 值，如果滞后曲线上所有的定态波解都是稳定的，我们可以将 $\varepsilon$ 从 0 开始步进地增加，并以在 $\varepsilon$ 值下得到的渐近解作为初条件，求出 $\varepsilon+\Delta\varepsilon$ 时的解，这样就能一步步找到整个 S 形滞后曲线的下分支；在 $\varepsilon$ 越过一个临界值 $\varepsilon_h$ 时(对应滞后下分支的末端)，模拟中渐近能量会突然大幅跳跃，这是因为定态波解跃迁到了 S 形滞后曲线的上分支的缘故，在图 7-13(a)中我们甚至看到能量跳跃到最终的定态之前还曾在一个低水平的能量上停留了较长时间，它对应滞后下分支附近的暂态；如果我们以如图 7-13(a)中的终态作为初条件，步进地减少 $\varepsilon$ 的值，那么渐近解将沿滞后曲线的上分支改变，直到 $\varepsilon$ 小于另一个临界值 $\varepsilon_l$，它才突然跃迁回滞后曲线的下分支. 因此，用上述方法在模拟中得到的是一条滞后回线，那些位于 S 形滞后曲线的负斜率分支上的解从来不会在数值模拟中实现，它们只能从求解定态波的模式方程组(7-52)找到.

在一些参数下渐近解对应的能量 $E(t)$不是定态，相应的波形也起伏不定. 最简单的非定态波动显示周期振荡的波能 $E(t)$，如图 7-14(a)所示，相应的渐近波动解见图 7-14(b)，显然此时运动出现了一个新的频率. 对于一定范围内的 $\Omega$ 值，从 0 开始增加 $\varepsilon$，我们可以清楚地看到渐近的常数能量如何失稳到周期振荡.

图 7-15 中固定 $\Omega=0.60$，给出波能 $E$ 作为 $\varepsilon$ 的函数的一个典型例子，实线表示的定态波解是稳定的，虚线表示定态波解没有在模拟中实现，实现的波动能量为周期振荡，其振幅的极大和极小值由一对圆圈给出，它们就像一串珠子穿在滞后曲线上. 这张图给我们一个清楚的信息：像图 7-14(b)中这样的波斑图正是从定态波




(a) 渐近波能随时间的演化　　(b) 渐近态的波斑图 $\phi(x,t)$

图 7-14　数值模拟非线性波方程(7-47)得到的渐近波能为周期振荡的解($\Omega=0.6$,$\varepsilon=0.0675$)

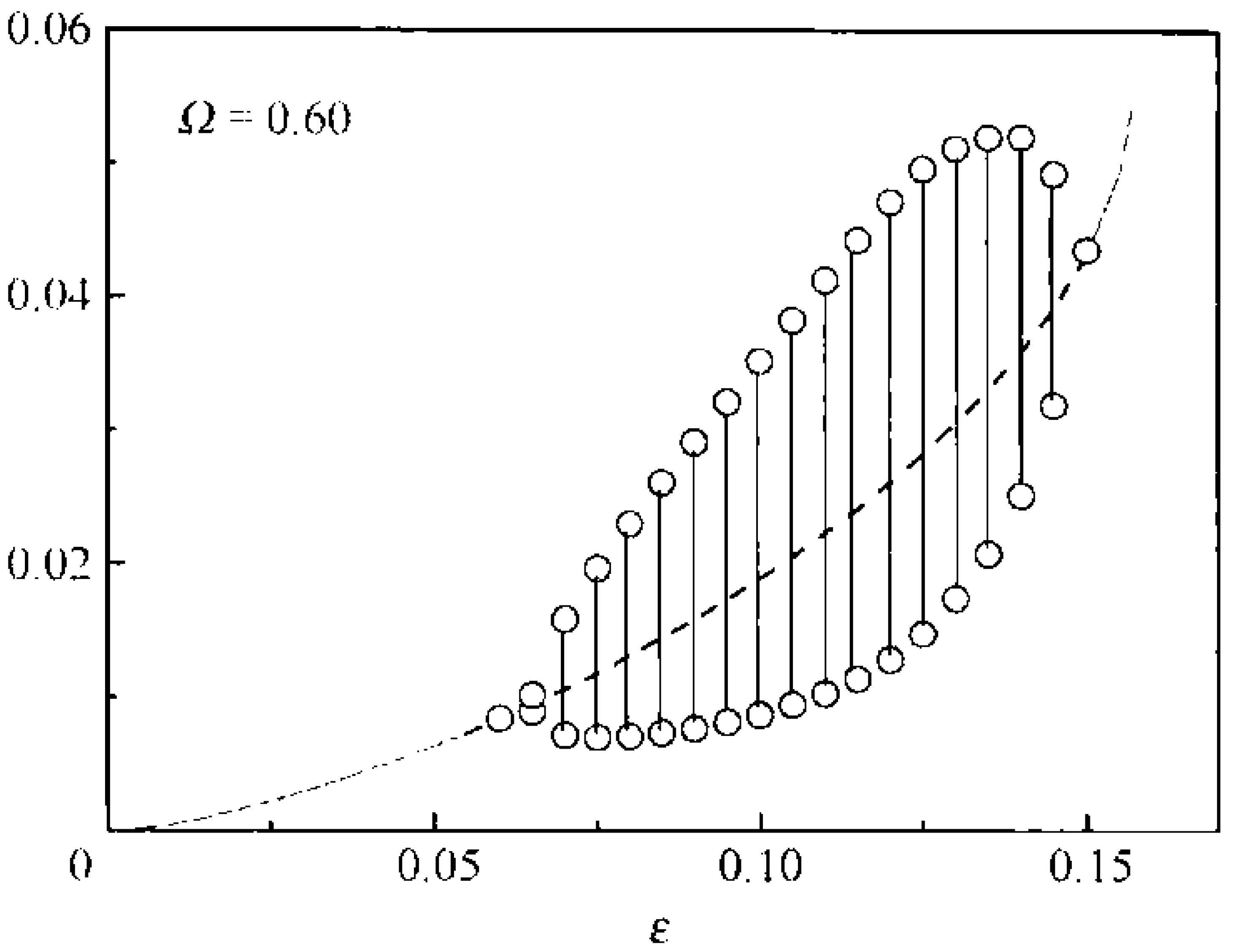
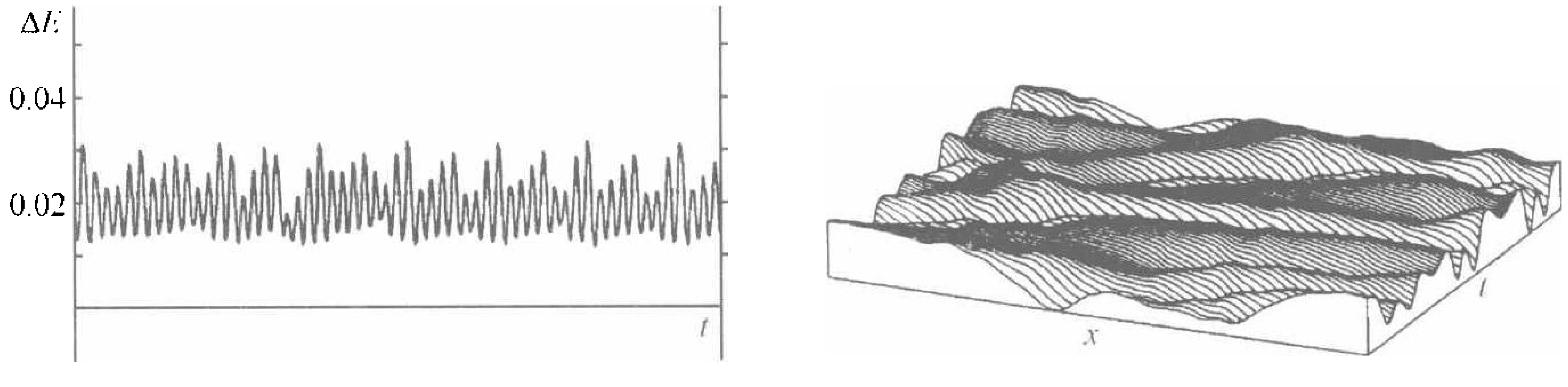



图 7-15　渐近波能 $E$ 的状态随 $\varepsilon$ 的变化($\Omega=0.60$)

解失稳而来的,最大的可能就是 Hopf 失稳. 有趣的是,随着驱动强度 $\varepsilon$ 增加,周期振荡的振幅先是增加,后来反而逐渐减小,最终又稳定化到常数能量,似乎定态波解先经历过一次 Hopf 分岔,而后又经历了一次逆 Hopf 分岔[206]. 这个现象在第八章通过定态波解的稳定性分析将能够得到相当满意的解释.

数值模拟中还观察到了时间和空间行为都十分无序的波斑图,它们似乎分为两类,典型的如图 7-16 和图 7-17 所示: 其中,图(a)是渐近波能随时间的演化,图(b)是渐近波斑图 $\phi(x,t)$,图 7-17(c)还画出了波谱 $\phi(\omega)$.




(a) 渐近波能随时间的演化　　(b) 渐近态的波斑图 $\phi(x,t)$

图 7-16　数值模拟非线性波方程(7-47)得到的渐近波能小幅缓慢无序振荡的解($\Omega=0.35$,$\varepsilon=0.12$)

图 7-16 中的波形 $\phi(x,t)$光滑，起伏较小，图 7-17 的波动变化剧烈；两类波动的能量 $E(t)$虽说都无序演化，却有显著不同的特征，前者波能缓慢振荡，波动有较长的特征时间和空间尺度，后者波能在快速振荡中阵发地出现一些宽而尖的高峰，波动的频谱 $\phi(\omega)$也非常宽.

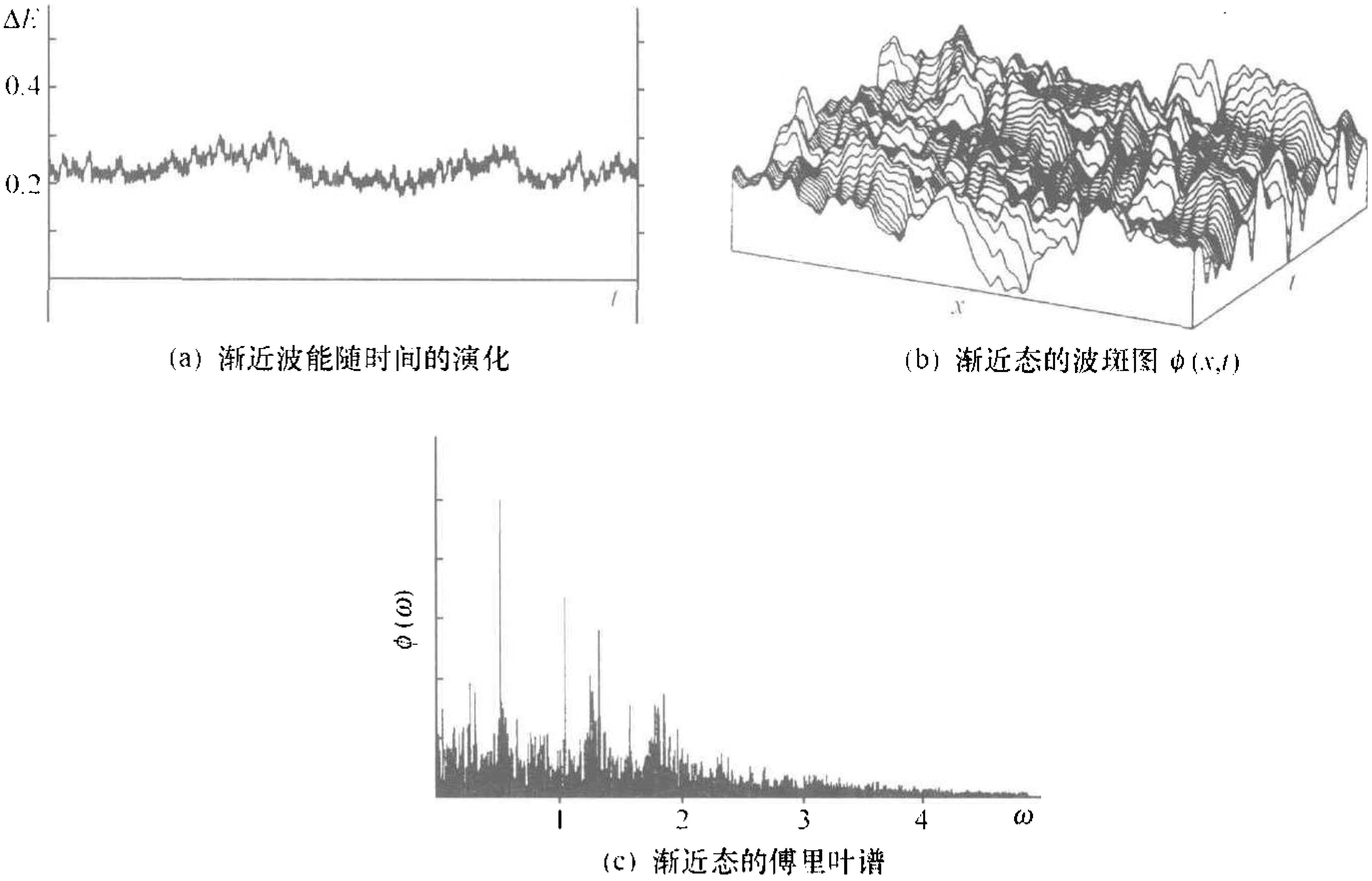



图 7-17　数值模拟非线性波方程(7-47)得到渐近波能大幅快速无序振荡的解
($\Omega=0.525$，$\varepsilon=0.2$)

从现象上看，图 7-16 就像人们通常所说的弱湍，图 7-17 就像强湍，短波长模式得到了充分的激发. 图 7-16 和图 7-17 给出的都是渐近态的结果，需要注意的是，在有的参数区，运动的暂态非常长，在暂态中不同模式间迅速交换能量，给人以运动已经进入混沌渐近态的印象，但轨道却突然弛豫到一个定态波动. 这类超暂态(supertransient)现象在时序系统中已有观察和机制分析[141,140]，在这里的波动系统中也观察到了. 如果追踪的时间不够长，这种情形极易被误判为湍流态，得不到参数空间中准确的状态图.

从上面数值模拟得到的一个重要结果是，(稳定和不稳定的)定态波动解在参数空间的某些区域中以波能的滞后形式组织得十分有规律. 我们知道，滞后是一个非常普遍的现象，除广为人知的光学双稳和多稳[207~210]之外，在等离子体[109]、化学反应[211]、液晶[212]系统中也都观察到滞后和多稳现象. 例如，在一个支持非线性漂移波传播的磁化弱电离等离子体放电实验中，伏安曲线就有多稳态滞后结构[213]. 对外部刺激响应的多稳性质对生命过程也非常重要，研究表明，无论是在人工的还是活体的神经网络中，多稳态都是记忆存储和模式识别的一个机制[214].

讨论多稳现象常用的时序系统模型是周期驱动的达芬(Duffing)方程[215]

$$\ddot{x} + d\dot{x} + x + x^3 = f\cos(\omega t). \tag{7-61}$$

这个方程是为解释一个实验[216]而建立的.实验中将钢条上端固定在支架上,另一端自由,支架沿水平方向以频率 $\omega$ 和幅度 $f$ 振动,其下方有两块磁铁,在支架振动过程中钢条自由端受磁铁的作用来回摆动.在支架运动的一定振动频率和幅度下,钢条的摆动变得十分混沌.文[215]在对 Duffing 方程(7-61)进行数值研究时发现摆动幅度 $x$ 随参数($\omega$,$f$)的变化有双稳滞后形式,一簇簇滞后曲线在参数($\omega$,$f$)空间中形成超级结构(super structure).该文作者指出,这个现象是外驱动与系统内部自由度非线性共振的结果.

非线性波方程(7-47)与驱动 Duffing 方程(7-61)的现象如此相似有其内在原因,如果限于讨论形式为 $\phi(t'\equiv t-x/\Omega)$ 的波动解,方程(7-47)化为[206]

$$\ddot{\phi} + \mu\dot{\phi} + r\phi + s\phi^2 = \delta\cos(\Omega t'), \tag{7-62}$$

这里,微分对 $t'$ 进行,$\mu$,$r$,$s$ 是 $a$,$c$,$f$,$\varepsilon$ 和 $\Omega$ 的函数.显然,它就是一个有二次非线性的 Duffing 类型的方程.两个体系在物理上如此不同,一个是振动,一个是波动,而运动规律却如出一辙,制约时序系统和空间延展系统中的非线性运动果真有统一的规律吗?既然 Duffing 系统中滞后簇的出现可归因于外周期驱动与钢条运动内部自由度的非线性共振,非线性波方程(7-47)的滞后簇很可能也是外驱动波与介质内部运动自由度出现非线性共振的结果,我们能找到证据支持这一推测吗?

### 7.2.5 线性色散和非线性共振

在分析波动系统的现象时,首先想到的总是色散关系.对于非线性波动方程(7-47),目前所能讨论的是线性色散,希望它能对认识模拟中观察到的现象有所启示.让我们把未受驱动的系统(7-47)看做为一个非线性介质,例如非均匀磁化等离子体,它允许非线性漂移波传播.假设外驱动力和耗散小到可忽略,且初始时介质中的电位涨落(由无量纲化变量 $\phi$ 描述)水平很低[$|\phi(x,t)|\ll 1$],在这些条件下,方程(7-47)中的非线性项与线性项比较将是高阶小量,介质中的波传播可近似由下面的线性色散关系描写

$$\omega_k^{l} = ck/(1-ak^2), \tag{7-63}$$

上标 l 表示线性近似.

根据色散关系(7-63),每一个内部模式 $k$ 都有特定的线性本征频率 $\omega_k^{l}$,因此对应 $k=1,2,\cdots$,介质内部存在无穷多的特征频率 $ck/(1-ak^2)$,在有外驱动波 $\varepsilon\sin(x-\Omega t)$ 时,若 $\varepsilon$ 足够小,没有改变线性色散(7-63),那么只要驱动相速度 $\Omega$ 与 $\omega_k^{l}/k(k=1,2,\cdots)$ 之中的任何一个相等,共振势必出现,模式振幅将被外驱动波推高.由于 $a<0$,显然如果 $\Omega$ 从一个大的值逐渐减小,它会遭遇到一系列共振点,它

们是

$$\Omega^*(k) \equiv c/(1-ak^2), \quad k = 1,2,\cdots, \tag{7-64}$$

在每一个 $\Omega^*(k)$ 点上外驱动波都将与线性介质内部的一个模式发生共振.

将线性色散关系(7-63)与对系统(7-47)数值模拟结果比较.可以看到,图 7-7 中那一簇簇滞后曲线,正是相继从 $k=2,3,4,\cdots$ 的线性共振点 $\Omega^*(k)$ 随驱动强度 $\epsilon$ 增加"生长出来"的. 仔细观察每一簇曲线,随 $\Omega$ 值的减小,它们的负斜率分支逐渐变窄,终至消失,如图 7-7(a)中最大一簇滞后曲线,在 $\Omega=0.60$ 时负斜率分支跨过了很宽的 $\epsilon$ 范围,随着 $\Omega$ 减小,下分支和上分支的末端临界 $\epsilon$ 值之差 $\epsilon_h-\epsilon_l$ 逐渐变小,到 $\Omega=0.50$ 时负斜率分支已经变得很窄,临界值 $\epsilon_h$ 和 $\epsilon_l$ 同时向线性共振点 $\Omega^*(k=2)\approx 0.465$ 收拢. 类似地,相应图 7-7(b)中那簇滞后曲线,它们的负斜率分支随 $\Omega$ 减小向共振点 $\Omega^*(k=3)\approx 0.279$ 收拢.

图 7-18 的阴影区粗略给出了相应图 7-7(a)~(c)中 3 簇滞后曲线负斜率分支占据的参数区,包围它们的左右虚线分别指示滞后曲线下分支和上分支末端的临界值 $\epsilon_h$ 和 $\epsilon_l$. 横轴上用符号"V"标明了线性共振点 $\Omega^*(k)$ 的位置,自右至左有 $k=2,3,4,\cdots$,共画了 8 个点. 这个图说明,滞后曲线的负斜率分支,就像一条条舌头,从一系列线性共振点 $\Omega^*(k)$ 生长出来,这个现象在右边两片大的阴影区看得特别清楚,从每一个线性共振点长出了一簇滞后曲线,随着驱动强度 $\epsilon$ 的增加亦即非线性的增强,它们的负斜率分支逐渐展宽.

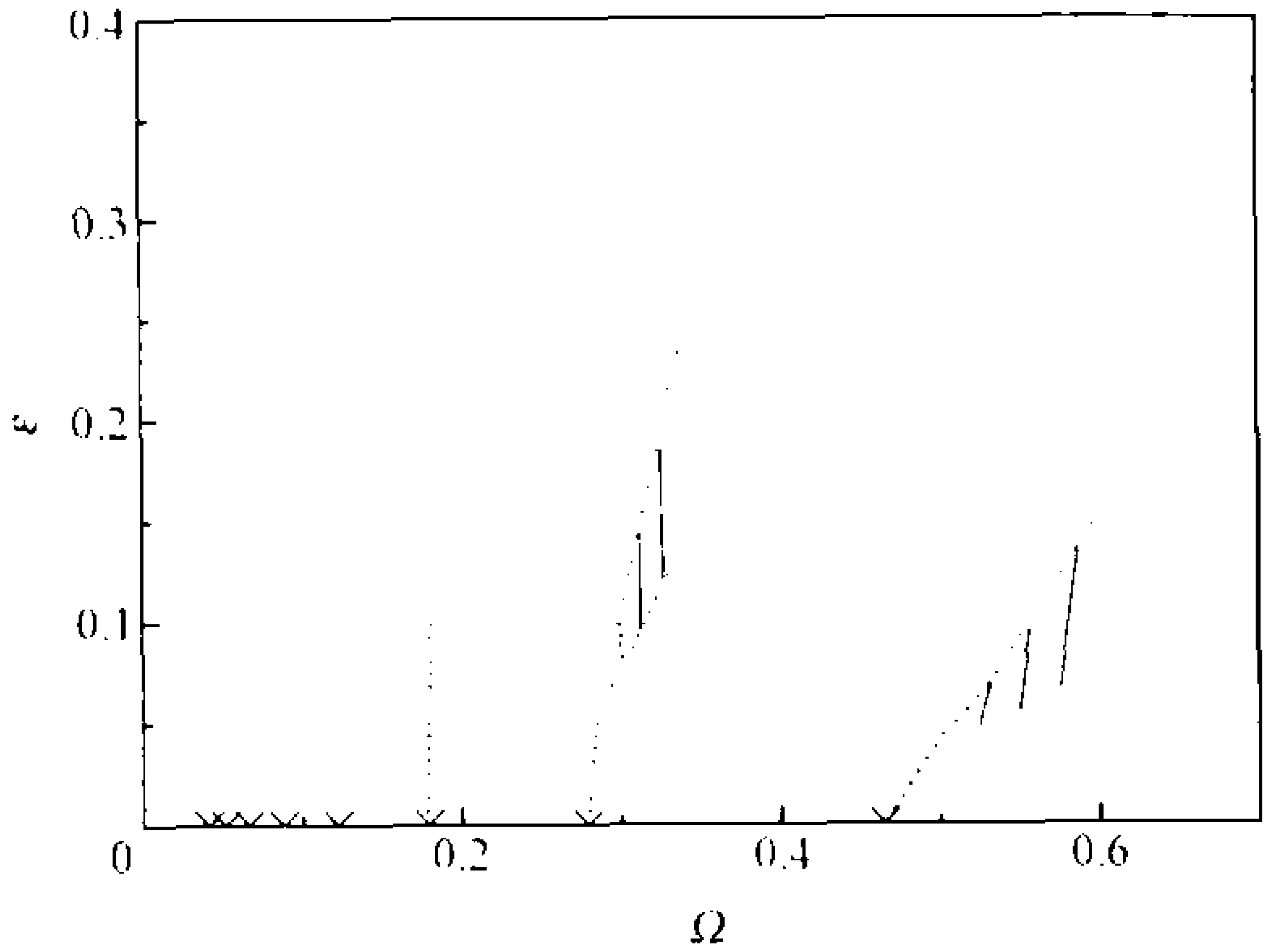



图 7-18　与内部自由度线性共振的驱动相速度位置 $\Omega^*(k)$(横轴上尖角)和滞后曲线簇负斜率分支占据的参数区(虚线包围的阴影区)

那么,为什么一个线性共振点 $\Omega^*(k)$,在非线性条件下能够发展出依赖于驱动参数($\Omega,\epsilon$)的(负斜率)曲线簇? 我们知道,在线性情况下模式的本征频率只与介质自身的性质有关,如线性色散关系(7-63)中 $\omega_k^l$ 仅依赖于方程(7-47)左边各项的系数;随着驱动强度 $\epsilon$ 增大,在介质中传播的波动幅度增大,方程(7-47)中的非线性

项 $f\phi\partial\phi/\partial x$ 与线性项可以抗衡,非线性的存在使系统的色散行为偏离了线性色散(7-63);在第六章耗散系统的实例中,我们已经看到模式的本征频率因非线性相互作用发生改变,改变的大小与定态下的波动幅度和位相等因素有关,而后者直接依赖于驱动耗散等外参数,这里也一样,本征频率的非线性改变使得共振不会局限在孤立参数点 $\Omega^*(k)$ 上,它一定会表现为一种依赖于某种波动状态本身的共振行为,在这里也就是依赖于驱动参数($\Omega,\varepsilon$)的共振行为.

数值模拟观察到的一些与滞后相关的现象,也支持滞后现象与非线性共振有关这一观点,这里非线性共振是外驱动与内部自由度之间出现的共振.如前面曾提到,伴随着 $\Omega$ 减小时出现的一系列滞后曲线簇发生了绕数分岔,在相图 7-9(a)~(c)中的绕数分别是 2,3,4,不难注意到,它们与图 7-18 中相应参数下的线性共振的波数 $k$ 分别相等;此外,在滞后曲线的同一正斜率分支上相轨道都有相同的绕数,这提示,在整个分支上外驱动波都强烈地推高了同一个"模式".这里在模式一词上加了引号,以表示在非线性条件下模式多半已不是傅里叶展开意义上的概念了,在第八章中将对此做深入分析.

不仅随驱动波的相速度 $\Omega$ 改变出现了一系列非线性共振,在同一 $\Omega$ 参数下,随着强度 $\varepsilon$ 增加,驱动波也会陆续与越来越高的内部"模式"发生共振.前面提到在图 7-12 的情形下,多级滞后台阶与绕数分岔相关,以及波数谱图 7-10 中特征峰随台阶升高出现后移,都支持这一观点.

这样,在数值计算中观察到非线性波方程实例中关于定态波解的林林总总的现象,如随参数改变时成簇出现的滞后曲线,波形中驼峰数的逐一增加,绕数分岔,波数谱中特征峰的渐次后移等,其实很可能都只不过是非线性共振在不同方面的表现而已.滞后现象在物理系统中十分常见,与上面的一些模拟结果相似的其他现象也不乏实例.以强激光与原子相互作用的高次谐波激发为例,随着入射光强度增高,激发出的高次谐波谱线强度有可能超过低次谐波的,例如二倍频(双光子)的强度高于基频的,三倍频(3 光子)的强度高于二倍频的等等[217],非常类似于上面列举的与绕数分岔相关的波谱特征峰渐次后移现象,是微扰论不能解释的.虽然这类非线性光学现象涉及微观系统中的运动,但在动力学上是否与经典系统也有相通之处?抑或它们也是入射光与原子内部自由度非线性共振的结果?

那么,有没有可能建立起非线性色散的数学表达?诚然,也许我们还难以在普遍意义上做到这一点,但囿于特定的或一类波动方程,还是有可能的.下一章我们将以一维非线性漂移波模型(7-47)为例,建立它的非线性色散关系,并与数值模拟结果作比较,以便更深入地认识这里观察到的非线性共振等现象.

### 7.2.6 滞后现象与湍流

将数值模拟方程(7-47)得到的渐近波动解 $\phi(x,t)$ 按能量状态不同标记在

$(\Omega,\varepsilon)$参数空间，会发现一些有趣的现象. 图 7-19 就是这样一张状态图[203]，渐近能量为定常 $E_0$ 的状态用浅色点标记，能量 $E(t)$ 为非定常（包括周期和混沌）的状态用深色点标记. 十分引人瞩目的是，深色圆点在参数$(\Omega,\varepsilon)$空间成片地出现，形成了超级结构，在状态图上可看到 4 个这样的结构，它们的宽度随 $\Omega\to 0$ 逐渐减小，似乎遵循着某种规律.

将线性共振点 $\Omega^*(k)$的位置标在图 7-19 中 $\varepsilon=0$ 轴上（实心三角形，自右至左 $k=2,3,4,\cdots$），容易发现，它们与出现非定态波解的参数区形成的超级结构明显相关. 显然，每一个超级结构后面都"嵌"有一簇滞后曲线，例如图中右起第一个也是最大的一个超级结构就对应图 7-7(a)中那簇最大的滞后曲线，右起第二个超级结构则对应图 7-7(b)中那簇滞后曲线，……. 前面说过，随 $\Omega$ 减小，应该有无穷多簇滞后曲线，预料在图 7-19 上也相应有无穷多个波动解为非定态的超级结构，只是随着 $\Omega$ 减小，这些结构所占据的 $\Omega$ 范围越来越窄. 支持超级结构与滞后曲线簇之间存在相关的另一个证据是，在图 7-19 最大超级结构右边的参数区，数值模拟没有发现非定态的波动解，也没有观察到滞后现象. 看来，非定态波动解包括湍流解似乎与滞后现象有着不同寻常的内在联系.

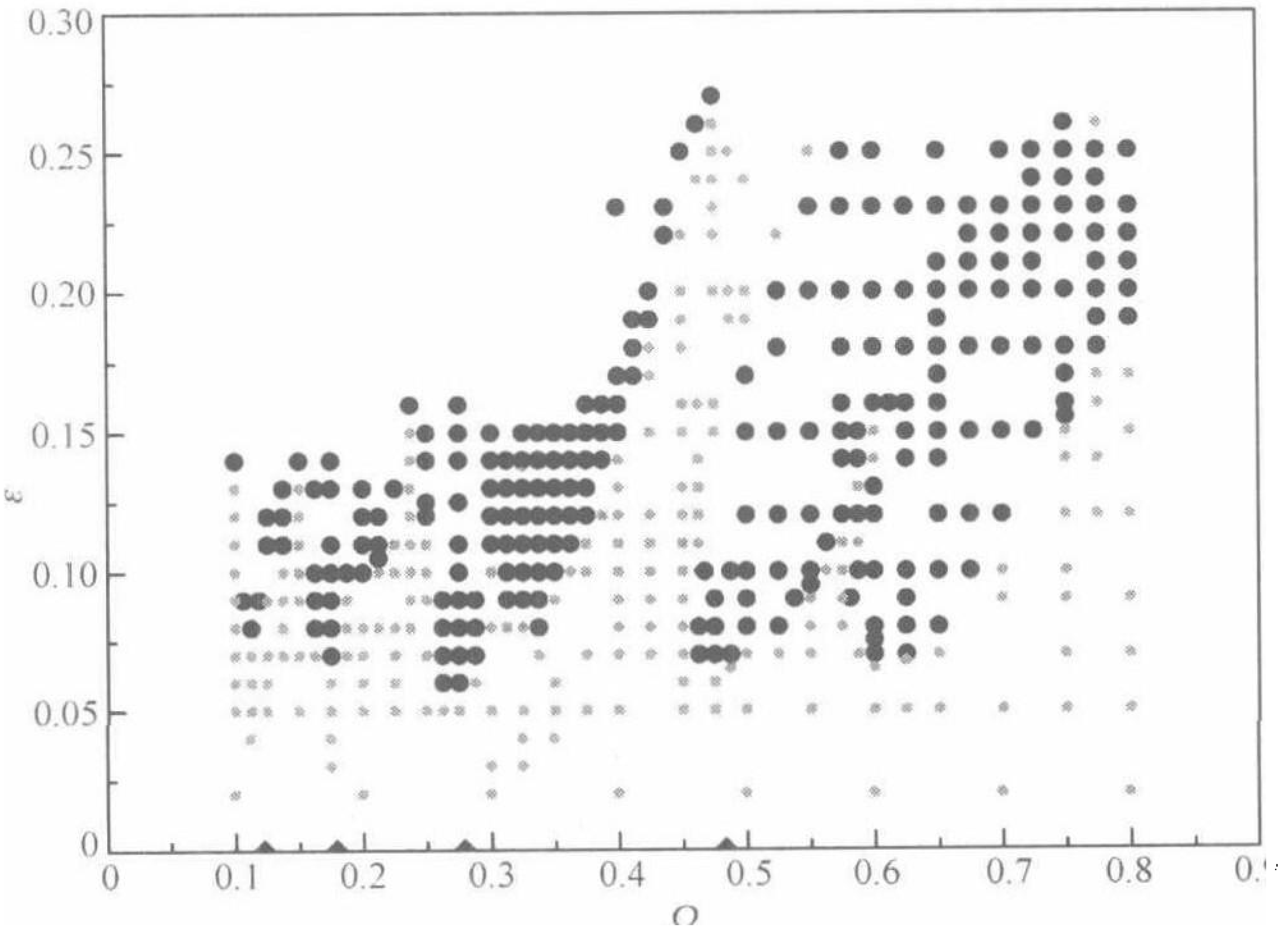



图 7-19　在参数$(\Omega,\varepsilon)$空间中系统(7-47)的波动状态图

图 7-19 中湍流解与滞后之间的相关不是一个孤例，事实上，在节 7.2.4 中提到的很多出现滞后的系统中都同时观察到了混沌或时空混沌的运动[109,211~213]，其中文[109]还明确指出多稳态与混沌运动的出现之间存在联系. 这个现象为探索湍流起因提供了一条极为重要的线索，有理由问：定态波解失稳并最终发展成湍流，是否与滞后曲线上的某些特殊状态密切相关呢？在第十章中我们将指出，位于 S 形滞后曲线负斜率分支上的不稳定定态波解，记为 $\phi_0^*(x-\Omega t)$，在系统的运动状态

向湍流的转变中起了关键作用,这就是为什么湍流解出现的参数区与滞后现象出现的参数区如此密切相关的原因.

不过,这句话不能反过来说,因为滞后现象的出现似乎并不总是意味着混沌和湍流.驱动 KdV 方程(7-54)中虽然也有滞后出现,也观察到定态波解失稳到周期振荡的现象,却没有发现混沌和湍流解.是数值模拟中扫描的参数范围有限,还是未加驱动和耗散时的 KdV 方程与非线性漂移波方程在可积性质上的差别使然?目前还不得而知.

在试图讨论非线性波的动力学时,笔者曾有一种找不到"支点"的感觉.在时序非线性系统中,"支点"是相空间中的不动点,它们是系统的平衡态,如单摆的平衡态或 Duffing 系统中钢条的静止状态,人们从这里出发开始讨论非线性动力学;然而我们关心的波动现象,特别是在行波情形下,物理量随时间和空间总是在变化,平衡态在哪里?图 7-15 中的现象提示,我们似乎应该从定态波解出发开始讨论系统的动力学,因为它相应的能量 $E_0$ 就是一个与时间无关的平衡能量,如果在波动问题中也有所谓的分岔现象的话,它应该从定态波解的失稳开始.如是,定态波能量 $E_0(\varepsilon)$的一簇簇滞后曲线就为我们在参数$(\Omega,\varepsilon)$空间中讨论定态波解的分岔提供了一条按图索骥的纲.不过问题是,系统(7-47)的定态波解 $\phi_0(x-\Omega t)$是一个以一定群速度运动的有确定形状的空间结构,如何将它与时序系统中不动点的概念联系起来呢?只有解决这个问题,才有了赖以分析非线性波的动力学行为的支点.

# 第八章　定态波解的稳定性分析

对于非线性时序系统，无论是映射，还是耦合常微分方程组，在讨论它们的动力学性质时，首先总是要寻找方程的不动点，即系统与时间无关的定态解，然后分析这个不动点是否稳定. 为此要对它施以微扰，如果从微扰的线性化方程得到初始扰动随时间指数衰减，这个不动点就是稳定的，反之，如果初始扰动随时间增长，这个不动点就是不稳定的；在搞清楚微扰的本征行为以后，再计入扰动的非线性来分析系统在远离平衡态时的动力学性质. 非线性时序系统千变万化的动力学行为实际上完全是在不动点上扰动演化的表现，不动点本身是个平衡态，不包含任何有关时间的信息. 那么，对于空间延展系统，是否也存在这样的不动点？ 如果存在，我们也可通过对其扰动来讨论系统的非线性动力学吗？

容易想到，很多空间延展系统都允许存在未知函数不随空间变量改变的均匀状态，在这个状态下系统没有任何空间结构，待解函数在空间各点上都是时间的定态. 研究空间延展系统中这样一个平凡状态的诱人之处是希望回答这样一个问题：为什么一些系统的空间均匀态在临界参数处会突然被破坏，出现对称破缺（symmetry break），自发地生长出某种形态的空间结构. 在非线性动力学中这类课题归为“斑图选择”（pattern selection）.

然而，当介质中有波传播时，空间已不再均匀，系统在空间上也包括时间上的对称性都受到了破坏. 这样一个有波（如行波）传播的状态似乎与“不动”这两个字天然不相容. 找不到不动点，也就失去了支点，难以应用在研究时序系统非线性问题时已经得到的丰硕成果. 因此，在波动系统中是否存在不动点是探讨它的动力学首先要破解的关键问题.

细心的读者可能已经发现，上面的叙述中一个重要概念被偷换了：在时序系统的非线性动力学理论中，所谓不动点指的是相空间中的一个点，在这个相点上物理量不随时间改变，它与在坐标空间中物理量不随时间变化的点在概念上一般是有差别的，例如在驻波的驻点上物理量不随时间改变，但这样的点并不是非线性动力学中所说的不动点. 不过，在下述条件下二者得到统一：如果函数是一个冻结了的空间结构，在所有坐标点上物理量都不随时间改变，那么它的所有模式（如周期边界问题中的傅里叶模式）振幅和位相都是时间的常数，因此一个不变的空间结构在由模式所构建的无穷维相空间中对应一个不动点. 这样，为分析空间延展系统中的非线性动力学我们所要找的“支点”，可以是系统中一个不变的空间结构.

事实上,在非线性波动系统中,这样的空间结构解屡见不鲜,只是需要在恰当的坐标系中观察,如第七章中保守系统的孤立波类型解或耗散系统的定态波解,它们都依赖于时间和空间的一个组合变量,如 $\phi=\phi_0(\xi\equiv x-ut)$. 当随波观察时,这样的状态都是一些冻结的结构,好比山峰和山谷,因此只要选择随波坐标系,孤立波或者类似的定态波结构都对应相空间中的一个不动点. 空间延展系统一旦在不动点问题上与时序系统对接,从动力学的观点,二者就没有什么本质的区别了:相空间不动点的稳定性问题就对应于定态波的稳定性问题,对不动点的扰动,就对应于对定态波的扰动,如此等等.

本章先利用一个反应扩散系统模型简要介绍从均匀态的自发对称破缺和相关的斑图选择,其实,若在随波坐标系中观察,那些孤立波类型的定态波解也是空间均匀态出现对称破缺的结果. 本章的重点将放在定态波解的稳定性分析上,以驱动-耗散的非线性漂移波为模型,建立起系统的非线性色散关系,为此需要对定态波施以微扰,讨论微扰的线性演化. 采用这个方法研究,发现定态波解就像一个势阱,它的存在将改变微扰的本征行为,亦即系统的色散关系将因这个势阱的存在而出现非线性改变. 具体地说,在恰当的表象下线性微扰的本征行为可以用一组独立的复振子表示,数目与系统自由度数相同,可将这些复振子称为"准模"(quasi-mode)[2],本章找到的定态波解的两种可能的失稳方式——鞍结点失稳和 Hopf 失稳,都与对定态波扰动的某个特征准模及其色散行为在参数空间中出现奇异性有关.

# §8.1 斑图选择

## 8.1.1 空间均匀态的对称破缺

广义地说,斑图选择包括了统计力学和动力学的许多课题,在非平衡统计方面,如冰晶生长成雪花形状,电解液中的金属离子在电极上沉积成树状结构,或者不太黏滞的液体在缓慢进入黏滞液体时形成的手指状枝杈(fingering)等,统称为分形(fractal)生长问题;有一些评论文章则将动力学系统中各种时空斑图,包括弱湍和强湍等,也纳入斑图选择这个范畴[161]. 本节在提到斑图选择这个术语时,是在较为狭窄的意义上使用的,它指的是参数改变时空间均匀态自发出现空间结构这一现象,理论上要探讨的一个关键问题是,系统选择这个特征尺度而不是那个特征尺度的空间结构的原因.

在动力学系统中均匀态自发对称破缺的现象比比皆是,如前面提到过的 Rayleigh-Bénard 对流装置中,随薄层液体上下表面的温差加大,原本均匀的速度场发生了空间对称破缺,在水平方向上呈现出一定尺度的六角形结构. 还有不少关于斑图选择的研究课题讨论的是化学和生物学中的现象[161],化学反应中出现的结构,

生物世界中绚丽多彩的昆虫翅膀和哺乳动物皮毛的斑纹，都是相关研究捕捉的目标. 通过一些数学模型（如反应扩散方程）人们甚至可以将这些斑纹惟妙惟肖地模拟出来[218]. 如此复杂的化学和生物现象能由非常简单的数学模型再现，这个事实本身或许比模拟的具体结果更耐人寻味. 事实上，一个生物体从各向同性受精卵开始发育成具有各种功能的成熟个体，就经历过一连串形态和功能的对称破缺. 除出现肢体这类显而易见的对称破缺外，微观上细胞也会出现所谓极化的对称破缺过程，例如在发展成肠道内皮细胞之前这些细胞也曾是各向同性的.

空间均匀态为什么会自发地出现对称破缺呢？让我们以化学反应扩散系统为例探讨这个问题，假设系统由两种物质成分组成，每一种成分在扩散过程中还与另一种成分发生反应. 初始时各自的浓度都是均匀的，不显示任何空间结构，随着时间的演进，浓度在空间中的分布自发地出现一定的结构，其特征尺度大小依赖于反应速率等参数. 从非线性动力学的观点来看，空间均匀态不能维持，一定是因为在一定条件下这个状态出现了不稳定性.

将两种物质成分的浓度分别表示为 $C_1(\boldsymbol{x},t)$ 和 $C_2(\boldsymbol{x},t)$，它们随时间的变化满足反应扩散方程[76]

$$\frac{\partial C_1}{\partial t} = F_1(C_1,C_2) + D_1\nabla^2 C_1, \tag{8-1a}$$

$$\frac{\partial C_2}{\partial t} = F_2(C_1,C_2) + D_2\nabla^2 C_2, \tag{8-1b}$$

这里，$D_{1,2}$ 分别是两种成分的扩散系数，$F_{1,2}$ 是与反应机制有关的函数，它们一般非线性地依赖于浓度 $C_1$ 和 $C_2$.

设初始时系统(8-1)处于空间均匀态，浓度分别为 $C_{1,0}$ 和 $C_{2,0}$，它们是系统的定态，满足定态方程

$$\frac{\partial C_{j,0}}{\partial t} = 0,\quad j = 1,2. \tag{8-2}$$

现假设两种成分的浓度都从定态有个小偏离，即有 $C_j(\boldsymbol{x},t)=C_{j,0}+c_j(\boldsymbol{x},t)(j=1,2)$，代入方程(8-1)，保留到扰动量 $c_1(\boldsymbol{x},t)$，$c_2(\boldsymbol{x},t)$ 的线性项，得到

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} = F_{11}c_1 + F_{12}c_2 + D_1\nabla^2 c_1, \tag{8-3a}$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial t} = F_{21}c_1 + F_{22}c_2 + D_2\nabla^2 c_2, \tag{8-3b}$$

这里，$F_{ij}\equiv\partial F_i/\partial C_{j,0}(i,j=1,2)$.

考虑长度为 $L$ 的一维问题，将其周期性地延拓到无穷空间，就可以将各变量展开为模式之和. 其中空间均匀态 $C_{1,0}$ 和 $C_{2,0}$ 的展开中只有波数为 0 的项不等于 0，这个状态是无穷维模式空间中的一个不动点，对均匀态的扰动也就是对模式空间中这个不动点的扰动. 扰动同样是空间延展量，因此也可展开作不同尺度的模式

$$c_i(x,t) = \sum_k a_{i,k}(t)\psi_k(x), \quad i = 1,2, \tag{8-4}$$

这里 $k=2\pi j/L(j=1,2,\cdots,\infty)$，$\psi_k(x)$是恰当的正交完备函数系，在这里周期边界条件下可为三角函数系.

将展开式(8-4)代入方程(8-3)，导出振幅 $a_{1,k}$和 $a_{2,k}$的演化方程

$$\frac{\mathrm{d}a_{1,k}}{\mathrm{d}t} = F_{11}a_{1,k}(t) + F_{12}a_{2,k}(t) - D_1k^2a_{1,k}(t), \tag{8-5a}$$

$$\frac{\mathrm{d}a_{2,k}}{\mathrm{d}t} = F_{21}a_{1,k}(t) + F_{22}a_{2,k}(t) - D_2k^2a_{2,k}(t). \tag{8-5b}$$

假设方程的解随时间变化有指数形式 $a_{i,k}(t)=a_{i,k}(0)e^{\lambda(k)t}(i=1,2)$，代入以上方程得到

$$\lambda a_{1,k}(0) = F_{11}a_{1,k}(0) + F_{12}a_{2,k}(0) - D_1k^2a_{1,k}(0), \tag{8-6a}$$

$$\lambda a_{2,k}(0) = F_{21}a_{1,k}(0) + F_{22}a_{2,k}(0) - D_2k^2a_{2,k}(0). \tag{8-6b}$$

由 $a_{j,k}$有非零解的条件找到$\lambda$ 满足的本征方程为

$$\lambda^2 + \lambda[k^2(D_1 + D_2) - F_{11} - F_{22}] + k^2(D_1D_2k^2 - F_{11}D_2 - F_{22}D_1) + F_{11}F_{22} - F_{12}F_{21} = 0. \tag{8-7}$$

关系式(8-7)就是系统(8-1)的色散关系.我们注意到，它不仅依赖于系统的参数，如扩散系数 $D_1$，$D_2$，还依赖于未扰时系统的状态，因为 $F_{ij}$ 是在定态 $C_{0,1}$，$C_{0,2}$处取值的，色散关系(8-7)的这一特点是系统的非线性性质带来的. 对特定模式 $k$，式(8-7)有两个本征值解，如果它们是复数，$\lambda(k)=\gamma_k\pm i\omega_k$，则 $\omega_k$ 是波数为 $k$ 的模式在介质中传播的频率，如果对所有波数 $k$ 都有 $\gamma_k<0$，系统全部本征频率 $\omega_k(k=1,2,\cdots,\infty)$被阻尼，那么均匀态 $C_{1,0}$ 和 $C_{2,0}$ 是稳定的；如果对某个波数 $k=k^*$ 有 $\gamma_{k^*}>0$，那么扰动模式 $k^*$ 的振幅 $a_{1,k^*}$，$a_{2,k^*}$ 将随时间增加，均匀态 $C_{1,0}$和 $C_{2,0}$不再稳定，空间对称破缺发生. 系统最终的斑图形态将由 $c_1(\boldsymbol{x},t)$，$c_2(\boldsymbol{x},t)$的非线性演化决定，如果没有进一步的分岔发生，斑图显示的空间特征尺度就是失稳波数 $k^*$ 对应的尺度.

## 8.1.2 非线性波的斑图选择

在分析空间均匀态 $C_{1,0}$和 $C_{2,0}$失稳的原因时，曾对它们作过微扰，在这个问题中微扰量本身就是空间延展的，$c_{1,2}(\boldsymbol{x},t)$各包含了无穷多个模式. 与非线性时序系统不动点失稳时的情形类似，在参数变化时，并非所有模式都同时失稳，一般只有一个或有限个模式变得不稳定，或者说不稳定性只发生在相空间的少数方向上. 与时序系统不同的只是，在系统(8-1)中扰动的每个模式都对应一个特定的波数，而失稳模式的波数就决定了对称破缺后空间斑图的特征空间尺度.

第五章曾介绍过有关湍流的几个值得注意的现象，其中一个就是对称性随参

数的改变，现在让我们从对称性的角度对波动现象作一个粗浅的分析. 以驱动-耗散非线性漂移波系统(7-47)为例，在驱动强度 $\varepsilon=0$ 时，系统的渐近解是空间均匀态，在空间任何一点 $x$ 都有 $\phi_0(x,t)=0$(在等离子体系统中这就是扰动电位是常数0)，它对应模式空间中的一个平凡不动点. 一旦 $\varepsilon$ 不等于0，这个均匀态不复存在. 根据第七章介绍的数值模拟结果我们知道，在 $\varepsilon$ 不太大时，运动总是弛豫到孤立波样的定态波解 $\phi_0(x-\Omega t)$[203]，在随波坐标系中观察，它们是一些不变的空间结构，这就是说，原来 $\phi_0=0$ 的均匀态出现了空间对称破缺. 定态波 $\phi_0(\xi\equiv x-\Omega t)$的模式振幅和位相$\{A_k,\theta_k\}$可从方程(7-52)解出，它们都是时间的常数，因此系统首次对称破缺后出现的定态波解 $\phi_0(x-\Omega t)$在随波坐标系 $\xi=x-\Omega t$ 中对应相空间中的一个非平凡不动点.

系统(7-47)的定态波解 $\phi_0(x-\Omega t)$的出现是外驱动波和耗散共同作用的结果，驱动波提供了一个惯性坐标系 $\xi=x-\Omega t$，有特定的运动方向，在这个坐标系中定态波的时间变量 $t$ 和空间变量 $x$ 是对称的，这使得系统(7-47)均匀态的失稳与化学反应系统(8-1)中的自发对称破缺有所区别，不过在两个系统中空间结构的出现都是非线性系统自组织的结果，同样存在斑图选择问题.

在第七章中已经知道，随 $\Omega$ 减小，系统(7-47)的定态波解 $\phi_0(\xi)$出现越来越多的驼峰(图7-8)，这实际上就是一种斑图选择. 这个现象已从线性色散关系初步得到了理解：从式(7-64)知道，在 $\varepsilon=0$ 时，如果 $\Omega=\Omega^*(k)=c/(1-ak^2)$，驱动波将与介质内部特征空间尺度为 $2\pi/k$ 的傅里叶模式发生共振，在有限 $\varepsilon$ 时，共振点展宽成共振带(图7-18)；如果 $\varepsilon$ 不是很大，可以粗略地认为共振发生的特征空间尺度与线性时差别不大，每一个共振带仍对应一个特征失稳“模式”，它的“波数”就决定了相应定态波解中驼峰的数目. 因此在随波坐标系中观察，这里的情形非常类似于 Rayleigh-Bénard 对流卷或 Taylor 涡旋，它们都出现了具有一定特征空间尺度的结构. 在文[2]中指出，与这些结构的特征尺度相关的不是简单傅里叶展开意义上的模式，而是一种准模. 在本章后面，结合对系统(7-47)的定态波解作稳定性分析，我们将对准模提出更为清晰的概念.

在参数变化时系统(7-47)运动的对称性有可能进一步丧失. 当激发出具有一定幅度的定态波 $\phi_0(\xi\equiv x-\Omega t)$时，虽然失去了空间均匀性，却还保留了空间和时间之间的某种对称. 下面我们将看到，在临界参数下，空间和时间的对称性不再能够保持，系统的未来与过去不再等同. 在非线性波动系统中对称性的这一破缺，其实就是定态波解 $\phi_0(\xi)$作为相空间中的一个非平凡不动点出现了分岔.

因为要在随波运动的坐标系中讨论波动系统(7-47)，相应于每个驱动参数值 $\Omega$，都要建立起一个运动速度为 $\Omega$ 的惯性坐标系. 当连续改变 $\Omega$ 时，我们将面临无穷多个这样的惯性系，它们之间的相对速度都是常数. 因为牛顿定律在伽利略变换

下保持不变，在讨论非线性波的动力学现象和规律时，完全可以放心地使用这些随波运动的坐标系. 在这些坐标系中观测到的频率相对于实验室坐标系出现了多普勒移动，而说到物理规律，则不必担心，它们不会因换到另一个惯性系出现任何改变.

## § 8.2　定态波解的稳定性分析

在时序系统中，在不动点 $\underline{x}_0$ 受到扰动时，它本身并没有被改变，我们只是根据扰动 $\underline{\delta x}$ 的时间行为来判断不动点 $\underline{x}_0$ 是否稳定. 对于波动问题，这个事实相应地应表述为：如果说一个定态波动的空间结构不稳定，这并不是说这个波动解不复存在，而只是说，对它的初始扰动将被放大，因此未扰的波动状态实际上不能被观察到，换言之这个状态不能实现. 这在任何意义上都不是说，理论预言的那个定态波解本身已经改变了. 设想我们真的能够无限精确地建立起这样一个定态波解的波形，并保证它不受到哪怕是无穷小的扰动，那么这个波形一定会保持它的形状并以理论预言的群速度运动. 可惜对不稳定的定态波解来说，这个理想状态无法实现.

在时序系统中我们假设不动点受到扰动，有 $\underline{x}(t)=\underline{x}_0+\underline{\delta x}(t)$，对应波动系统的情形就是定态波解 $\phi_0(\xi\equiv x-ut)$受到扰动，如果扰动变量在线性近似下幅度随时间指数衰减，我们就说定态波解 $\phi_0(\xi)$是稳定的，否则是不稳定的.

一个形式为 $\phi_0(x-ut)$的定态波解的稳定性要在随波坐标系中分析，还有一个深层原因，就是上面已经提到的在这个参照系中定态波解关于空间 $x$ 和时间 $t$ 是对称的，因此也只有在这个参照系中才能搞清楚时间和空间的对称性是怎样出现破缺的. 波动系统中的许多现象在随定态波的坐标系中都可以得到满意的解释，也许道理就在这里.

### 8.2.1　非线性色散关系

让我们以驱动-阻尼的一维非线性漂移波模型(7-47)为例，对它的定态波解 $\phi_0(x-\Omega t)$作稳定性分析. 在上一章中已经知道，在以其群速度运动的坐标系($\xi=x-\Omega t$，$\tau=t$)中，定态波解 $\phi_0(\xi)$满足方程 $\partial\phi_0(\xi)/\partial\tau=0$. 对于给定参数和恰当的猜值，$\phi_0(\xi)$的傅里叶展开

$$\phi_0(\xi)=\sum_{k=1}^{N}A_k\cos(k\xi+\theta_k) \tag{8-8}$$

中的模式振幅和位相$\{A_k,\theta_k\}$可从定态波的模式方程(7-52)解出，它们的值决定了相应相空间中的一个不动点. 对于同一组控制参数($\Omega$,$\varepsilon$)，有可能找到多个定态波解，也就是在相空间中有多个非平凡的不动点.

我们可以用复模式的振幅和位相的一组值$\{A_k,\theta_k\}$表示定态波解 $\phi_0(\xi)$在相空

间中对应的不动点，或者等价地用$\{X_k \equiv A_k\cos\theta_k, Y_k \equiv A_k\sin\theta_k\}$这一组值来表示，这里$X_k, Y_k$是模式$A_k e^{i\theta_k}$在相空间中两个相互正交方向上的投影. 一个有$N(N\to\infty)$个自由度的波动系统，它的定态波解作为一个不动点，在复模式空间中每个自由度$k$上都可能受到扰动，因此扰动变量是一个有$N$个复模式的空间延展量，其演化具有波动性质. 这样，我们可在随波坐标系中将系统(7-47)的任何一个波动解写成相应参数下的定态波解$\phi_0(\xi)$与对它的扰动波之和[219,201]，

$$\phi(\xi,\tau) = \phi_0(\xi) + \delta\phi(\xi,\tau), \tag{8-9}$$

这里并不需要限制扰动波$\delta\phi(\xi,\tau)$为小量. $\delta\phi(\xi,\tau)$在相空间中有$N$个自由度，每个自由度上的复振子又可投影在两个正交的实方向上，因此不动点受到的实扰动方向总共可有$2N$个.

这一假设是否有违非线性系统的解不具有可加性这一原理呢？实际上，将波动解写做式(8-9)与可加性这一话题无关，因为$\delta\phi(\xi,\tau)$并不是原波动方程(7-47)的解，也就无所谓解的可加性问题. 之所以允许作这样的分解，只是因为在随波坐标系中$\phi_0(\xi)$不依赖于时间，若将式(8-9)代入波动方程(7-47)，可以将$\phi_0(\xi)$剥离出来从定态波方程(7-52)求解，同时找到扰动波$\delta\phi(\xi,\tau)$单向地与定态波$\phi_0(\xi)$耦合的方程如下

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left[1 + a\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\right]\delta\phi - \Omega\frac{\partial}{\partial\xi}\left[1 + a\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\right]\delta\phi + c\frac{\partial\delta\phi}{\partial\xi}$$
$$+ \gamma\delta\phi + f\frac{\partial}{\partial\xi}[\phi_0(\xi)\delta\phi] + f\delta\phi\frac{\partial}{\partial\xi}\delta\phi = 0, \tag{8-10}$$

对于给定参数，先由方程(7-52)在一定初始猜值下找到所关心的定态波解$\phi_0(\xi)$，就可以从方程(8-10)求解扰动$\delta\phi(\xi,\tau)$从某个初始状态的演化了. 重要的是，扰动波$\delta\phi(\xi,\tau)$包含了波动系统(7-47)随时间演化的全部信息，它的模式是活跃的，与之相比，定态波解$\phi_0(\xi)$的模式$\{A_k, \theta_k\}$不是活跃模式，它们不携带任何时间信息.

方程(8-10)中扰动波$\delta\phi(\xi,\tau)$的演化不光依赖外参数，还依赖在同样参数下的定态波解$\phi_0(\xi)$，在给定外参数时定态波解不止一个，它们在随波坐标系中是一些冻结的空间周期结构，典型地见图 7-13(b). 如果不考虑左边最后一项，方程(8-10)的形式我们似曾相识，定态波解$\phi_0(\xi)$在其中起着类似薛定谔方程(2-32)中势阱$V(x)$的作用，因此扰动波$\delta\phi(\xi,\tau)$一定也会像量子波函数那样，被"势阱"所散射. 不过，薛定谔方程(2-32)中的势阱$V(x)$是人为引进的，而方程(8-10)中的"势阱"$\phi_0(\xi)$则是在公式推导中自然出现的，它本身就是方程(7-47)的一个解.

让我们再将方程(8-10)与非线性薛定谔方程(3-77)作一比较，非线性薛定谔方程中起势阱作用的是因子$|E(x,t)|^2$，它与方程(8-10)中$\phi_0(\xi)$一样，是非线性自组织的结果，以势阱的形式表现出来影响系统的运动，不过，非线性薛定谔方程中

势阱的形状随场变量 $E(x,t)$ 即时改变，就这一点来讲，可以说方程(8-10)与薛定谔方程(2-32)更具相似之处，它的势阱形状 $\phi_0(\xi)$ 不随时间改变.

利用薛定谔方程讨论量子力学问题时，常假设各种形状的势阱 $V(x)$，用以分析粒子受到的不同散射作用；在方程(8-10)中势阱 $\phi_0(\xi)$ 的形状随外部参数改变，它对扰动波的散射作用也随之改变，而扰动波 $\delta\phi(\xi,\tau)$ 的演化关系到定态波是否稳定以及出现什么样的不稳定性的问题.

虽然在导出方程(8-10)时并没有限定扰动波是小量，在对定态波 $\phi_0(\xi)$ 作稳定性分析时，仍需假设 $|\delta\phi|\ll|\phi_0|$，以便对扰动波作线性近似，此时方程(8-10)中关于扰动的非线性项 $f\delta\phi\dfrac{\partial}{\partial\xi}\delta\phi$ 与含 $\phi_0(\xi)$ 的项相比可以被忽略，余下的方程为

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left[1+a\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\right]\delta\phi^{\rm l}-\Omega\frac{\partial}{\partial\xi}\left[1+a\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\right]\delta\phi^{\rm l}+c\frac{\partial}{\partial\xi}\delta\phi^{\rm l}+\gamma\delta\phi^{\rm l}+f\frac{\partial}{\partial\xi}[\phi_0(\xi)\delta\phi^{\rm l}]=0, \tag{8-11}$$

上标 l 表示关于 $\delta\phi$ 作了线性近似. 需要强调的是，虽然方程(8-11)关于 $\delta\phi^{\rm l}$ 是线性的，系统(7-47)的非线性性质通过势阱 $\phi_0(\xi)$ 仍部分地保留在方程中.

先考虑 $\phi_0(\xi)\to0$ 的极限情形，此时式(8-11)蜕化为常系数的线性波动方程，若将扰动波展开为 $\delta\phi^{\rm l}(\xi,\tau)=\sum\limits_k\delta\phi_k{\rm e}^{\lambda_k^{\rm l}\tau-{\rm i}k\xi}$，那么这些模式都是独立运动的，满足下面的线性色散关系，

$$\lambda_k^{\rm l}=-\gamma/(1-ak^2)+{\rm i}k[c/(1-ak^2)-\Omega], \tag{8-12}$$

$\lambda_k^{\rm l}$ 的虚部给出了模式 $k$ 的线性本征频率 $k[c/(1-ak^2)-\Omega]$，实部 $-\gamma/(1-ak^2)$ 为其振幅的线性增长率，因 $a<0$ 和 $\gamma>0$，所有初始扰动模式都被阻尼. 其实式(8-12)就是在 $\varepsilon=f=0$ 时系统(7-47)的色散关系，只是在随波坐标系中观察，与在实验室坐标系中的本征频率(7-63)相比，模式 $k$ 的频率出现了多普勒移动 $k\Omega$，波数 $k$ 越高，移动越大.

利用方程(8-11)可以讨论扰动波 $\delta\phi^{\rm l}(x,t)$ 的色散行为随 $\phi_0(\xi)$ 幅度和形状改变而出现的非线性变化，它可以提供相应的定态波解 $\phi_0(\xi)$ 是否稳定的信息. 因为在给定 $\Omega$ 值时 $\phi_0(\xi)$ 的能量 $E_0$ 作为 $\varepsilon$ 的函数组织成滞后曲线，沿这些曲线进行分析是方便的. 同一条滞后曲线上的定态波解 $\phi_0(x-\Omega t)$ 有相同的群速度 $\Omega$，也就有相同的随波坐标系，只是在换到另一条滞后曲线时，坐标系才改变.

让我们将线性扰动波 $\delta\phi^{\rm l}(\xi,\tau)$ 也展开为傅里叶模式之和($2\pi$ 周期边界)

$$\delta\phi^{\rm l}(\xi,\tau)=\sum_{k=1}^{N}b_k^{\rm l}(\tau)\exp\{{\rm i}[k\xi+\alpha_k^{\rm l}(\tau)]\}+{\rm c.\,c.}, \tag{8-13}$$

这里模式振幅 $b_k^{\rm l}$ 和位相 $\alpha_k^{\rm l}$ 是实数. 上式中取了复共轭，以保证扰动波是实的，这相当于 $\phi_0(\xi)$ 受到来自 $\pm\xi$ 两个方向的扰动，见示意图 8-1. 如果 $\phi_0(\xi)$ 空间不对称，它

对来自不同方向扰动的散射作用不会相同.

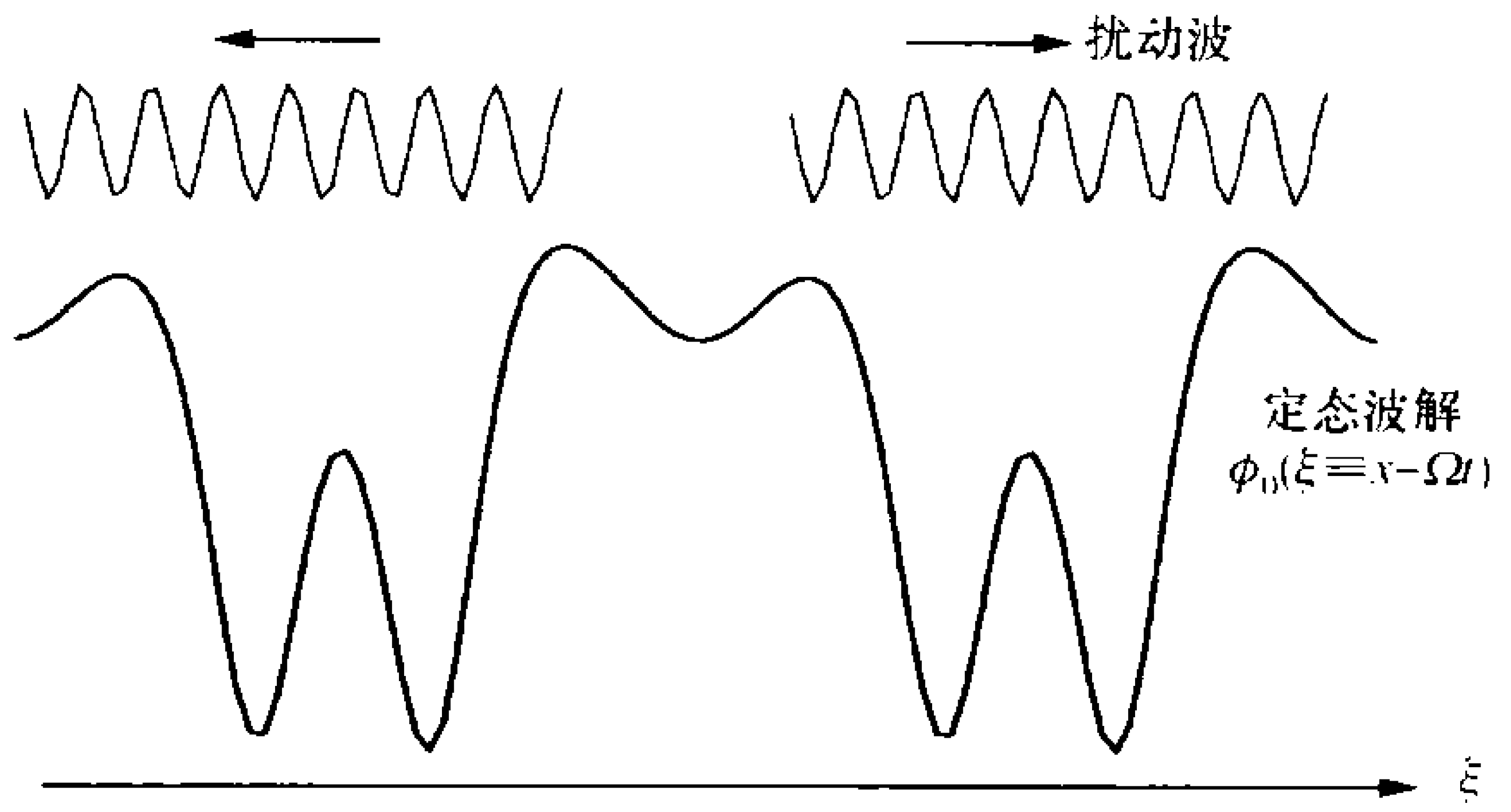



图 8-1 一个定态波解 $\phi_0(\xi)$可能受到来自前后两个方向扰动的示意图

将展开式(8-8)和(8-13)代入方程(8-11),得到一组关于扰动模式振幅和位相$\{b_k^1,\alpha_k^1\}$的演化方程如下

$$\frac{\mathrm{d}b_k^1}{\mathrm{d}\tau}=-\frac{\gamma}{1-ak^2}b_k^1+\frac{fk}{2(1-ak^2)}\left\{\sum_{i+j=k}A_ib_j^1\sin(\theta_i+\alpha_j^1-\alpha_k^1)\right.$$
$$\left.+\sum_{i-j=k}A_ib_j^1\sin(\theta_i-\alpha_j^1-\alpha_k^1)+\sum_{-i+j=k}A_ib_j^1\sin(-\theta_i+\alpha_j^1-\alpha_k^1)\right\},\quad(8\text{-}14\text{a})$$

$$\frac{\mathrm{d}\alpha_k^1}{\mathrm{d}\tau}=-k\left[\frac{c}{1-ak^2}-\Omega\right]-\frac{fk}{2(1-ak^2)b_k^1}\left\{\sum_{i+j=k}A_ib_j^1\cos(\theta_i+\alpha_j^1-\alpha_k^1)\right.$$
$$\left.+\sum_{i-j=k}A_ib_j^1\cos(\theta_i-\alpha_j^1-\alpha_k^1)+\sum_{-i+j=k}A_ib_j^1\cos(-\theta_i+\alpha_j^1-\alpha_k^1)\right\},\quad(8\text{-}14\text{b})$$

$$k=1,2,\cdots,N.$$

因为在扰动波模式$\{b_k^1,\alpha_k^1\}$与定态波模式$\{A_k,\theta_k\}$之间存在模-模耦合,方程组(8-14)中 $2N$ 个方程不能解耦. 从方程中的求和项可见,只要满足共振三波关系($i+j=k,-i+j=k,i-j=k$),定态波模式($A_i,\theta_i$)将把扰动模式($b_j^1,\alpha_j^1$)散射到相空间中扰动模式($b_k^1,\alpha_k^1$)的方向上去,在这个过程中定态波模式($A_i,\theta_i$)并没有发生改变. 即使初始时对不动点$\{A_k,\theta_k\}$的扰动沿某个特定方向,如只有 $b_{k=k_0}^1(\tau=0)\neq0$,由于$\{A_k,\theta_k\}$的散射作用,它也会散布到更宽的相空间范围. 因此,有限幅度定态波解 $\phi_0(\xi)$的存在将导致系统(7-47)的色散偏离其线性行为(8-12). 下面让我们寻找这个非线性色散关系.

虽然有 $\phi_0(\xi)$带来的非线性因素,方程(8-11)毕竟是关于 $\delta\phi^1(\xi)$的一个线性方程,可以讨论它的本征问题. 扰动波 $\delta\phi^1(\xi,\tau)$也受到空间周期(这里是 $2\pi$)边界条件的约束,它的模式只能取分立波数,现允许模式随时间演化,可假设

$$\delta\phi^1(\xi,\tau)=\mathrm{e}^{\lambda\tau}\sum_{k=1}^{N}b_k^1\cos(k\xi+\alpha_k^1).\quad(8\text{-}15)$$

扰动波的这个形式已为时间和空间的对称破缺预留了可能.

在讨论系统的本征问题时，将复模式投影到它的两个正交方向上是方便的. 其中定态波解 $\phi_0(\xi)$ 由一组复模式 $\{X_k+\mathrm{i}Y_k\}$ 表达，这里 $X_k\equiv A_k\cos\theta_k$，$Y_k\equiv A_k\sin\theta_k$，而扰动波 $\delta\phi^1(\xi,\tau)$ 由另一组复模式 $\{x_k+\mathrm{i}y_k\}$ 表达，这里 $x_k\equiv b_k^1\cos\alpha_k^1$，$y_k\equiv b_k^1\sin\alpha_k^1$.

经过繁复但直接的推导，从方程(8-14)可得到关于 $\{x_k,y_k\}$ 的一组齐次线性方程，写做下面的形式[219,201]

$$[\underline{\underline{H}}-\lambda\underline{\underline{I}}]\cdot\underline{v}=0, \tag{8-16}$$

这里，列矢量

$$\underline{v}=(x_1,y_1,x_2,y_2,\cdots,x_N,y_N)^{\mathrm{T}}, \tag{8-17}$$

$\underline{\underline{I}}$ 是 $2N\times2N$ 的单位矩阵，$\underline{\underline{H}}$ 的 $2N\times2N$ 个矩阵元如下①

对于 $m=n$，

$$H_{2n-1,2m-1}=-\frac{\gamma}{1-an^2}+\frac{fnY_{2n}}{2(1-an^2)}, \tag{8-18a}$$

$$H_{2n,2m}=-\frac{\gamma}{1-an^2}-\frac{fnY_{2n}}{2(1-an^2)}, \tag{8-18b}$$

$$H_{2n-1,2m}=n\left(\frac{c}{1-an^2}-\Omega\right)-\frac{fnX_{2n}}{2(1-an^2)}, \tag{8-18c}$$

$$H_{2n,2m-1}=-n\left(\frac{c}{1-an^2}-\Omega\right)-\frac{fnX_{2n}}{2(1-an^2)}; \tag{8-18d}$$

对于 $m>n$，

$$H_{2n-1,2m-1}=\frac{fn(-Y_{m-n}+Y_{m+n})}{2(1-an^2)}, \tag{8-19a}$$

$$H_{2n,2m}=-\frac{fn(Y_{m-n}+Y_{m+n})}{2(1-an^2)}, \tag{8-19b}$$

$$H_{2n-1,2m}=-\frac{fn(-X_{m+n}+X_{m-n})}{2(1-an^2)}, \tag{8-19c}$$

$$H_{2n,2m-1}=-\frac{fn(X_{m-n}+X_{m+n})}{2(1-an^2)}; \tag{8-19d}$$

对于 $m<n$，

$$H_{2n-1,2m-1}=\frac{fn(Y_{n-m}+Y_{n+m})}{2(1-an^2)}, \tag{8-20a}$$

$$H_{2n,2m}=\frac{fn(Y_{n-m}-Y_{n+m})}{2(1-an^2)}, \tag{8-20b}$$

① 在文[201]中给出的 $m<n$ 时的各矩阵元少计入了一项，由于这个原因，在文[201]、[220]和文[226]中计算的扰动波的本征行为在 $\epsilon$ 较大时有些偏差(不影响定性结果). 在文[219]和本书修正了这些矩阵元公式后得到的分岔线与数值模拟结果符合得非常好.

$$H_{2n-1,2m}=\frac{fn(X_{n-m}-X_{n-m})}{2(1-an^2)},\tag{8-20c}$$

$$H_{2n,2m-1}=-\frac{fn(X_{n-m}+X_{n+m})}{2(1-an^2)}.\tag{8-20d}$$

这里 $m,n=1,2,\cdots,N$. $\underline{\underline{H}}$ 的矩阵元依赖于定态波解 $\phi_0(\xi)$ 的模式 $\{X_k,Y_k\}$，因此在 $\phi_0(\xi)$ 的形状随参数变化时，矩阵 $\underline{\underline{H}}$ 对扰动波模式 $\{x_k,y_k\}$ 的散射性能也相应发生变化.

我们将方程(8-16)的形式显式地写出，以便更清楚地看到它的结构，

$$\begin{bmatrix} H_{11}-\lambda & H_{12} & H_{13} & H_{14} & \ddots & \ddots \\ H_{21} & H_{22}-\lambda & H_{23} & H_{24} & \ddots & \ddots \\ H_{31} & H_{32} & H_{33}-\lambda & H_{34} & \ddots & \ddots \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} & H_{44}-\lambda & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & H_{2N-1,2N-1}-\lambda & H_{2N-1,2N} \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & H_{2N,2N-1} & H_{2N,2N}-\lambda \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_N \\ y_N \end{bmatrix}=0.\tag{8-21}$$

矩阵 $\underline{\underline{H}}$ 的主对角线上排列着 $N$ 个二维子矩阵，其中第 $k$ 个子矩阵是

$$\begin{bmatrix} H_{2k-1,2k-1}-\lambda & H_{2k-1,2k} \\ H_{2k,2k-1} & H_{2k,2k}-\lambda \end{bmatrix},\tag{8-22}$$

$m\neq n$ 的非对角元也可划分成一些二维子矩阵，其中子矩阵

$$\begin{bmatrix} H_{2n-1,2m-1} & H_{2n-1,2m} \\ H_{2n,2m-1} & H_{2n,2m} \end{bmatrix}\tag{8-23}$$

起到了将扰动模式 $(x_m,y_m)$ 散射到模式 $(x_n,y_n)$ 上去的作用. 矩阵 $\underline{\underline{H}}$ 的这个形式，我们在第五章讨论耦合复振子系统时已经见过了.

当没有定态波激发即 $\{X_k,Y_k\}$ 都等于 0 时，非对角线上的子矩阵都将变为 0，只余下主对角线上的一些子矩阵，其中第 $k$ 个二维子矩阵完全决定了扰动波第 $k$ 个傅里叶模式 $(x_k,y_k)$ 的线性运动，它们不再被散射到相空间其他方向.

在有非零定态波解 $\phi_0(\xi)$ 存在时，扰动波 $\delta\phi_k^1(\xi,\tau)$ 的 $N$ 个傅里叶模式不能解耦，不过从线性代数我们知道，一个 $N$ 维相空间中的线性齐次代数方程组，必有 $N$ 个独立方向，对于这里讨论的复相空间，就有 $N$ 个独立的复方向. 从方程组(8-16)有非零解的条件，即它的系数行列式等于 0，得到系统(8-14)的本征方程为

$$|\underline{\underline{H}}-\lambda\underline{\underline{I}}|=0,\tag{8-24}$$

本征值 $\lambda$ 的解就决定了在有一定定态波 $\phi_0(\xi)$ 激发时，线性扰动波 $\delta\phi^1(\xi,\tau)$ 在相空

间中 $N$ 个独立复方向上的运动，因此本征方程(8-24)就是驱动-耗散非线性漂移波系统(7-47)的非线性色散关系. 与节 8.1.1 中的情形一样，这里的非线性色散关系也依赖于平衡态的状态，区别只在于，这里的平衡态 $\phi_0(\xi)$ 有空间结构，它可以在相空间中起到散射扰动波模式的作用.

让我们利用本征方程(8-24)讨论系统(7-47)色散行为的非线性变化，具体作法是，在给定参数$(\Omega,\varepsilon)$下，先从方程(7-52)解出定态波 $\phi_0(\xi)$ 的模式$\{A_k,\theta_k\}$，由此计算出散射矩阵 $\underline{\underline{H}}(\{A_k,\theta_k\})$，再将这个 $2N\times2N$ 维矩阵对角化，解出它的一组 $2N$ 个本征值. 对于给定 $\Omega$ 值，沿定态波能的滞后曲线 $E_0(\varepsilon)$ 重复这一过程，矩阵本征值的变化就反映了系统色散行为的非线性变化. 在下面的两小节中，用这个方法找到了定态波解 $\phi_0(\xi)$ 可能出现的两种重要失稳现象——鞍结点分岔和 Hopf 分岔[219,201,220].

## 8.2.2 定态波解的鞍结点不稳定性

先考虑 $2N\times2N$ 维实矩阵 $\underline{\underline{H}}(\phi_0)$有 $N$ 对复共轭本征值的一般情况，

$$\lambda_{\tilde{k}}=\gamma_{\tilde{k}}\pm i\omega_{\tilde{k}},\quad \tilde{k}=1,2,\cdots,N. \tag{8-25}$$

它们分别给出在定态波 $\phi_0(\xi)$散射下扰动波在相空间中 $N$ 个独立复方向上的本征行为，在下标 $k$ 上加了波浪号，以强调矩阵对角化后的本征方向 $\tilde{k}$ 不同于原来傅里叶模式 $k$ 在相空间中的方向，可理解这里 $\tilde{k}$ 是一种准模. $\lambda_{\tilde{k}}$ 的虚部$\pm\omega_{\tilde{k}}$ 是在 $\tilde{k}$ 方向上扰动的本征频率，它是在随波参照系$(\xi,\tau)$中观察的值，$\gamma_{\tilde{k}}$ 是在这个方向上扰动幅度的增长率. 如果所有本征值 $\lambda_{\tilde{k}}$ 都有 $\gamma_{\tilde{k}}<0$，就表明在相空间中 $N$ 个独立复方向上初始扰动的振幅都是衰减的，相应的定态波解 $\phi_0(\xi)$稳定；如果至少在一个 $\tilde{k}=\tilde{k}^*$ 方向上有 $\gamma_{\tilde{k}^*}>0$，那么在这个方向上对定态波解 $\phi_0(\xi)$扰动的幅度随时间增长，$\phi_0(\xi)$也就不稳定.

求解本征值时一般要对矩阵 $\underline{\underline{H}}(\{A_k,\theta_k\})$作对角化，如此得到的 $N$ 个复本征值 $\lambda_{\tilde{k}}(\tilde{k}=1,2,\cdots,N)$在计算机输出中是随机排列的，对它们进行恰当的排序有助于我们分析问题. 在 $\varepsilon=0$ 时没有定态波激发，本征矩阵 $\underline{\underline{H}}$ 只余下对角线上的 $N$ 个二维子矩阵，其中第 $k$ 个子矩阵就给出第 $k$ 个傅里叶模式的线性色散关系(8-12). 在 $\varepsilon\neq0$ 时，矩阵 $\underline{\underline{H}}$ 对角化后的本征方向 $\tilde{k}$ 将从傅里叶方向 $k$ 偏转，如果本征值随参数的变化是连续的，我们总可以沿滞后曲线 $E_0(\varepsilon)$小步长地改变参数，根据连续性来决定非线性本征值 $\lambda_{\tilde{k}}$ 与线性本征值 $\lambda_k$ 的对应关系. 研究表明，在某些参数点上本征值 $\lambda_{\tilde{k}}$ 可能出现不连续，幸运的是，在所讨论的系统中，不连续性或出现在 $\lambda_{\tilde{k}}$ 的实部，或出现在虚部，从未见有实部和虚部同时出现不连续性的，因此我们总可以从连续的虚部或连续的实部来决定本征值 $\lambda_{\tilde{k}}$ 的排序(至少在滞后曲线的下分支上可以作到这一点)，讨论它随参数从线性本征值 $\lambda_k$ 的非线性改变.

本征值的不连续性是一个非常重要的现象，在 $N$ 个准模 $\tilde{k}$ 中，通常只有少数特征准模出现本征值不连续的情况. 研究表明，本征值不连续性的出现与分岔发生之间有某种关联，本节介绍的就是与鞍结点分岔有关的一种本征值不连续现象[219,201].

图 8-2 中的本征值 $\lambda_{\tilde{k}}=\gamma_{\tilde{k}}\pm \mathrm{i}\omega_{\tilde{k}}$ 是沿图 7-7(a)中对应 $\Omega=0.52,0.54,0.56$ 的三条 S 形滞后曲线的下分支计算的，只画了准模 $\tilde{k}=2$ 的结果，因为在相应参数下它是唯一出现分岔的特征准模. 图 8-2(a)，(b)分别是准模振幅的增长率 $\gamma_{\tilde{k}=2}$ 和本征频率 $\pm\omega_{\tilde{k}=2}$，这里 $\gamma_{\tilde{k}}\equiv \mathrm{Re}(\lambda_{\tilde{k}})$，$\omega_{\tilde{k}}\equiv|\mathrm{Im}(\lambda_{\tilde{k}})|$. 由图 8-2(b)可见，本征频率有共轭的两个分支解，在 $\varepsilon=0$ 时它们与线性色散关系(8-12)给出的傅里叶模式 $k=2$ 的本征频率 $\omega_{k=2}$ 在绝对值上相等(在节 8.3 中我们将对此作进一步讨论)，此后随 $\varepsilon$ 逐渐改变. 将图 8-2 中的曲线与图 7-7 中相应参数下的滞后曲线比较可以发现，在接近 S 形滞后曲线下分支的末端处，图 8-2(b)中本征频率 $|\omega_{\tilde{k}=2}|$ 迅速下降，它的两个分支解 $\pm\omega_{\tilde{k}=2}$ 最后汇合到零；与此同时，图 8-2(a)中原本缓慢变化的 $\gamma_{\tilde{k}=2}<0$ 曲线突然分裂成两支，一支向下变得更负，另一支向上，当后者穿过 0 点时，扰动准模 $\tilde{k}=2$ 失稳.

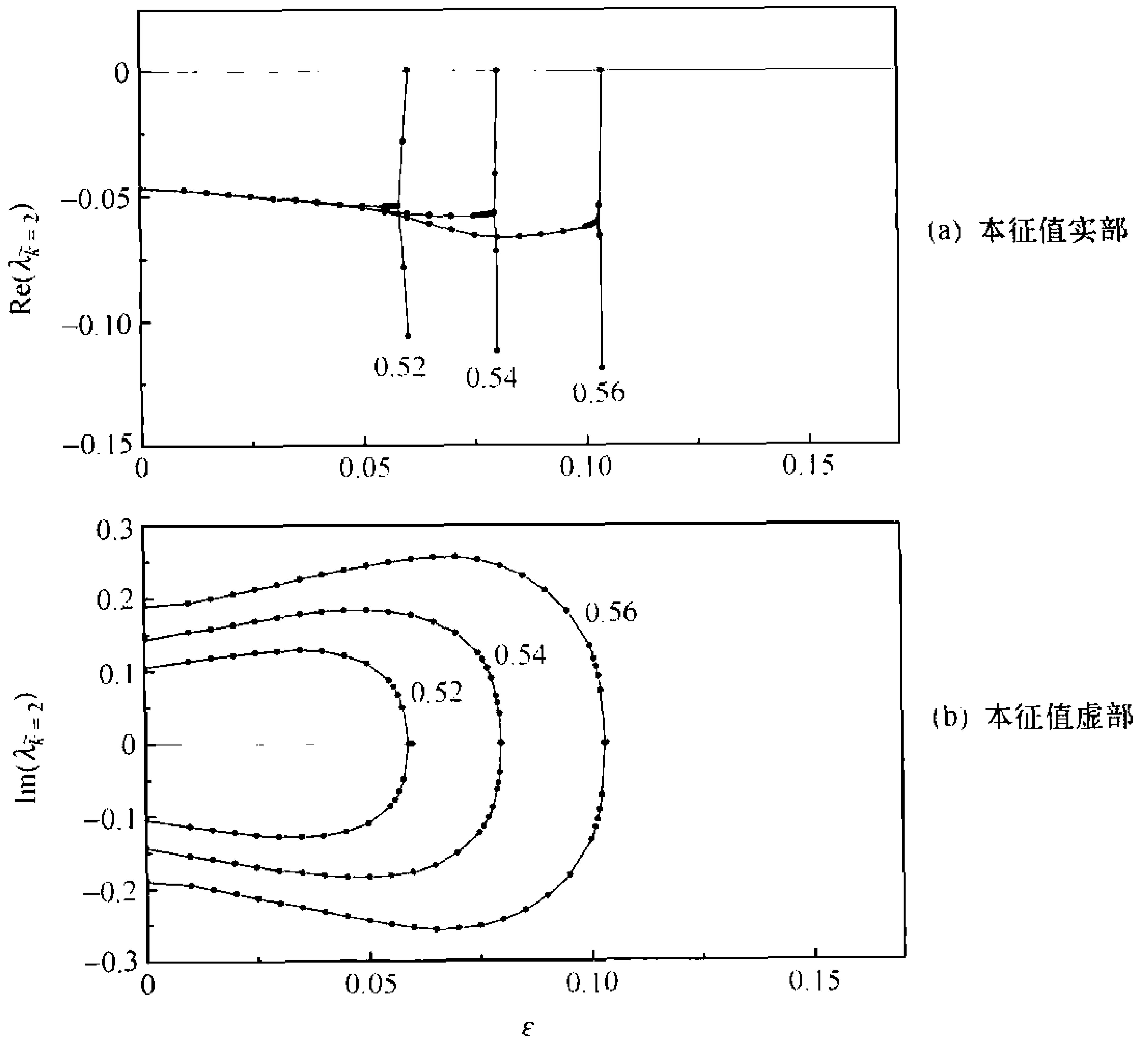
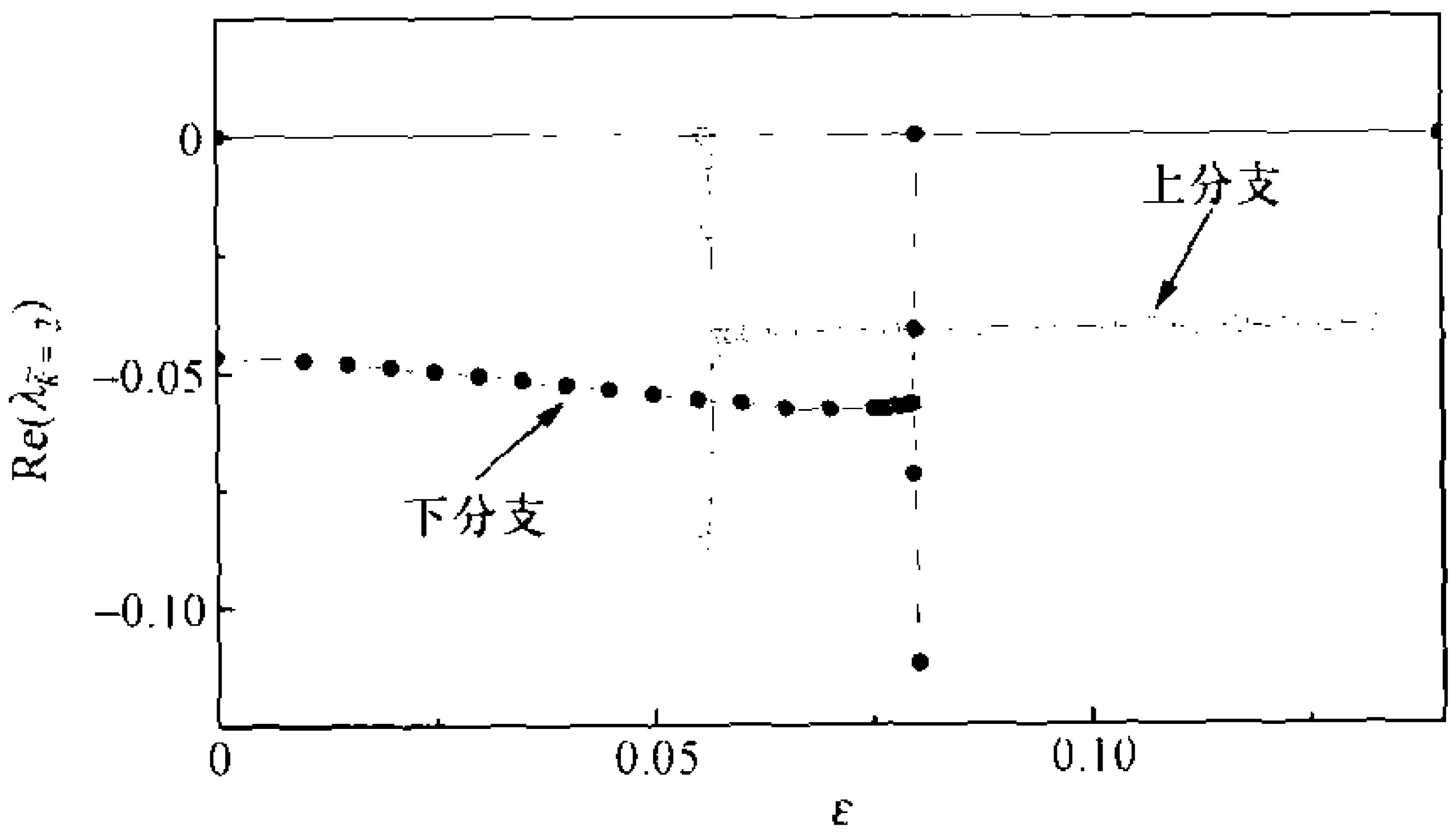



图 8-2 特征准模 $\tilde{k}=2$ 的本征值 $\lambda_{\tilde{k}=2}$ 随驱动波强度 $\varepsilon$ 的变化，$\Omega=0.52,0.54,0.56$

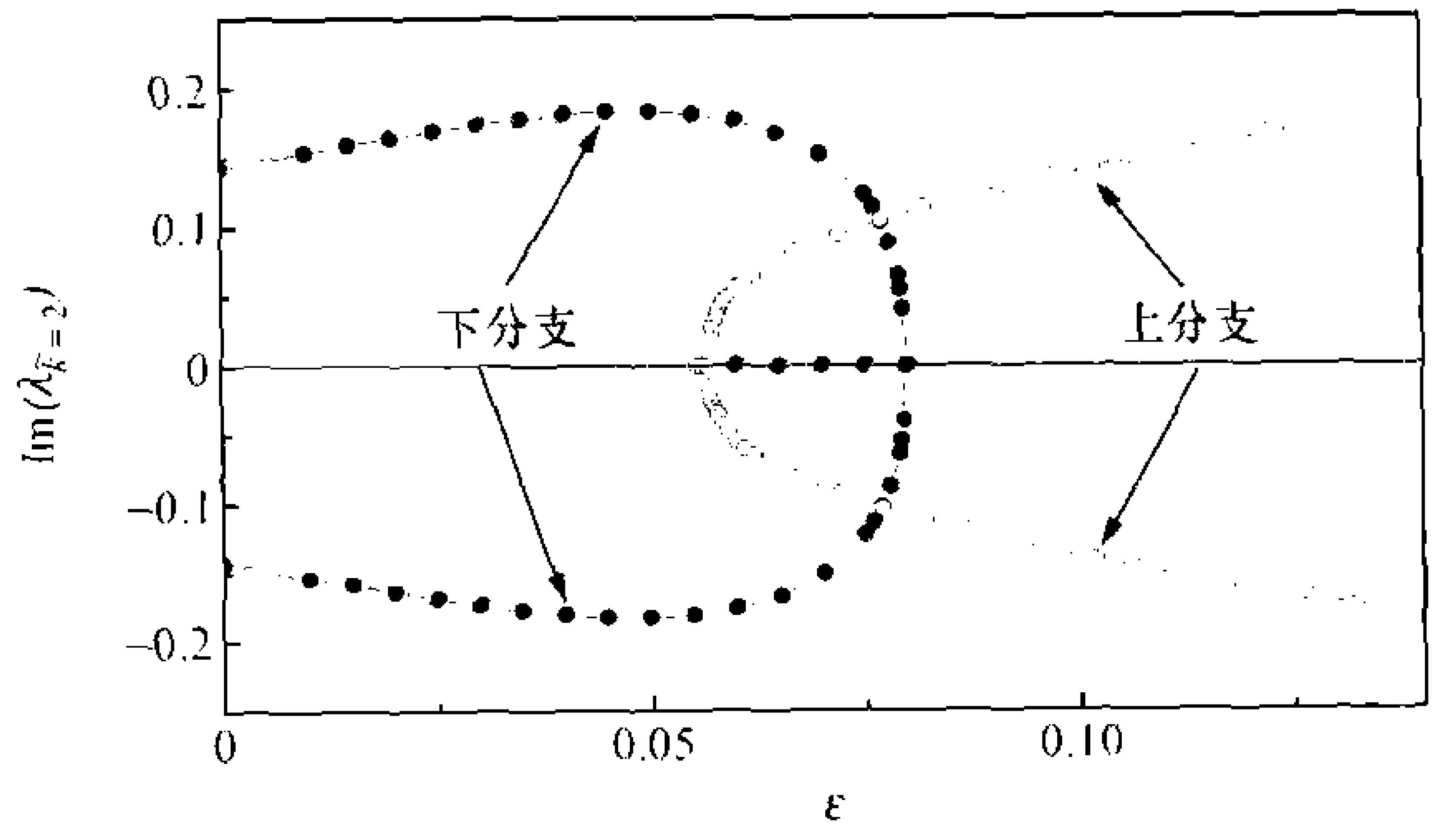
在第五章中我们曾用简单模型(5-9)说明，共轭虚本征值(本征频率)的两个分支汇聚到 0 与不动点出现鞍结点分岔相关，对比图 8-2，后者本征行为的突变也发

生在本征频率变为 0 时，与模型(5-9)不同的是这里有耗散，本征值是复数，在它的虚部变为 0 后，最初两个实本征值还都为负，只有当向上的分支穿过 0 点时准模 $\tilde{k}=2$ 才失稳. 这样，从图 8-2 可以得出结论，准模 $\tilde{k}=2$ 约在滞后曲线的末端处发生了鞍结点分岔，它与定态波的滞后跃迁密切相关.

计算表明，沿着图 7-7(a)中任一条 S 形滞后曲线的整个负斜率分支，准模 $\tilde{k}=2$ 的本征频率都保持为 0，只有到了滞后曲线的上分支，$\omega_{\tilde{k}=2}$才再度变成有限值. 图 8-3 给出沿 $\Omega=0.54$ 的整条滞后曲线计算的本征值 $\lambda_{\tilde{k}=2}$，(a)为实部 $\mathrm{Re}(\lambda_{\tilde{k}=2})$，图(b)为虚部 $\mathrm{Im}(\lambda_{\tilde{k}=2})$，其中“·”和“∘”分别表示沿滞后曲线下分支和上分支的计算结果. 在图(b)中的曲线上可见用“·”表示的本征频率 $\omega_{\tilde{k}=2}=0$ 的一段水平线，它对应滞后曲线负斜率分支上的那些定态波解 $\phi_0^*(\xi)$受到扰动时准模 $\tilde{k}=2$ 的本征频率；对比图 8-3 和图 7-7 还可以看到，在 S-形滞后曲线下拐点处本征值实部 $\gamma_{\tilde{k}=2}$曲线分裂成两支，向上的一支穿过 0 导致定态波出现鞍结点失稳，在滞后曲线的上拐点处 $\gamma_{\tilde{k}=2}$也分裂成两支，向下的一支对应鞍结点不稳定性的逆过程. 第七章中曾提到，滞后曲线负斜率分支上的波形 $\phi_0^*(\xi)$从未在数值模拟中实现过，现在知道，这是因为关于它们的扰动波有一个准模出现了鞍结点不稳定性的缘故.



(a) 本征值实部



(b) 本征值虚部

图 8-3　特征准模 $\tilde{k}=2$ 的本征值 $\lambda_{\tilde{k}=2}$随驱动强度 $\epsilon$ 的变化($\Omega=0.54$)

分析发现，对应每一簇S形滞后曲线的那些下分支，都存在一个特征方向 $\tilde{k}=\tilde{k}^*$，相应的准模在滞后曲线的末端出现鞍结点失稳. 例如，对应图 7-7(a)～(c)的三簇滞后曲线，鞍结点失稳的特征准模分别是 $\tilde{k}^*=2,3,4$，就像图 8-2 中的那样，在接近滞后曲线下分支的拐点时，特征方向上的本征频率 $\omega_{\tilde{k}^*}$ 的绝对值迅速降低，两个频率分支最终汇合到 0. 显然，特征准模的迅速软化预示着滞后现象的发生.

在图 7-18 上已经看到，S-形滞后曲线的负斜率分支占据的参数区构成了从线性共振点

$$\Omega^*(k) = c/(1-ak^2) \tag{8-26}$$

伸出的一条条舌头，在随波运动坐标系中来看，共振点 $\Omega^*(k)$ 正是傅里叶模式 $k=2,3,4,\cdots$ 的本征频率为 0 的点；结合上面的结果我们知道，图 7-18 中的舌区就是从横轴上线性共振点 $\Omega^*(k)$ 分别伸出的特征准模 $\tilde{k}^*=2,3,4,\cdots$ 的本征频率为 0 的参数区，随驱动强度 $\varepsilon$ 的增加，每一个线性共振点都扩展成了一条特征准模的本征频率为 0 的舌区.

在随波坐标系($\xi=x-\Omega t,\tau=t$)中的 0 频率，在实验室坐标系中就等于驱动频率 $\Omega$，所以特征准模的鞍结点分岔实际上就是外驱动波与介质内部的这个特征准模发生的一种非线性共振. 线性共振只发生在个别参数点上，非线性共振则扩展成为参数区中的一个共振带，如图 7-18 中看到的舌区，在滞后曲线的整个负斜率分支上都发生了这种共振. 由此可见，非线性介质能够在很宽的参数范围内与同一外驱动频率/相速度发生共振.

图 8-4 中画出了 $\Omega=0.56$ 时准模 $\tilde{k}=1\sim5$ 的本征频率随 $\varepsilon$ 的变化，在解得的两个共轭分支 $\pm\omega_{\tilde{k}}$ 中，只保留了与线性色散关系(8-12)接轨的那一支. 在图中的参数下，准模 $\tilde{k}=1$ 的本征频率始终为正，准模 $\tilde{k}=3,4,5,\cdots$ 的本征频率始终为负，而准模 $\tilde{k}=2$ 的本征频率则随 $\varepsilon$ 增加从负值变到 0.

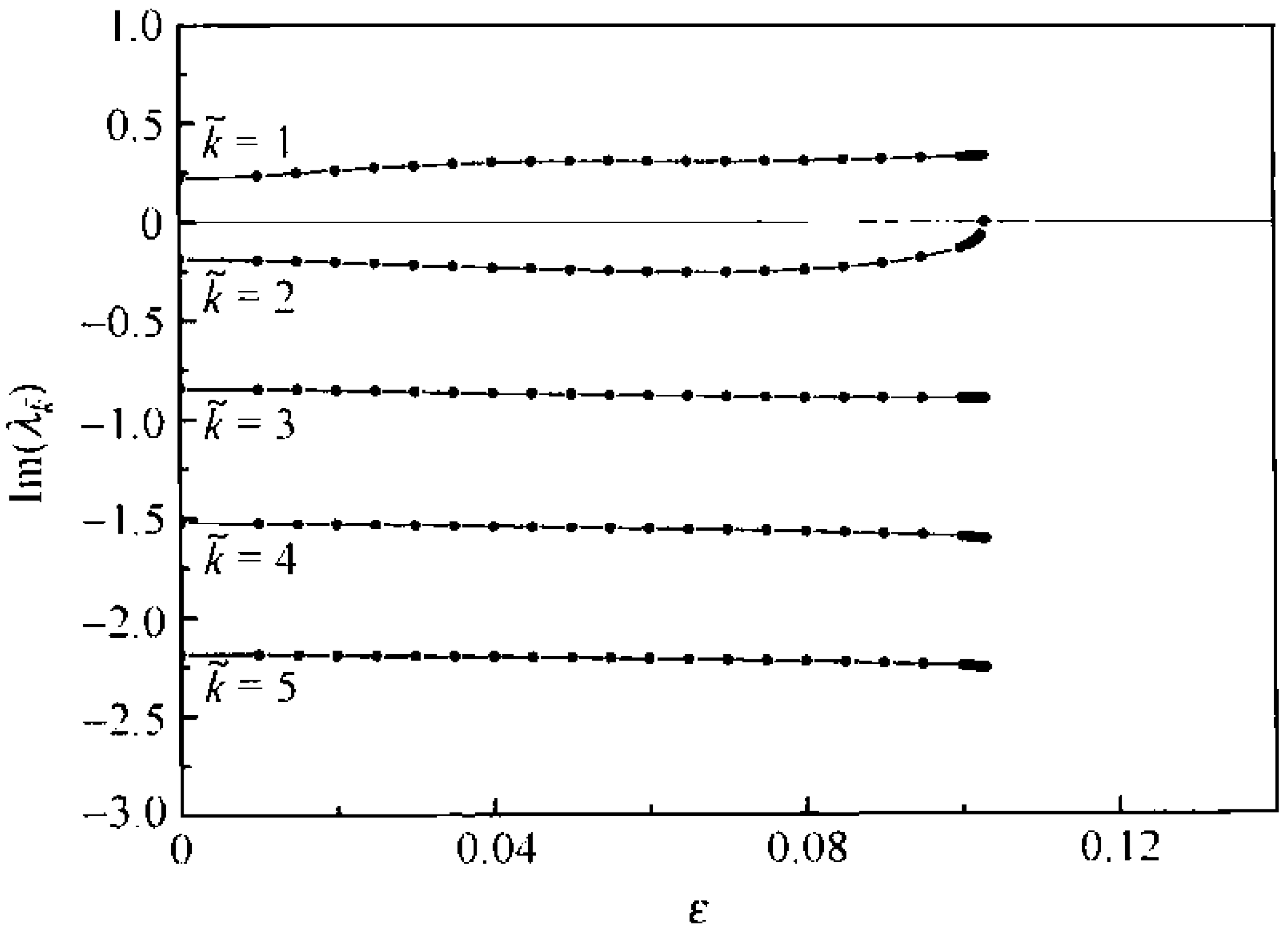



图 8-4 准模 $\tilde{k}=1\sim5$ 的本征频率随 $\varepsilon$ 的变化($\Omega=0.56$)

事实上，与图 7-7(a)中那簇滞后曲线的下分支对应，出现鞍结点分岔的特征准模都是 $\tilde{k}^*=2$，它的本征频率 $\omega_{\tilde{k}=2}$ 随 $\epsilon$ 增加在滞后曲线下分支的末端变为 0；另一方面，与图 7-7(b)，(c)中的那两簇滞后曲线对应，出现鞍结点分岔的特征准模分别是 $\tilde{k}^*=3$ 和 $\tilde{k}^*=4$，它们的本征频率 $\omega_{\tilde{k}=3}$ 和 $\omega_{\tilde{k}=4}$ 随 $\epsilon$ 增加在相应滞后曲线下分支末端也分别变为 0. 如果作类似于图 8-4 那样的图[即只保留与线性色散关系(8-12)接轨的频率分支]，那么特征准模就成为一个分界，波数比它小的准模的本征频率 $\omega_{\tilde{k}<\tilde{k}^*}$ 始终保持为正，而波数比它大的准模的本征频率 $\omega_{\tilde{k}>\tilde{k}^*}$ 始终保持为负. 随着 $\Omega\to 0$，特征准模 $\tilde{k}^*$ 越来越向高 $\tilde{k}$ 移动，外驱动 $\Omega$ 将依次与越来越高波数的准模 $\tilde{k}=\tilde{k}^*$ 发生非线性共振，引起它们出现鞍结点分岔，以及一簇簇滞后曲线.

用上面同样的方法，也可以计算周期驱动的 KdV 方程模型(7-54)中的多级滞后曲线上定态波解对扰动的本征响应，结果提示，很可能滞后的每一级台阶都对应一个发生鞍结点分岔的特征准模，如从图 7-11 中最低级台阶开始，与外驱动发生非线性共振的特征准模分别是 $\tilde{k}^*=2,3,4,\cdots$. 这个结论在较低级的台阶上容易被确认，随滞后台阶的升高，准模 $\tilde{k}$ 与傅里叶模式 $k$ 偏离越来越大，难以对计算机输出的本征值排序，上面的说法只能看做是对已有结果的一个合理外推.

从这些结果知道，对定态波扰动的某个特征准模的本征频率变为 0，还有鞍结点分岔以及波能的滞后，这三个现象之间存在关联，它们都是外驱动与系统内部自由度发生非线性共振的表现. 其中，滞后曲线负斜率分支上的定态波解 $\phi_0^*(\xi)$ 不能实现与对其扰动的特征准模本征频率变为 0 这二者之间的关联这一点特别值得关注，在后面的章节我们将看到，这些定态波解虽不能实现，却在系统的运动状态向湍流转变的过程中起了关键作用.

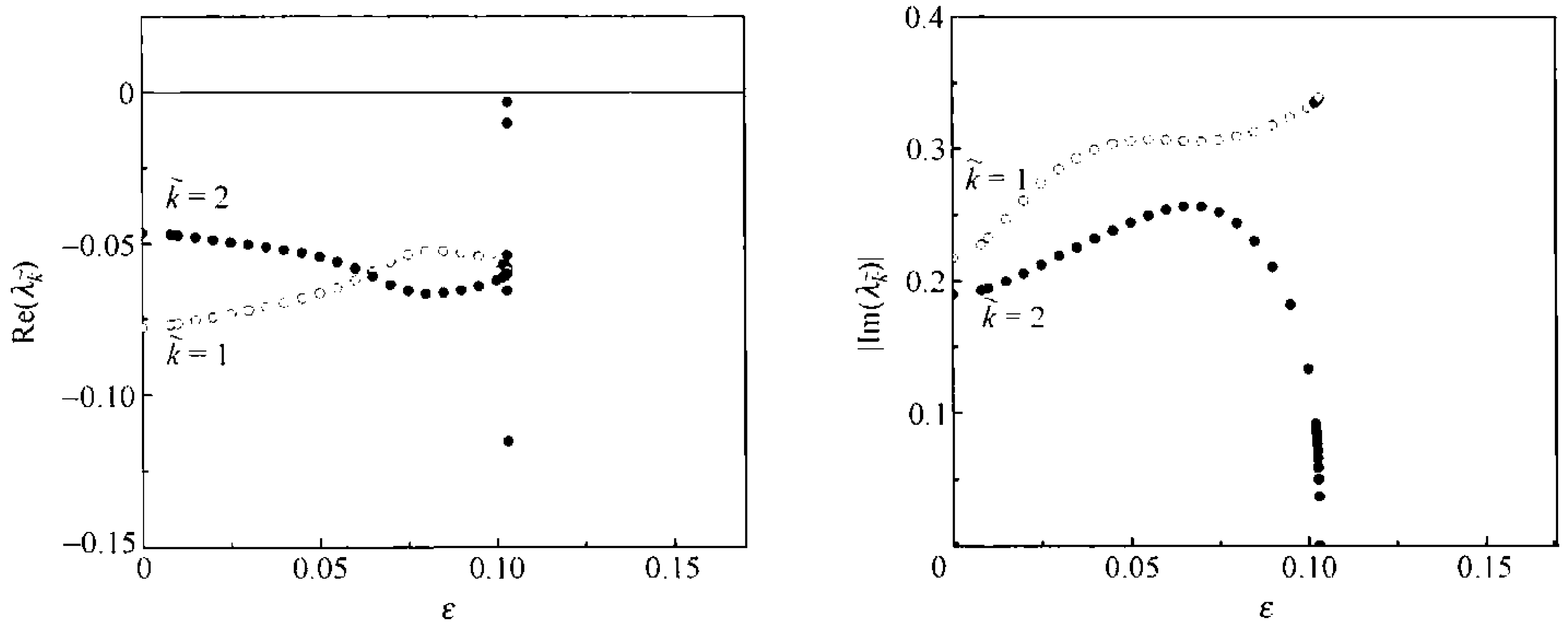
### 8.2.3　定态波解的 Hopf 不稳定性

定态波解还可能因 Hopf 不稳定性出现失稳，分岔也发生在某个特征准模上，与鞍结点分岔不同的是，这里特征准模的本征频率在分岔前后都为有限大小，如果本征值的实部小于 0，这个频率不会显现出来，当实部变得大于 0 时，初始扰动的幅度就会以这个频率振荡地指数增长，Hopf 不稳定性发生. 在这个意义上我们说，特征准模的 Hopf 不稳定性在系统中引入了一个新的频率. 可以说明，像图 7-14 中那样周期振荡的渐近波能 $E(t)$ 正是 Hopf 失稳引起的，$E(t)$ 的振荡频率就位于 Hopf 不稳定准模的本征频率附近.

定态波解的这两种分岔行为在动力学机制上有很大差别，前一小节已经说明，鞍结点分岔是外驱动波与系统内部一个自由度之间发生非线性共振引起的，它只涉及一个扰动准模；下面我们将看到，定态波解的 Hopf 分岔与系统中两个内部自由度之间出现非线性共振有关，因此分岔过程实际上牵涉了一对扰动准模[220]. 为

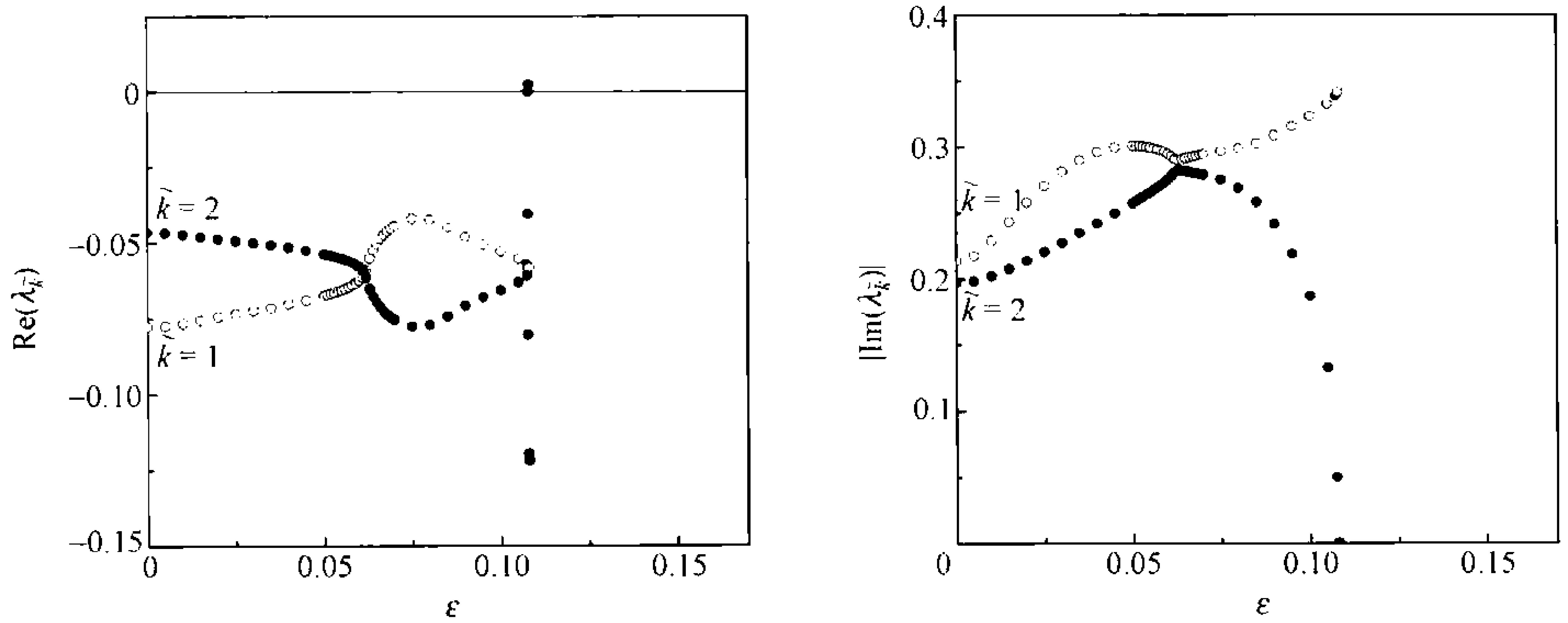
了看清一个定态波解如何发生 Hopf 分岔，我们需要在二维参数平面$(\Omega,\varepsilon)$上计算各扰动准模的本征值，再寻找出与 Hopf 失稳相关的一对准模. 例如，在 $\Omega=0.52\sim0.65$ 这个范围内，对每一个给定的 $\Omega$ 值，沿相应滞后曲线下分支计算所有扰动准模的本征值随 $\varepsilon$ 的变化，这时会发现，$\tilde{k}=1$ 和 $\tilde{k}=2$ 是一对出现共振的准模，在 Hopf 分岔中失稳的频率正是它们的共振频率.

图 8-5 至图 8-8 画出了在几个典型 $\Omega$ 参数下一对特征准模 $\tilde{k}=1,2$ 的本征值随 $\varepsilon$ 的变化，“∘”和“・”分别表示 $\tilde{k}=1$ 和 $\tilde{k}=2$，计算沿着图 7-7(a)中相应滞后曲线的下分支进行. 图 8-5 至图 8-8 中，图(a)是本征值的实部 $\mathrm{Re}(\lambda_{\tilde{k}=1,2})$，图(b)是本征值虚部的绝对值$|\mathrm{Im}(\lambda_{\tilde{k}=1,2})|$. 现在让我们将这几个图放在一起观察.




(a) 本征值实部　　　　(b) 本征值虚部的绝对值

图 8-5　准模 $\tilde{k}=1,2$ 的本征值 $\lambda_{\tilde{k}}$ 随 $\varepsilon$ 的变化($\Omega=0.56$)




(a) 本征值实部　　　　(b) 本征值虚部的绝对值

图 8-6　准模 $\tilde{k}=1,2$ 的本征值随 $\varepsilon$ 的变化($\Omega=0.5638$)

图 8-5($\Omega=0.56$)(a)中实部 $\mathrm{Re}(\lambda_{\tilde{k}=1,2})(\varepsilon)$的两条曲线交叉，有一个简并点；(b)中虚部$|\mathrm{Im}(\lambda_{\tilde{k}=1,2})|(\varepsilon)$没有简并. 图 8-6($\Omega=0.5638$)(a)中实部 $\mathrm{Re}(\lambda_{\tilde{k}=1,2})(\varepsilon)$

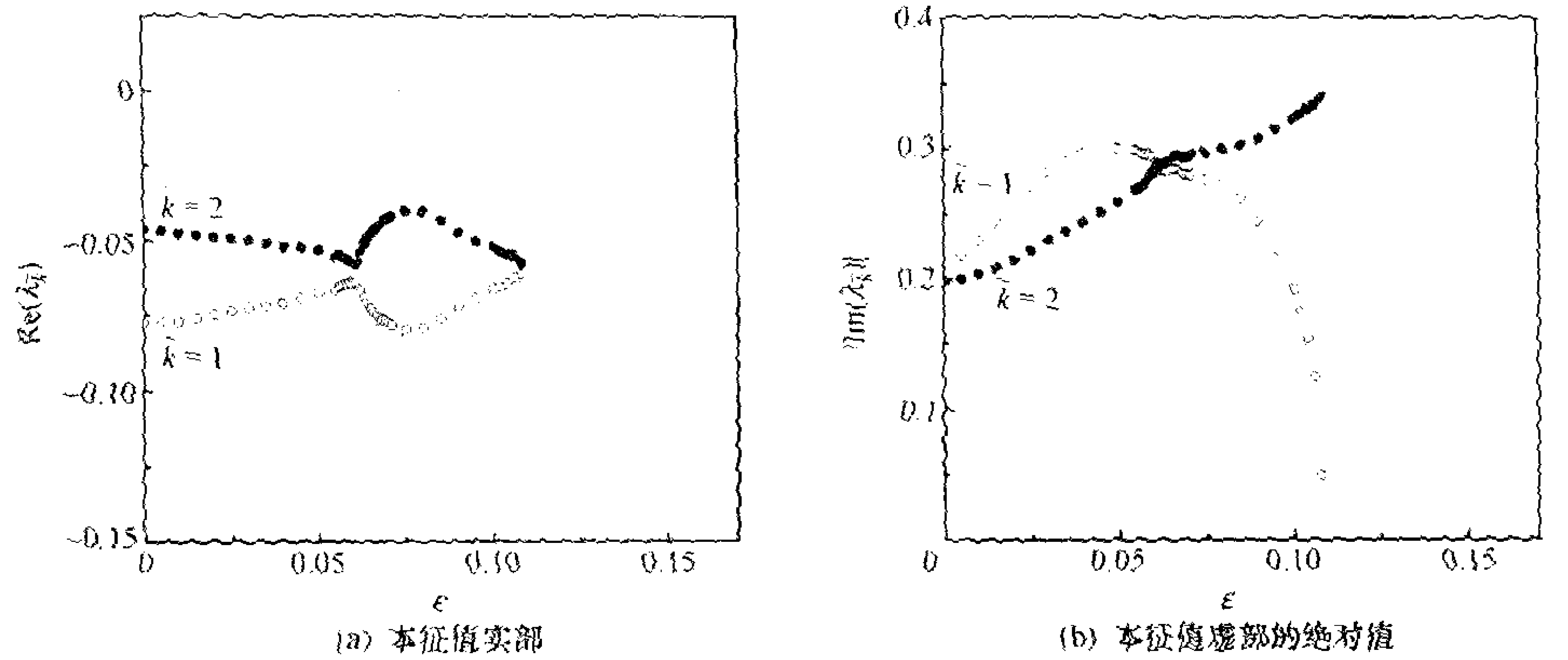



图 8-7 准模 $\tilde{k}=1,2$ 的本征值随 $\varepsilon$ 的变化，$\Omega=0.5642$

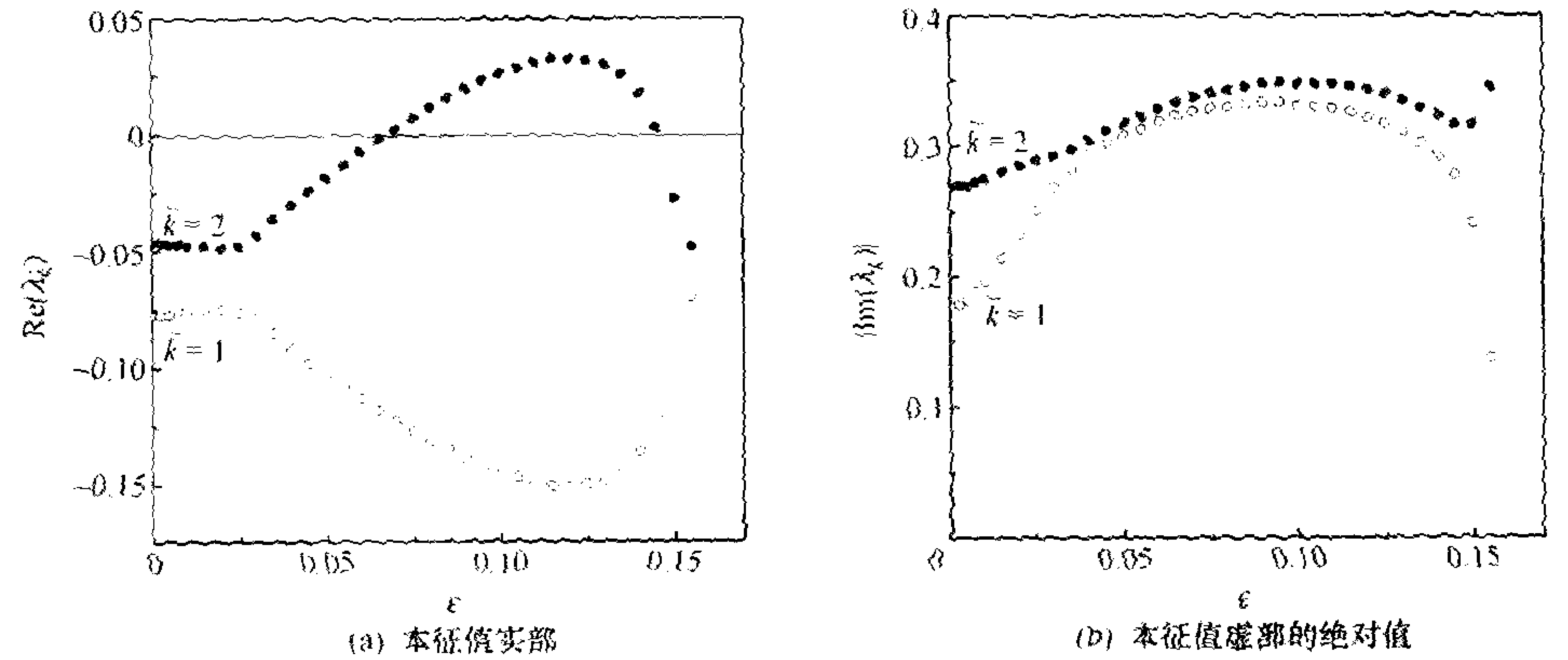



图 8-8 准模 $\tilde{k}=1,2$ 的本征值随 $\varepsilon$ 的变化（$\Omega=0.60$）

两条曲线在简并点附近纵向拉伸，在实部简并的参数附近；(b)中虚部 $|\mathrm{Im}(\lambda_{\tilde{k}=1,2})|(\varepsilon)$ 曲线分别形成 V 形和 Λ 形的尖角，几乎对接.

图 8-7 中驱动相速度增加到 $\Omega=0.5642$、图(a)中两条实部曲线 $\mathrm{Re}(\lambda_{\tilde{k}=1,2})(\varepsilon)$ 在原来的简并点处断开，形成 V 形和 Λ 形的两个尖角，表明实部曲线发生了重联，原来在简并点处曲线从左下(上)延伸到右上(下)，现在变成左下(上)与右下(上)分支连接；与此同时、图(b)中虚部 $|\mathrm{Im}(\lambda_{\tilde{k}=1,2})|(\varepsilon)$ 曲线的两个尖角反而出现对接，形成了一个简并点；根据重联后实部曲线的连续性，可知虚部曲线在尖角对接后也发生了重联，重联前在图 8-5(b)中是准模 $\tilde{k}=2$ 的本征频率随 $\varepsilon$ 增加连续地变化到 0，重联后在图 8-7(b)中却是 $\tilde{k}=1$ 的本征频率连续地变化到 0.

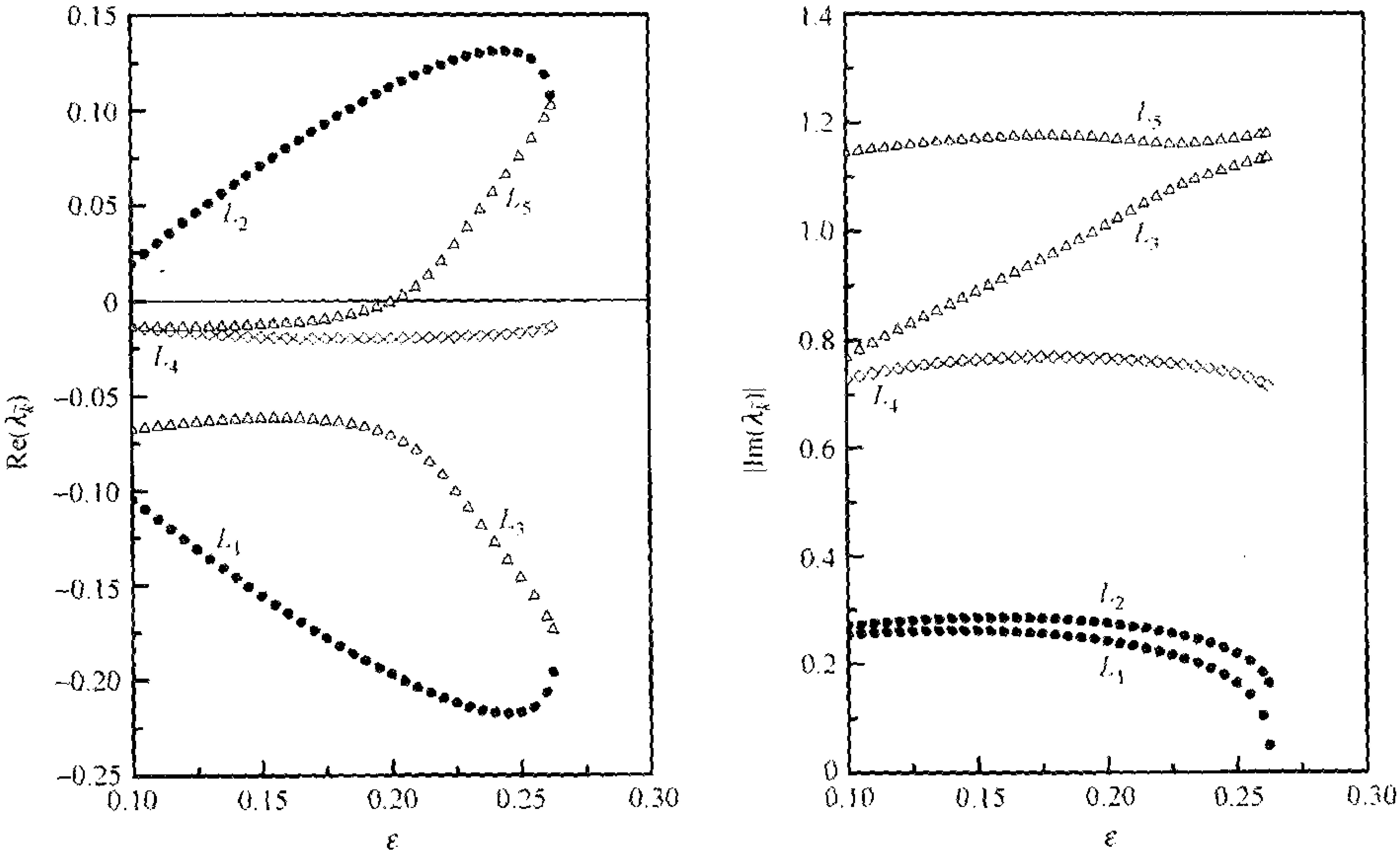
此后，随着 $\Omega$ 值继续增加，在重联点附近两条实部曲线相互排开，两条虚部曲线则在很宽的参数范围内几乎锁在一起变化(锁频). 图 8-8($\Omega=0.60$)是重联后一个典型例子，图(a)中准模 $\tilde{k}=2$ 的实部曲线形成了驼峰，并已在很宽 $\varepsilon$ 范围内跨过

$Re(\lambda_{\tilde{k}})=0$ 轴，有 $Re(\lambda_{\tilde{k}=2})>0$；在 $Re(\lambda_{\tilde{k}=2})(\varepsilon)$ 曲线出现驼峰的同时，$Re(\lambda_{\tilde{k}=1})(\varepsilon)$ 曲线出现凹陷，这说明准模 $\tilde{k}=2$ 的失稳以准模 $\tilde{k}=1$ 被强烈阻尼为代价；在实部曲线出现驼峰的参数范围内，图(b)中两条虚部曲线 $|Im(\lambda_{\tilde{k}=1,2})|(\varepsilon)$ 表现出“回避交叉”(avoided crossing)的特点，几近锁频.

上面这些结果说明，在图 8-8 中发生的 Hopf 分岔，是一对特征准模 $\tilde{k}=1,2$ 之间出现共振引起的，失稳准模的本征频率出现在波动中. 在第九章中图 9-5 给出了数值模拟方程(7-47)得到的波动谱($\Omega=0.60$，$\varepsilon=0.0675$)，其中(a)$E(t)$周期振荡的波能谱中基频 $\omega_E$ 就约等于图 8-8(a)中相应参数下两个共振准模的锁频频率，说明波能的周期振荡的确是失稳定态波的 Hopf 分岔频率显现出来的结果. 因为本征值分析是在运动坐标系中进行的，如果在实验室坐标系中的固定空间点测量波动 $\phi(x_0,t)$ 的频谱 $\phi(\omega)$，它的形态表现得要复杂一些，参考第九章中图 9-5(b)，由于多普勒移动，波谱中出现了驱动频率 $\Omega$ 的各谐波以及它们与 Hopf 失稳频率 $\omega_E$ 之间的拍频，$n\Omega\pm m\omega_E$.

此外，在图 8-8 中看到，Hopf 不稳定性由失稳准模本征值实部曲线的驼峰跨越 0 线引起，这一结果解释了数值模拟中观察到的波能随 $\varepsilon$ 增加先出现周期振荡而后又稳定化的现象(参考图 7-15).

在另外的参数区，还观察到系统(7-47)有多对准模的本征频率出现共振的现象. 图 8-9 给出 $\Omega=0.34$ 时 5 个低频准模的本征值作为 $\varepsilon$ 的函数，图(a)是实部 $Re(\lambda_{\tilde{k}})$，图(b)是虚部的绝对值 $|Im(\lambda_{\tilde{k}})|$，因为相应的定态波能位于滞后曲线上分




(a) 本征值实部　　　　　　　　(b) 本征值虚部的绝对值

图 8-9　5 个低频准模的本征值 $\lambda_{\tilde{k}}$ 随 $\varepsilon$ 的变化($\Omega=0.34$)

支，很难根据本征值的连续性将准模 $\tilde{k}$ 与傅里叶模式 $k$ 对应，图(a)和图(b)中标有同样 $L_k(k=1\sim5)$ 的曲线只表示它们属于同一个复本征值. 在图上观察到有两对准模发生了共振，它们分别是 $L_1$ 和 $L_2$，以及 $L_3$ 和 $L_5$，这可以从它们的虚部曲线的锁频回避交叉和实部曲线相互排开得到证实. 由于实部排开的结果，图(a)中 $L_2$ 和 $L_5$ 有形成驼峰的趋势，并在一定参数范围变得大于 0，这说明准模 $L_1$ 和 $L_2$ 共振以及准模 $L_3$ 和 $L_5$ 共振分别都引起了 Hopf 不稳定性. 当两个 Hopf 失稳同时发生时，它们的锁频频率都将显现在波动中，系统的时空演化更加复杂多变. 在 $\varepsilon\approx0.265$ 时，这两对共振准模引起的 Hopf 不稳定性被一次鞍结点分岔所打断，这一点可从图 8-9(b)中准模 $L_1$ 的频率曲线随 $\varepsilon$ 增加最终趋于 0 看出来，定态波在这里发生滞后跃迁.

图 8-10 将本征分析的结果与数值模拟得到的分岔线作了比较. 用赝谱方法模拟非线性波方程(7-47)得到的从定态波能滞后曲线的下(上)分支跃迁到上(下)分支的临界位置随参数$(\Omega,\varepsilon)$的变化在图中标记为 $\varepsilon_h(\varepsilon_l)$，定态波能转变为周期振荡的临界线标记为 $\varepsilon^*$；由本征分析得到的特征准模出现鞍结点分岔和 Hopf 分岔(以及逆 Hopf 分岔)的临界位置分别用“ ”和“ ”标记，它们与数值模拟得到的分岔位置符合得非常好. 这说明滞后跃迁和波能向周期运动的转变的确分别是由特征准模的鞍结点分岔和 Hopf 分岔引起的.

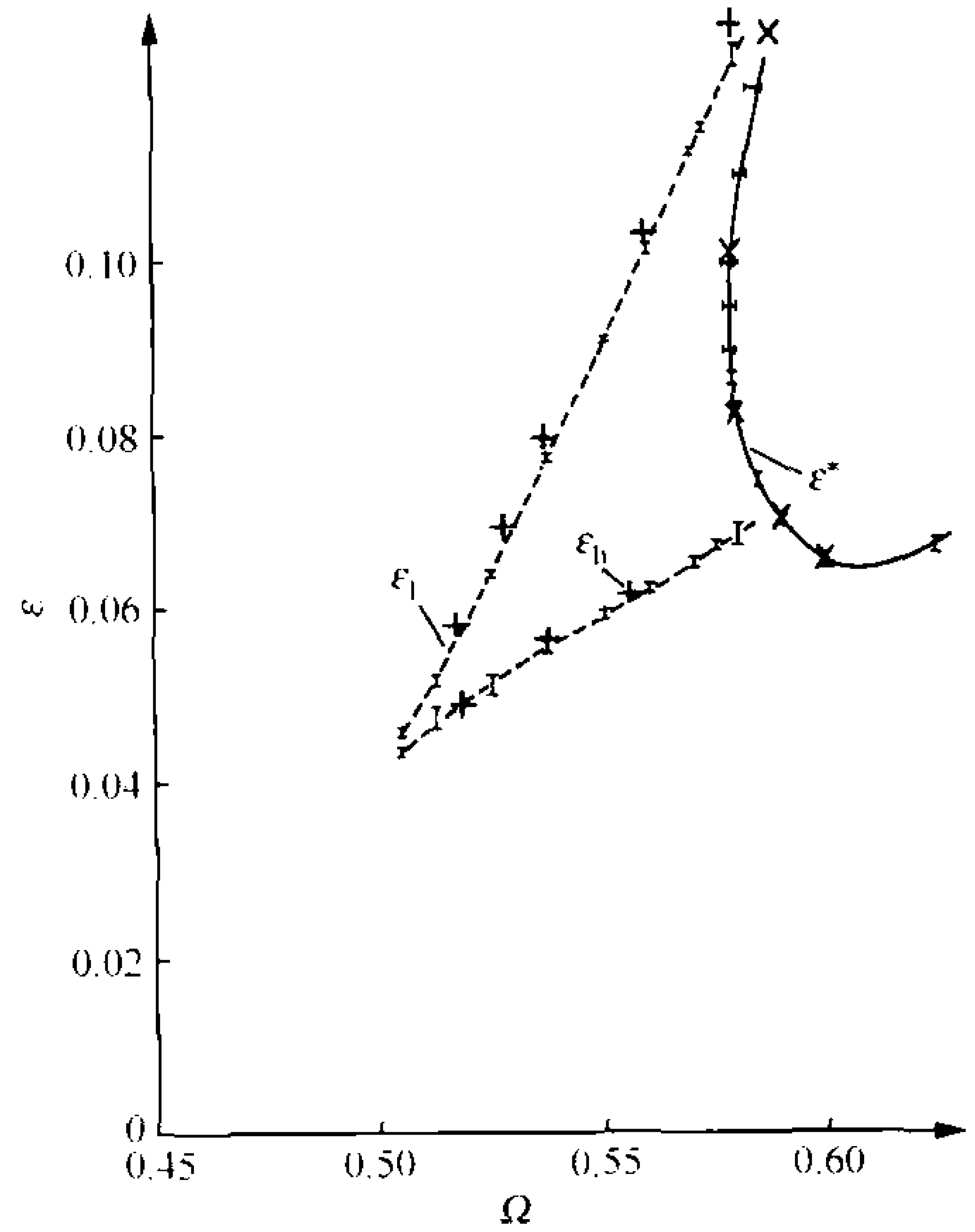
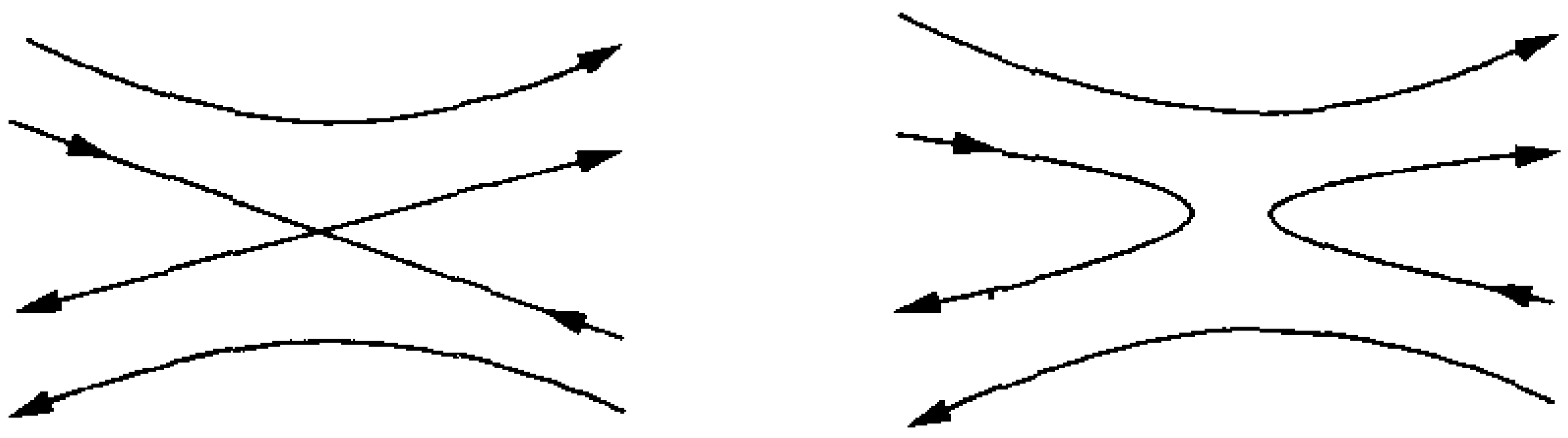



图 8-10 本征值分析与数值模拟得到的定态波失稳的临界参数的比较，对应图 7-7(a)中最大的那簇滞后曲线

前面提到，在出现 Hopf 分岔之前，共振准模的本征值在参数空间发生过重

联，这里我们借用了磁流体力学(MHD)中磁力线重联(magnetic reconnection)[59]这一术语. 磁重联是在有限电阻磁流体中一个非常重要的现象，假设初始时电流层两边磁力线方向相反，如果磁流体是理想的，磁力线会冻结在等离子体中，等离子体运动时磁场拓扑保持不变，而如果等离子体电阻为有限大小，磁力线就可相对于等离子体滑动，并可能出现断裂，断裂后一对极性相反的磁力线相互连接，这就是所谓的磁重联，见示意图 8-11. 在重联点上磁力线发生简并，磁场强度变为 0，磁场拓扑出现了奇异性. 天体和空间等离子体中很多突然发生的巨大能量释放现象都与磁重联有关，例如地球上的极光、太阳耀斑的爆发等. 在太阳耀斑爆发中，大量日冕物质顷刻间被抛射出来. 作为对比我们看到，本小节中非线性引起的扰动波本征值在参数空间中的奇异性也表现为重联现象，并且重联后系统的自由能通过 Hopf 不稳定性被释放出来.



(a) 重联前　　　　(b) 重联后

图 8-11　磁力线重联的示意图

为理解特征准模本征频率出现的回避交叉现象，图 8-12 画出了两个对接的圆锥，若平行于纵轴作一个截面，只要不通过简并点，截面与两个圆锥的交线就是回避交叉的.

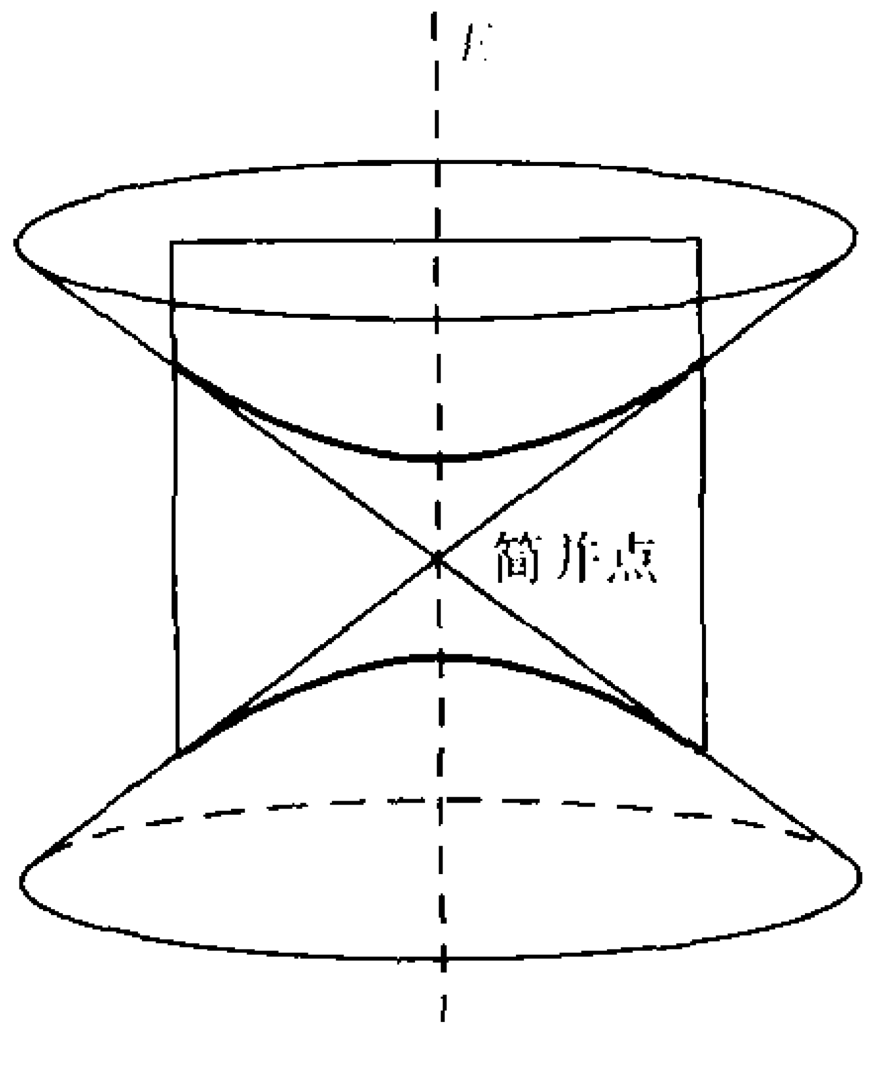



图 8-12　在顶点处对接的两个圆锥与平行于纵轴截面的两条交线是回避交叉的

量子混沌研究表明，可积系统的能级出现的是简并交叉，不可积系统的能级则是回避交叉的，能级回避交叉被认为是量子混沌的一个重要标志[119,221~224]. 典型例子是有台球场(stadium billiard)边界的二维不可积量子系统和在外加垂直磁场下薄导电碟中的非相互作用电子系统，台球场和导电碟形状的改变都可以将系统

从可积变为不可积.图 8-13 是数值计算得到的台球场不可积量子系统的能级图,图中可见大量的能级回避交叉现象[225,221～224].

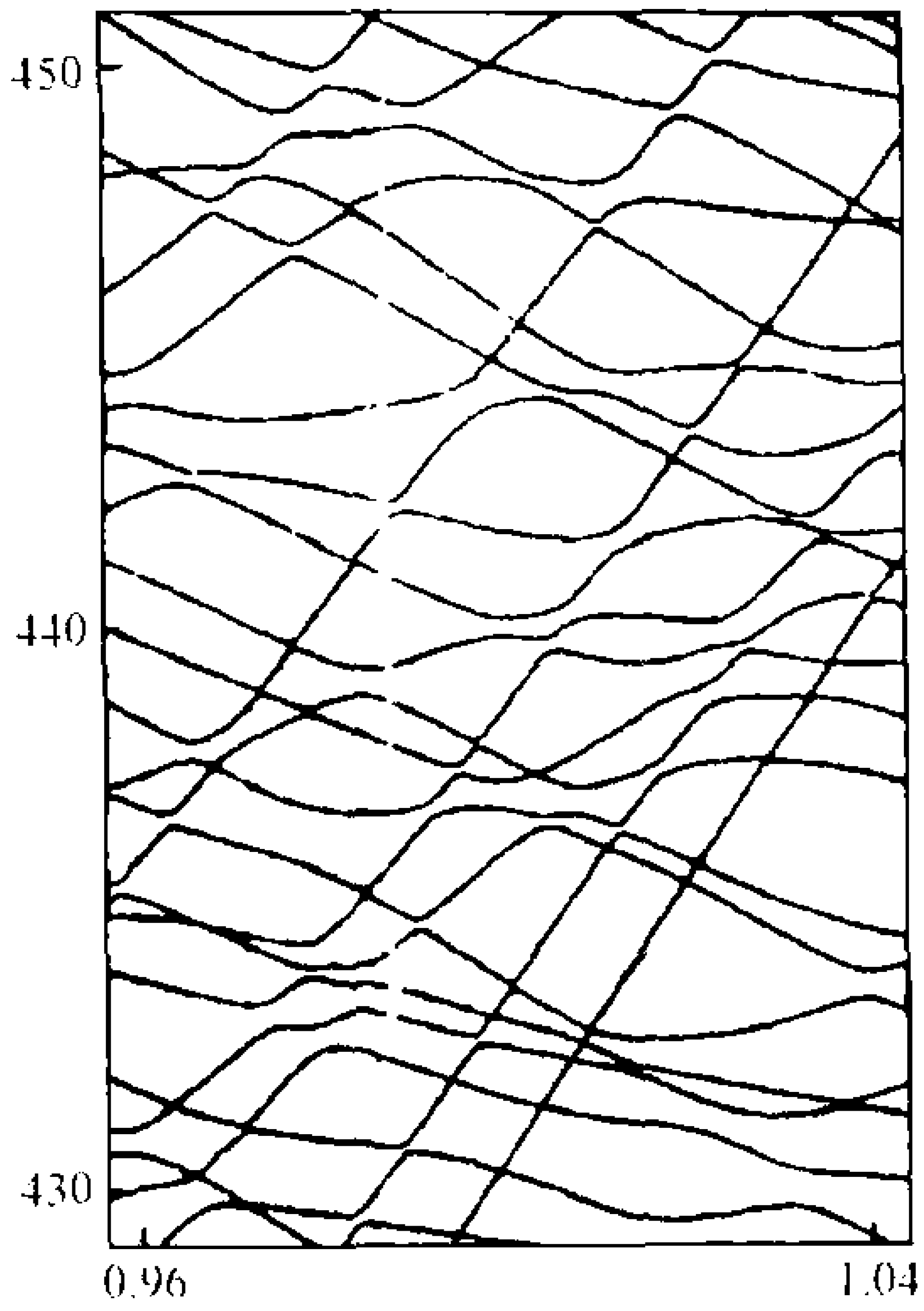



图 8-13 在有台球场边界的二维不可积量子系统中能级的回避交叉
(引自文[223])

图 8-8(b)和图 8-9(b)在现象上与图 8-13 中量子能级回避交叉十分相像,事实上,如果把具有一定本征频率的线性扰动准模 $\tilde{k}$ 看做是一个量子,它的能量是 $\hbar\omega_{\tilde{k}}$,那么图 8-8(b)和图 8-9(b)就表明这些量子能级随参数 $\varepsilon$ 改变出现了回避交叉.从上面的分析知道,在这个波动系统中回避交叉反映了扰动准模之间的非线性共振,因为有耗散,它与 Hopf 分岔相关.

Hopf 失稳的定态波解与鞍结点失稳的定态波解在性质上有很大的不同.在后面的章节中我们将看到,由于 Hopf 失稳的准模具有有限大小的本征频率,它可以与其他准模合作,在不稳定定态波解的近邻实现新的平稳波动状态,因此,Hopf 不稳定的定态波解所对应的相空间不动点可以连续地膨胀成越来越大的吸引子;相反,鞍结点失稳的定态波解表现出一种绝对的不稳定性,在它的紧邻不存在可实现的状态,这多半是因为鞍结点失稳的准模有 0 本征频率,不能与其他准模合作的缘故.对这个问题,我们在第十章还将会提到.

## §8.3 波动系统的矢量空间

本征方程(8-24)是系统(7-47)的非线性色散关系,它的解给出了对定态波解 $\phi_0(\xi)$ 扰动的各准模本征值.在 $\varepsilon\to0$ 极限下本征方程(8-24)应该蜕化到线性色散

(8-12)，准模 $\tilde{k}$ 蜕化到傅里叶模式 $k$. 确实，在 $\varepsilon=0$ 时从本征方程(8-24)解出的增长率 $\gamma_k\equiv\mathrm{Re}(\lambda_k)$ 和本征频率的绝对值 $\omega_k\equiv|\mathrm{Im}(\lambda_k)|$ 与线性色散关系(8-12)给出的结果分别完全相等；不过，两个结果却有一个微妙差别，这就是：从本征方程(8-24)得到的本征值一般是复共轭的，$\lambda_{\tilde{k}}=\gamma_{\tilde{k}}\pm\mathrm{i}\omega_{\tilde{k}}$，因此在 $\varepsilon=0$ 极限下每一个傅里叶模式 $k$ 也拥有两个本征频率，绝对值相等符号相反，与此相对照，线性色散关系(8-12)却只允许模式 $k$ 有一个本征频率，当参数一定时它们或正或负，依赖于波数 $k$ 的取值. 两个方法似乎都无懈可击，令人百思不得其解. 我们是无视这个差别，还是探求隐藏在它后面可能的物理？让我们选择后者. 好在本征问题中还有另一个重要参量——本征矢量，或许它能帮助我们解开这个疑团.

## 8.3.1 线性波的本征矢量

在搞清基本概念方面简单模型常有意想不到的效果，它排除繁杂的次要因素，让问题精确定位. 考虑一个最简单的线性波动方程

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+c\frac{\partial\phi}{\partial x}=0, \tag{8-27}$$

该方程中没有色散和非线性，仅有漂移项，现取 $c>0$. 假设系统有简谐波解，$\phi_k(x,t)=\Phi_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}[kx-\omega(k)t]}$，代入方程(8-27)，得到色散关系为

$$\omega(k)=ck, \tag{8-28}$$

显然，简谐波只能以相速度 $\omega(k)/k=c$ 向 $+x$ 轴方向单向传播.

这个问题也可以采用略微不同的方法求解，将模式的时空演化假设为

$$\phi_k(x,t)=\Phi_k(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\equiv X_k(t)+\mathrm{i}Y_k(t), \tag{8-29}$$

这里已令 $X_k(t)\equiv\Phi_k(t)\cos kx$，$Y_k(t)\equiv\Phi_k(t)\sin kx$. 将表达式(8-29)代入方程(8-27)，分开实部和虚部，得到关于 $X_k$，$Y_k$ 的一对方程

$$\frac{\mathrm{d}X_k}{\mathrm{d}t}-ckY_k=0, \tag{8-30a}$$

$$\frac{\mathrm{d}Y_k}{\mathrm{d}t}+ckX_k=0. \tag{8-30b}$$

假设 $X_k(t)$，$Y_k(t)$ 随时间演化形式分别为 $X_k(t)=\mathrm{e}^{\lambda_k t}x_k$ 和 $Y_k(t)=\mathrm{e}^{\lambda_k t}y_k$，这里 $x_k$ 和 $y_k$ 是在 $X_k$ 和 $Y_k$ 方向上初始扰动的幅度，则模式 $k$ 的运动由下面的本征方程描写

$$\begin{bmatrix}\lambda_k & -ck\\ ck & \lambda_k\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_k\\ y_k\end{bmatrix}=0, \tag{8-31}$$

式中矩阵(下面记作 $\underline{\underline{L}}_k$)有一对共轭的纯虚本征值 $\lambda(k)$ 和 $\lambda^*(k)$[这里 $\lambda(k)=+\mathrm{i}ck$，上标“ * ”表示复共轭]，对应向相反两个方向传播的本征振荡，与式(8-28)规定模式只能单方向传播形成对照.

两个解法出现了明显差异，哪一个符合物理实际？显而易见，方程(8-27)只允许相速度为 $c$ 的简谐波解单向传播，禁止逆向传播，线性色散关系(8-28)给出的结果是合理的. 那么，从本征方程(8-31)得到的一对共轭本征频率中必定有一个不能在系统中传播. 既然本征值的解已经不能解释这个现象，让我们讨论它们分别对应的本征矢量，期望能获得有用的信息.

矩阵 $\underline{\underline{L}}_k$ 对应本征值 $+\mathrm{i}ck$ 的归一化本征矢量为

$$\underline{\hat{v}}_k^{(1)} \equiv (\hat{x}_k, \hat{y}_k)^{\mathrm{T}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathrm{i}, 1)^{\mathrm{T}}, \tag{8-32}$$

与之共轭的本征值 $-\mathrm{i}ck$ 对应的本征矢量为，

$$\underline{\hat{v}}_k^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(+\mathrm{i}, 1)^{\mathrm{T}} = (\hat{x}_k^*, \hat{y}_k^*)^{\mathrm{T}}, \tag{8-33}$$

式中上标星号表示复共轭. 这样，共轭本征值 $\pm\mathrm{i}ck$ 分别对应的本征矢量 $\underline{\hat{v}}_k^{(1)}$ 和 $\underline{\hat{v}}_k^{(2)}$ 也是共轭的，很可惜，从这个平凡结果看不出 2 个模式的运动行为有任何不对称之处.

既然矩阵 $\underline{\underline{L}}_k$ 的本征矢量 $(\hat{x}_k, \hat{y}_k)^{\mathrm{T}}$ 与其共轭不能描写模式的不对称运动，它们在物理上有什么意义呢？本征矢量 $(\hat{x}_k, \hat{y}_k)^{\mathrm{T}}$ 表示，当扰动在相空间中相互垂直的 2 个实方向的投影分别为 $\hat{x}_k$ 和 $\hat{y}_k$ 时(可差一常数乘子，下同)，系统的运动将实现本征值 $\lambda_k$ 规定的行为；如果用扰动振子的复矢量表达，这句话就应表述为：如果复扰动振子的取值为 $\hat{x}_k + \mathrm{i}\hat{y}_k$，系统的运动将实现本征值 $\lambda(k) \equiv -\mathrm{i}\omega(k) = \mathrm{i}ck$ 规定的行为，即以相速度 $\omega(k)/k = -c$ 传播；同理，如果振子取矢量 $\hat{x}_k^* + \mathrm{i}\hat{y}_k^*$ 的值，系统的运动将实现本征值 $\lambda^*(k) = -\mathrm{i}ck$ 规定的行为，以相速度 $\omega(k)/k = +c$ 传播.

根据这一理解，对应 $\underline{\underline{L}}_k$ 的一对共轭本征值 $\pm\mathrm{i}ck$，我们可定义另外 2 个本征矢量取代矩阵的共轭本征矢量 $\underline{\hat{v}}_k^{(1)}$ 和 $\underline{\hat{v}}_k^{(2)}$，用以描写模式的运动[226]. 对应本征值 $+\mathrm{i}ck$ 定义一个矢量为

$$\hat{v}_k^{(-)} = \hat{x}_k + \mathrm{i}\hat{y}_k, \tag{8-34}$$

对应共轭的本征值 $-\mathrm{i}ck$ 定义另一个矢量为，

$$\hat{v}_k^{(+)} = \hat{x}_k^* + \mathrm{i}\hat{y}_k^*. \tag{8-35}$$

并利用这两个矢量分别描写在相空间中对应本征值 $\pm\mathrm{i}ck$ 的运动. 下面我们称 $\hat{v}_k^{(\mp)}$ 为模式 $k$ 的本征矢量，以区别于矩阵 $\underline{\underline{L}}_k$ 的本征矢量，上标(－)表示在相应的本征值下模式 $k$ 向 $-x$ 轴方向传播，这个运动状态的实现需要初始时复矢量 $\Phi_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ 取值为 $\hat{x}_k + \mathrm{i}\hat{y}_k$；上标(＋)表示在相应本征值下模式向 $+x$ 轴方向传播，这个运动状态的实现需要初始时复矢量 $\Phi_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ 取值为 $\hat{x}_k^* + \mathrm{i}\hat{y}_k^*$.

模式 $k$ 的 2 个本征矢量绝对值

$$|\hat{v}_k^{(-)}| \equiv |\hat{x}_k + \mathrm{i}\hat{y}_k|, \tag{8-36a}$$

$$|\hat{v}_k^{(+)}| \equiv |\hat{x}_k^* + i\hat{y}_k^*|, \tag{8-36b}$$

可视为该本征振子以相应本征频率振动的相对强度. 对应本征值 $ick$,得到 $|\hat{v}_k^{(-)}| = |-i/\sqrt{2}+i/\sqrt{2}| = 0$,这就是说,为实现相速度为 $-c$ 的运动状态,初始时复矢量强度只能取 0 值,因此模式向 $-x$ 轴方向的传播实际上是被禁止的;另一方面,对应于本征值 $-ick$,得到 $|\hat{v}_k^{(+)}| = |i/\sqrt{2}+i/\sqrt{2}| = \sqrt{2}$,这说明以相速度 $+c$ 传播的运动可以在系统中以有限大小的幅度实现. 这样我们知道,虽然本征方程(8-31)存在一对共轭的本征频率解,但其中只有一个被允许在系统中传播,这个结果与从线性色散关系(8-28)得到的结果就一致了.

## 8.3.2 非线性波准模的本征矢量

将上一节的思想推广到高维和有耗散的情形,如由本征方程(8-24)描写的系统,限于讨论矩阵 $\underline{\underline{H}}$ 的所有本征值都是复共轭的情形,记为 $\lambda_{\tilde{k}}$ 和 $\lambda_{\tilde{k}}^*$,这里 $\lambda_{\tilde{k}} = \gamma_{\tilde{k}} + i\omega_{\tilde{k}}$($\tilde{k}=1,2,\cdots,N$,规定 $\omega_{\tilde{k}}>0$),这样,对应每一个准模 $\tilde{k}$ 有两个频率分支 $\pm\omega_{\tilde{k}}$,因为有耗散,实部 $\gamma_{\tilde{k}}$ 一般不等于 0.

因为曾对矩阵 $\underline{\underline{H}}$ 作过对角化,它的本征矢量 $\underline{\hat{v}}_{\tilde{k}}$ 一般在傅里叶 $k$ 空间中的各个分量上都有投影,可将 $\underline{\underline{H}}$ 对应本征值 $\lambda_{\tilde{k}} = \gamma_{\tilde{k}} + i\omega_{\tilde{k}}$ 的本征矢量写作[参见方程(8-21)]

$$\underline{\hat{v}}_{\tilde{k}} = (\hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{x}_2, \hat{y}_2, \cdots, \hat{x}_N, \hat{y}_N)_{\tilde{k}}^{\mathrm{T}}, \tag{8-37}$$

和上一节一样,矩阵 $\underline{\underline{H}}$ 对应复共轭本征值 $\lambda_{\tilde{k}}$ 和 $\lambda_{\tilde{k}}^*$ 的 2 个本征矢量也是复共轭的,记作 $\underline{\hat{v}}_{\tilde{k}}$ 和 $\underline{\hat{v}}_{\tilde{k}}^*$,它们不能体现出两个频率分支运动的非对称性质.

这里,$\underline{\hat{v}}_{\tilde{k}}$ 的物理含义是:如果扰动波在复相空间各傅里叶 $k$ 方向上的 2 个正交投影分量的取值分别为 $\hat{x}_k$ 和 $\hat{y}_k$($k=1,2,\cdots,N$),则扰动波振子将实现本征值 $\lambda_{\tilde{k}} = \gamma_{\tilde{k}} + i\omega_{\tilde{k}}$ 规定的运动;类似地,如果扰动波在相空间中各傅里叶 $k$ 方向上的 2 个正交投影分量的取值分别为 $\hat{x}_k^*$ 和 $\hat{y}_k^*$,则扰动波将实现本征值 $\lambda_{\tilde{k}}^* = \gamma_{\tilde{k}} - i\omega_{\tilde{k}}$ 规定的运动.

因此,和节 8.3.1 中简单模型的情形类似,对应第 $\tilde{k}$ 个本征值的是这样一个复振子(准模)$\tilde{k}$ 的本征运动,它在傅里叶空间各个自由度的 2 个正交方向上的投影分别是 $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \cdots, \hat{x}_N)_{\tilde{k}}$ 和 $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \cdots, \hat{y}_N)_{\tilde{k}}$. 这样,代替矩阵的本征矢量 $\underline{\hat{v}}_{\tilde{k}}$ 和 $\underline{\hat{v}}_{\tilde{k}}^*$,我们可以定义准模 $\tilde{k}$ 的本征矢量,具体地说,对应本征值 $\lambda_{\tilde{k}} = \gamma_{\tilde{k}} + i\omega_{\tilde{k}}$ 的准模的本征矢量定义为

$$\underline{\hat{v}}_{\tilde{k}}^{(-)} = \underline{\hat{x}}_{\tilde{k}} + i\underline{\hat{y}}_{\tilde{k}}, \tag{8-38}$$

它描写准模 $\tilde{k}$ 向 $-\xi$ 方向运动的分支,对应本征值 $\lambda_{\tilde{k}}^* = \gamma_{\tilde{k}} - i\omega_{\tilde{k}}$ 的准模的本征矢量定义为

$$\underline{\hat{v}}_{\tilde{k}}^{(+)} = \underline{\hat{x}}_{\tilde{k}}^* + i\underline{\hat{y}}_{\tilde{k}}^*. \tag{8-39}$$

它描写准模 $\tilde{k}$ 向 $+\xi$ 方向运动的分支，这里

$$\underline{\hat{x}}_k \equiv (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \cdots, \hat{x}_N)_{\tilde{k}}^{\mathrm{T}}, \tag{8-40a}$$

$$\underline{\hat{y}}_k \equiv (\hat{y}_1, \hat{y}_2, \cdots, \hat{y}_N)_{\tilde{k}}^{\mathrm{T}}. \tag{8-40b}$$

从 $\underline{\hat{v}}_{\tilde{k}}^{(\mp)}$ 的表达式我们可以看出准模 $\tilde{k}$ 与傅里叶模式 $k$ 的区别和联系．准模 $\tilde{k}$ 在傅里叶空间的各个方向上都有投影．在非线性不是很强时，矢量 $\underline{\hat{v}}_{\tilde{k}}^{(\mp)}$ 中以第 $k$ 个复分量占优；在 $\varepsilon\to 0$ 的线性波极限下，矩阵 $\underline{\underline{H}}$ 只余下对角线上的二维子矩阵，相应地，$\underline{\hat{v}}_{\tilde{k}}^{(\mp)}$ 中除第 $k$ 个复分量外所有分量都等于 0，即 $\underline{\hat{v}}_{\tilde{k}}^{(\mp)}$ 蜕化为傅里叶模式 $k$ 的本征矢量.

准模 $\tilde{k}$ 向 $-\xi$ 方向本征运动分支的强度是

$$|\underline{\hat{v}}_{\tilde{k}}^{(-)}| \equiv |\underline{\hat{x}}_k + \mathrm{i}\underline{\hat{y}}_k| = \left\{\sum_{j=1}^{N}\left[(\hat{x}_j^{\mathrm{r}} - \hat{y}_j^{\mathrm{i}})^2 + (\hat{x}_j^{\mathrm{i}} + \hat{y}_j^{\mathrm{r}})^2\right]\right\}_{\tilde{k}}^{1/2}, \tag{8-41}$$

向 $+\xi$ 方向本征运动的强度是

$$|\underline{\hat{v}}_{\tilde{k}}^{(+)}| \equiv |\underline{\hat{x}}_k^* + \mathrm{i}\underline{\hat{y}}_k^*| = \left\{\sum_{j=1}^{N}\left[(\hat{x}_j^{\mathrm{r}} + \hat{y}_j^{\mathrm{i}})^2 + (-\hat{x}_j^{\mathrm{i}} + \hat{y}_j^{\mathrm{r}})^2\right]\right\}_{\tilde{k}}^{1/2}, \tag{8-42}$$

式中上标 r、i 分别表示 $\hat{x}_j$，$\hat{y}_j$ 的实部和虚部．$|\underline{\hat{v}}_{\tilde{k}}^{(\mp)}|$ 一般不相等，因此对应共轭本征值的两个分支的运动通常是不对称的.

## 8.3.3　非线性正能和负能准模

上面讨论准模 $\tilde{k}$ 的两个运动分支时，所谓正向和逆向是相对于定态波 $\phi_0(x-\Omega t)$ 在实验室坐标系中的运动方向而言的．根据本征矢量的相对强度可区分出两类准模，若某个准模 $\tilde{k}$ 正向分支的本征矢量强度大

$$|\underline{\hat{v}}_{\tilde{k}}^{(+)}| > |\underline{\hat{v}}_{\tilde{k}}^{(-)}|, \tag{8-43}$$

可被定义为正能准模（positive-energy quasi-mode），而若逆向分支的本征矢量强度大

$$|\underline{\hat{v}}_{\tilde{k}}^{(+)}| < |\underline{\hat{v}}_{\tilde{k}}^{(-)}|, \tag{8-44}$$

则被定义为负能准模（negative-energy quasi-mode）．这里我们借用了等离子体物理中正能波和负能波的概念.

正能波和负能波的概念是苏联物理学家 Kadomtsev 在讨论运动介质中波的传播时提出的[16]．考虑一维空间中有波数为 $k$、频率为 $\omega_k$ 的 $N$ 个平面波振子向 $+x$ 方向传播，波的能量为 $E=\omega_k N$，现假设介质以速度 $-u_0$ 逆着波的方向运动，因多普勒效应引起的频率移动，平面波振子的能量相应地减少到 $(\omega_k - ku_0)N$．当介质速度 $u_0$ 与波的相速度相等时，在静止坐标系中波就停住，其频率和能量变为 0．如果介质速度大于波的相速度，波就被介质携带着向左传播，尽管波相对于介质仍然向右传播．这种“向后退”的波的能量是负的．他指出，在介质中激发一个负能波

不需要向系统注入能量,反而需要从系统中汲取能量.

Kadomtsev 的这些讨论非常有启发性,由此可推想,如果一个波动系统在参数改变时倾向于离开其平衡状态变得起伏不定,很有可能是因为从能量的角度来说,系统通过激发负能波实现了一个自由能更低的状态的缘故.我们知道,自然界中的运动总是有向更低自由能态弛豫的趋势,负能模式的激发符合这个一般规律.

一些学者将这个思想应用到非线性波,如 T. M. Cherry 讨论了由正能和负能两个振子非线性耦合的系统,证明它们在一定条件下会出现共振,引起非线性不稳定性[227];德国等离子体物理学家 D. Pfirsch 则指出,区分这两类模式要以系统的平衡能量作参考系,特别是非线性不稳定性的发生可能与负能模式有关,当模式在动力学上可达到的扰动能量小于 0 时,系统的平衡具有自由能,如果由于耗散,或者由于与另外的正能模式耦合,而使能量从负能模式中转移走,则负能模式的振幅将增长,非线性不稳定性就发生了[228].

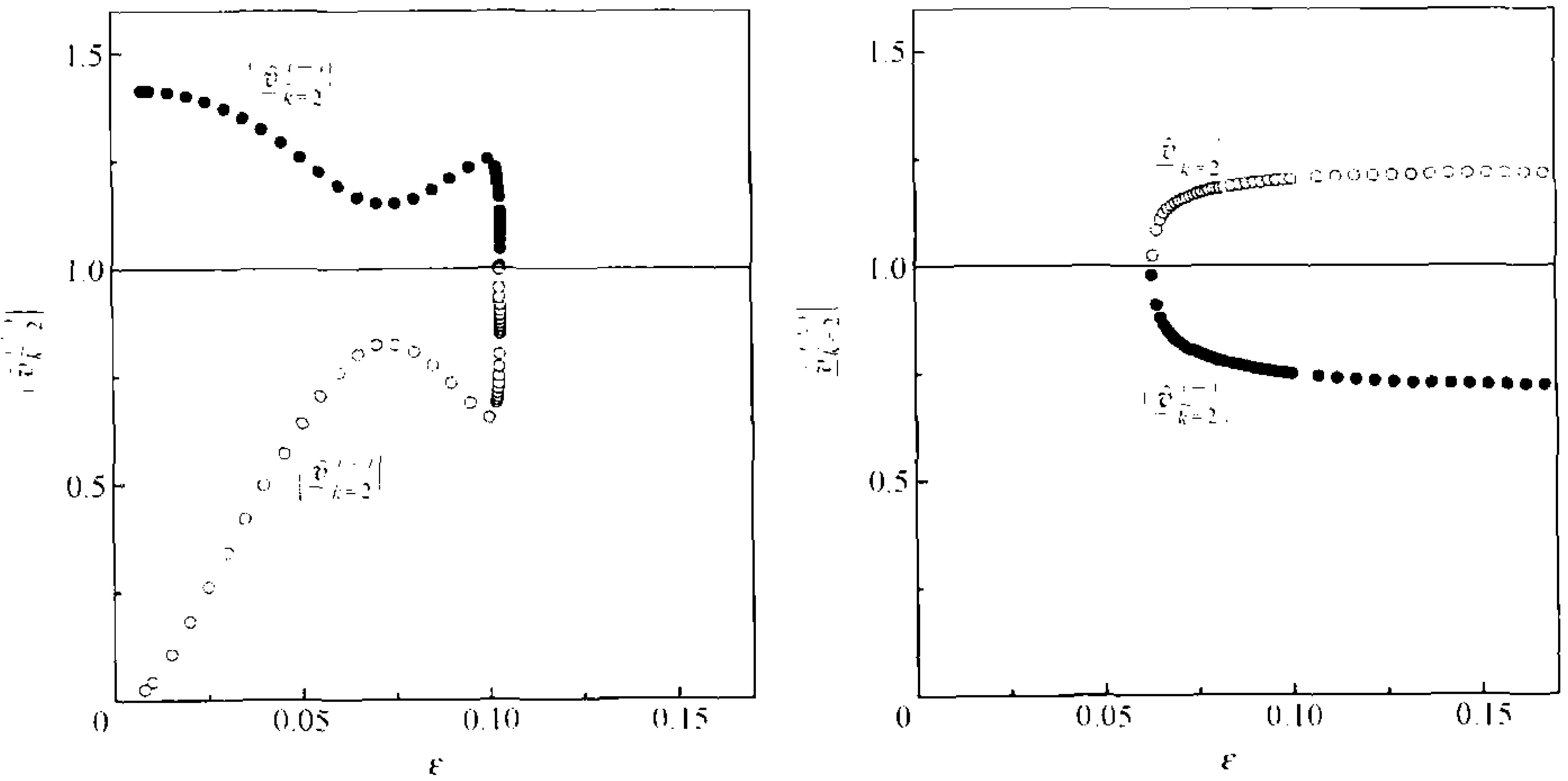
在模型(7-47)的情形下,定态波解 $\phi_0(x-\Omega t)$就是具有平衡能量的参考系,现在需要讨论扰动波 $\delta\phi(x,t)$的模式,分析它在动力学上可达到的能量状态及其与非线性不稳定性的关系.代替运动介质,这里定态波解给系统提供一个运动参考系,扰动波模式在其中的频率出现了多普勒移动.不过,模型(7-47)比上述学者讨论的情形还要复杂些,除了提供一个运动坐标系外,定态波势阱 $\phi_0(\xi)$对扰动波模式还有散射作用,扰动模式在线性近似下是一组独立的准模,每个准模的本征矢量$\underline{v}_{\tilde{k}}^{(\pm)}$在傅里叶空间各个 $k$ 方向上都有投影.下面我们将根据不等式(8-43)和(8-44)分别定义正能和负能的准模,探讨模式能态随参数的改变及其与定态波稳定性的关系,在此过程中我们还将观察到,定态波解的分岔与扰动波准模的本征矢量$\underline{v}_{\tilde{k}}^{(\pm)}$ 在参数空间中出现奇异性密切相关.

### 8.3.4　向正能准模的转变和鞍结点分岔

在节 8.2.2 中已指出,定态波解的滞后不稳定性是扰动波的某个特征准模出现鞍结点分岔引起的,在图 7-7(a)的参数范围内,这个特征准模是 $\tilde{k}=2$,现在让我们讨论准模 $\tilde{k}=2$ 的本征矢量在分岔前后的行为.计算沿图 7-7(a)中给定 $\Omega$ 的 S 形滞后曲线进行,求解相应矩阵 $\underline{\underline{H}}$ 的各复共轭本征值对应的本征矢量$\underline{v}_{\tilde{k}}^{(\pm)}$ 及其强度,这里特别关心特征准模 $\tilde{k}=2$ 的结果.

图 8-14 是$\Omega=0.56$ 时准模 $\tilde{k}=2$ 两个分支本征矢量的强度$|\underline{v}_{\tilde{k}=2}^{(\pm)}|$随 $\varepsilon$ 的变化,图(a) 沿波能滞后曲线的下分支,图(b) 沿上分支,"·"和"∘"分别表示$|\underline{v}_{\tilde{k}}^{(-)}|$和$|\underline{v}_{\tilde{k}}^{(+)}|$(下同).由图可见,当 $\varepsilon=0$ 时$|\underline{v}_{\tilde{k}=2}^{(+)}|=0$,而$|\underline{v}_{\tilde{k}=2}^{(-)}|=\sqrt{2}$,这就是说,在线性极限下,系统只允许傅里叶模式 $k=2$ 逆向于定态波传播,这与线性色散关系(8-12)给出的结果完全一致.

随 ε 增加，图 8-14(a)中 $|\underline{\hat{v}}_{\tilde{k}=2}^{(-)}|$（实心圆点）逐渐减小，相应地 $|\underline{\hat{v}}_{\tilde{k}=2}^{(+)}|$（空心圆圈）逐渐增大，正向和逆向两个分支的强度渐渐变得可比. 约到 S-形滞后曲线下拐点处，恰好在图 8-3 中准模 $\tilde{k}=2$ 频率变为 0（$\omega_{\tilde{k}=2}=0$）时，两条曲线汇合在 $|\underline{\hat{v}}_{\tilde{k}=2}^{(\pm)}|=1$ 这一点，正向和逆向本征运动的强度变得相等. 回忆准模 $\tilde{k}=2$ 在鞍结点分岔时本征频率 $\omega_{\tilde{k}=2}=0$，即没有任何有限大小的频率可供该准模在系统中传播，而此时扰动准模相对于定态波正向和逆向运动的本征矢量 $\underline{\hat{v}}_{\tilde{k}=2}^{(\pm)}$ 变得势均力敌，不仅强度相等，它们的每一个分量也都分别相等，这也许不是偶然的.




(a) 沿滞后曲线的下分支　　(b) 沿滞后曲线的上分支

图 8-14　出现鞍结点分岔的特征准模 $\tilde{k}=2$ 的本征矢量强度随 ε 的变化（$\Omega=0.56$）

现在考虑滞后曲线负斜率分支上特征准模本征矢量的行为. 我们知道，在整个负斜率分支上，准模 $\tilde{k}=2$ 的本征频率 $\omega_{\tilde{k}=2}$ 一直保持为 0，相应地本征值 $\lambda_{\tilde{k}=2}$ 变为实数，前面所作的复共轭本征值假设已不再成立，并且 $\underline{\hat{x}}_{\tilde{k}=2}$ 和 $\underline{\hat{y}}_{\tilde{k}=2}$ 的各分量也都变为实数. 不过假设此时仍可应用定义(8-38)和(8-39)，那么直接从公式(8-41)和(8-42)就可得到 $|\underline{\hat{v}}_{\tilde{k}=2}^{(+)}|=|\underline{\hat{v}}_{\tilde{k}=2}^{(-)}|$ 这一结论. 这样，在滞后的整个负斜率分支上特征准模 $\tilde{k}=2$ 正向和逆向的本征运动始终处于势均力敌的状态，这种状态一直维持到 S 形滞后曲线的上拐点处.

图 8-14(b)是沿相应滞后曲线上分支计算的结果，此时准模 $\tilde{k}=2$ 的正向和逆向本征运动不平衡再度出现. 由图可知，在滞后曲线的上拐点亦即特征准模发生逆鞍结点分岔的参数附近，两个分支的本征矢量强度变得相等，$|\underline{\hat{v}}_{\tilde{k}=2}^{(+)}|=|\underline{\hat{v}}_{\tilde{k}=2}^{(-)}|=1$，对应有 $\omega_{\tilde{k}=2}=0$；随 ε 沿滞后上分支增加，$|\underline{\hat{v}}_{\tilde{k}=2}^{(+)}|$ 逐渐增大，而 $|\underline{\hat{v}}_{\tilde{k}=2}^{(-)}|$ 逐渐减小，在整个上分支都有 $|\underline{\hat{v}}_{\tilde{k}=2}^{(-)}|<|\underline{\hat{v}}_{\tilde{k}=2}^{(+)}|$，即逆向分支的强度比正向的小，这与下分支的情形正好相反；与此同时，准模 $\tilde{k}=2$ 的本征频率 $\omega_{\tilde{k}=2}$ 也再度变为非 0.

这样，根据正能和负能模式的定义，特征准模 $\tilde{k}=2$ 在 S 形滞后曲线的整个下分支上都为负能态，而在滞后曲线上分支，它突变为正能态.

除特征准模外，其他准模的本征矢量沿 S 形滞后曲线的变化都是连续的，也没有出现能态改变. 图 8-15 给出 $\Omega=0.56$ 时另外两个准模本征矢量强度 $|\underline{\hat{v}}_{\tilde{k}}|$ 沿 S形滞后曲线的变化，图(a) $\tilde{k}=1$，(b) $\tilde{k}=3$. 在滞后曲线的 3 个分支上 $\tilde{k}=1$ 都保持为正能，始终有 $|\underline{\hat{v}}^{(+)}_{\tilde{k}=1}|>|\underline{\hat{v}}^{(-)}_{\tilde{k}=1}|$，$\tilde{k}=3$ 保持为负能，有 $|\underline{\hat{v}}^{(+)}_{\tilde{k}=3}|<|\underline{\hat{v}}^{(-)}_{\tilde{k}=3}|$，其他 $\tilde{k}>2$ 准模也一直保持负能态. 由此可以认定在这个参数区滞后跃迁的发生与准模 $\tilde{k}=2$ 出现能态突变相关.

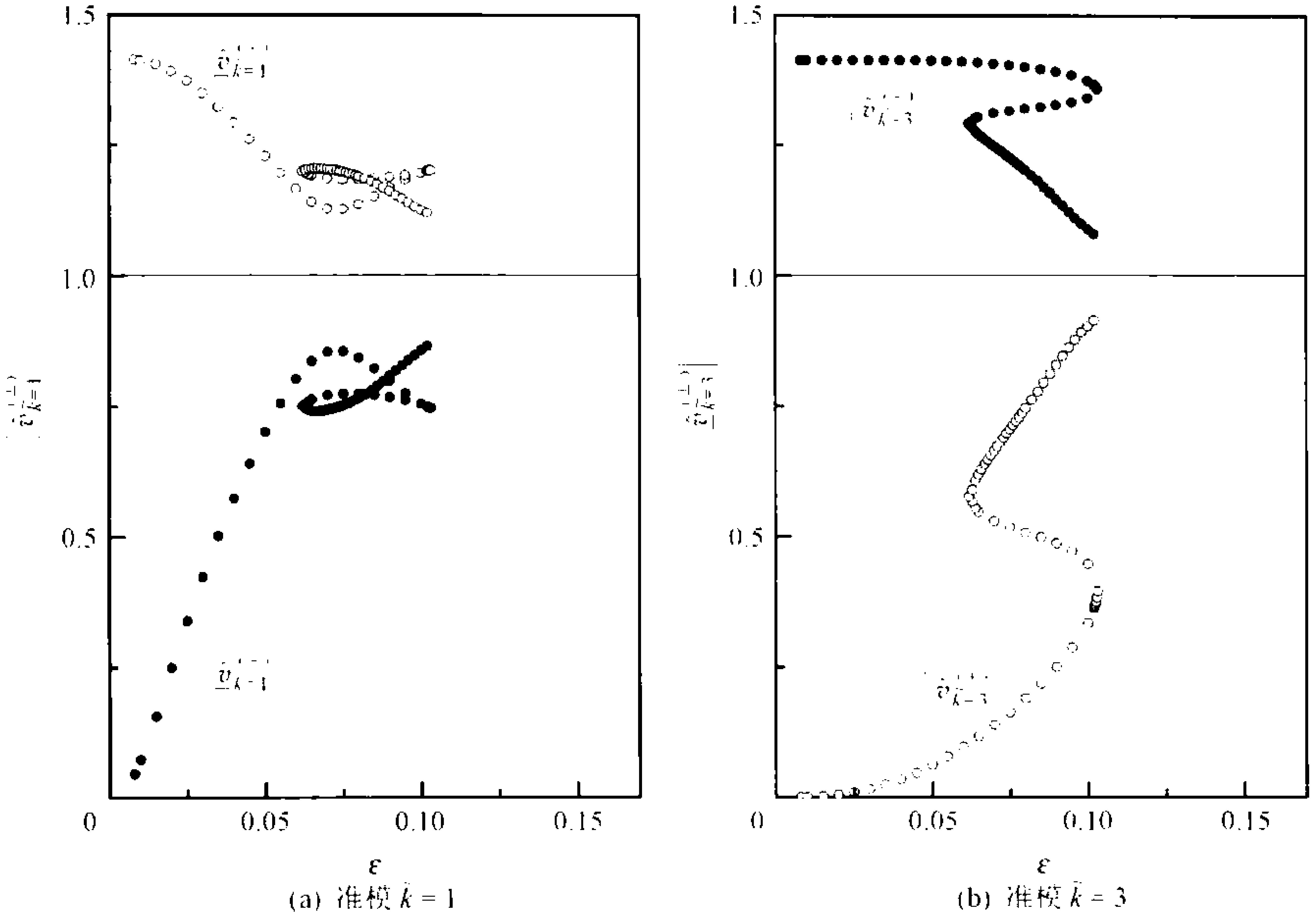



图 8-15　非特征准模的本征矢量强度随 ε 的变化($\Omega=0.56$)

在不同参数范围内计算的样本都指向下面的结论：滞后跃迁的发生与某个特征准模从负能态向正能态转变相关. 例如，对应图 7-7 中(a)～(c)的三簇滞后曲线，特征准模分别为 $\tilde{k}=2,3,4$，在滞后曲线的下分支，它们分别是负能准模，而在上分支分别变为正能准模. 图 7-11 中多级滞后曲线也很有可能与越来越高波数的准模 $\tilde{k}$ 从负能态转变为正能态相联系.

## 8.3.5　负能准模的激发和 Hopf 分岔

和鞍结点分岔一样，Hopf 分岔也与扰动波准模的本征行为出现不连续性有关，包括本征值和本征矢量的不连续性. 在节 8.2.3 中已经知道，定态波解的 Hopf 分岔涉及了一对非线性共振的准模，它们的本征值实部和虚部在参数空间分别发

生了重联，表现出某种奇异性；随 ε 增加，在重联点附近一个准模的本征值实部从负方向跨过 0，与之共振的那个准模的本征值实部则变得更负. 本节将进一步讨论这一对共振准模的本征矢量在参数空间中的行为.

图 8-16 至图 8-18 与图 8-5 至图 8-8 的参数区相同，都对应图 7-7(a)中那簇滞后曲线的下分支. 这里集中讨论与准模共振有关的现象，在这个参数区中 $\tilde{k}=1$，2 是一对共振准模，图 8-16 至图 8-18 中分别给出了不同 $\Omega$ 值下准模 $\tilde{k}=1,2$ 的本征矢量随 ε 的变化，空心的是 $|\underline{\hat{v}}_{\tilde{k}=1,2}^{(+)}|$，实心的是 $|\underline{\hat{v}}_{\tilde{k}=1,2}^{(-)}|$.

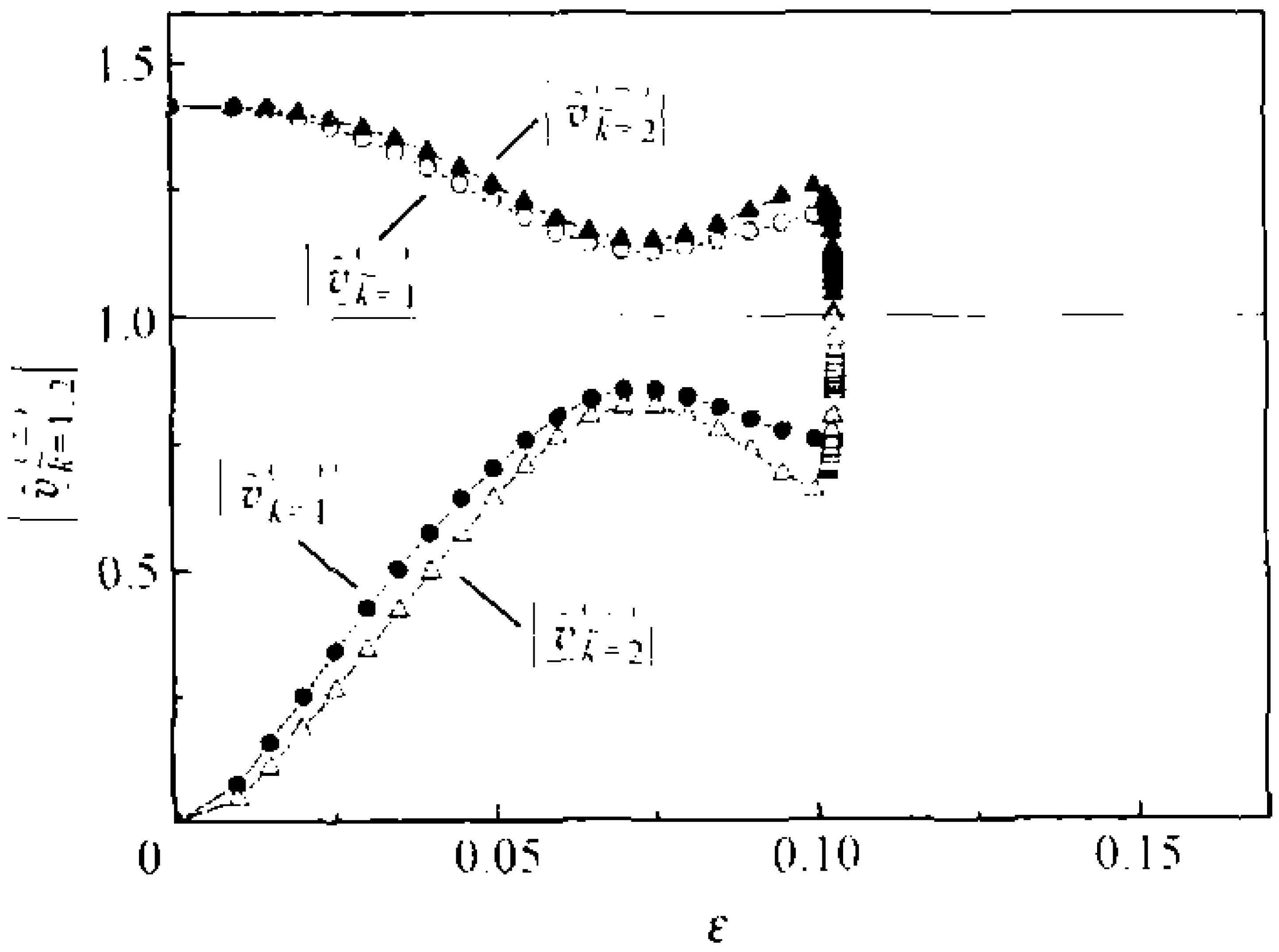



图 8-16　引起 Hopf 分岔的一对共振准模的本征矢量强度随 ε 的变化($\Omega$=0.56)

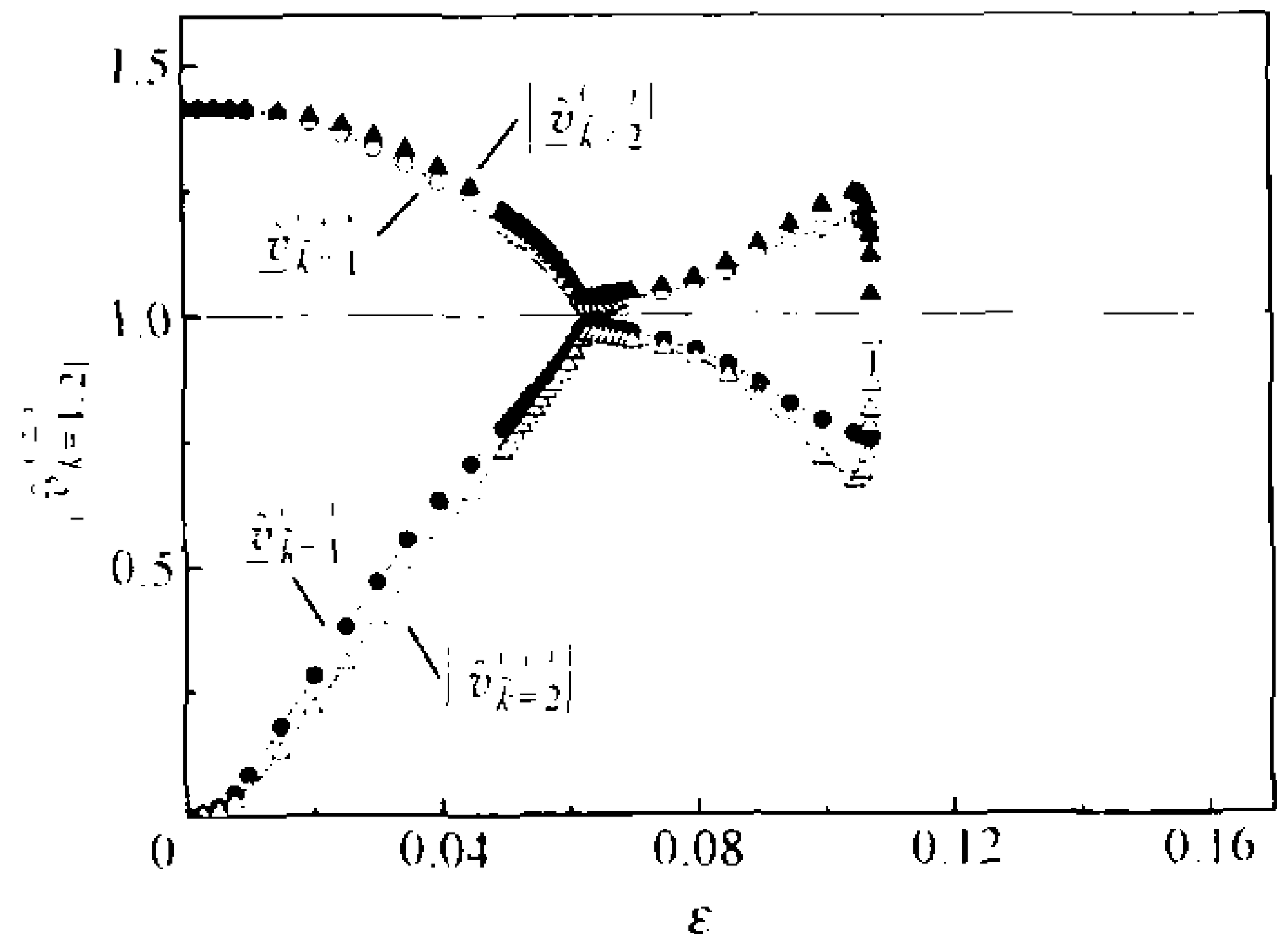



图 8-17　引起 Hopf 分岔的一对特征准模的本征矢量强度随 ε 的变化($\Omega$=0.5638)

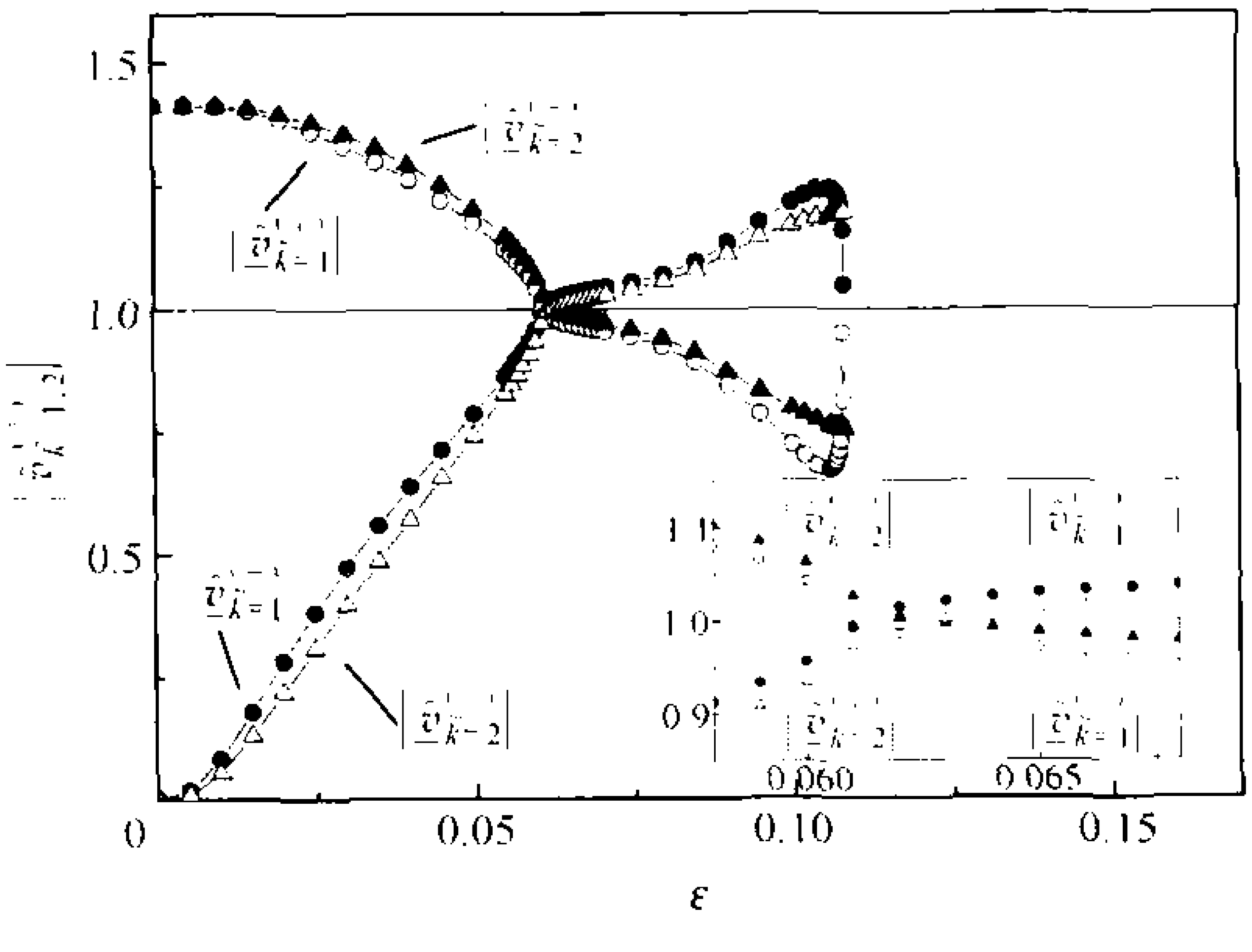



图 8-18　引起 Hopf 分岔的一对特征准模的本征矢量强度随 ε 的变化($\Omega$=0.5642)

图 8-16 中 $\Omega$=0.56，始终有 $|\underline{\hat{v}}_{\tilde{k}=1}^{(-)}|>|\underline{\hat{v}}_{\tilde{k}=1}^{(+)}|$ 和 $|\underline{\hat{v}}_{\tilde{k}=2}^{(+)}|<|\underline{\hat{v}}_{\tilde{k}=2}^{(-)}|$，所以 $\tilde{k}=1,2$ 分别有正能和负能态，随 ε 增加，$|\underline{\hat{v}}_{\tilde{k}=1}^{(-)}|$ 和 $|\underline{\hat{v}}_{\tilde{k}=2}^{(-)}|$ 先下降后上升，$|\underline{\hat{v}}_{\tilde{k}=1}^{(+)}|$ 和 $|\underline{\hat{v}}_{\tilde{k}=2}^{(+)}|$ 先上升后下降，2 个准模几乎同步地变化. 在 ε≈0.065[即图 8-5(a)中本征值实部的简并点]附近 2 个本征矢量分支有相互“吸引”的趋势，它们的值向 1 靠拢，说明 2 个准模的正向和逆向分支本征运动在这里变得比较平衡.

图 8-17 中 $\Omega$＝0.5638，这种相互吸引趋势更加明显，$|\underline{v}_{k=1}^{(+)}|$ 和 $|\underline{v}_{k=2}^{(-)}|$ 作为 $\varepsilon$ 的函数分别形成了 V 形曲线，而 $|\underline{v}_{k=1}^{(-)}|$ 和 $|\underline{v}_{k=2}^{(+)}|$ 分别形成了 Λ 形曲线，在 $\varepsilon\approx 0.063$ 附近，几条曲线的尖点几乎都触到 1，2 个准模正向和逆向的本征运动分支的强度在尖点处变得非常接近.

$\Omega$ 继续增加到一个临界参数时，共振准模的本征矢量发生了重联，重联发生在 V 形与 Λ 形曲线的尖点对接在强度等于 1 时，$(\Omega,\varepsilon)\approx(0.5639,0.0615)$，与本征值重联的位置相同. 具体地说，原来在图 8-17 中的 $|\underline{v}_{k=1}^{(+)}|$ 的左上分支将与 $|\underline{v}_{k=2}^{(+)}|$ 的右下分支连接，$|\underline{v}_{k=1}^{(-)}|$ 的左下分支将与 $|\underline{v}_{k=2}^{(-)}|$ 的右上分支连接等等. 总之，重联发生在共振模式本征矢量的同向分支之间.

图 8-18($\Omega$＝0.5642)是重联已发生后的情形，由于重联，随 $\varepsilon$ 增加两个准模将分别出现能态改变. 由图可见，准模 $\tilde{k}=1$ 的两个分支先有 $|\underline{v}_{k=1}^{(+)}|>|\underline{v}_{k=1}^{(-)}|$，它们约在 $\varepsilon\approx 0.061$ 时汇合到 1，然后逆向本征运动变得占优，$|\underline{v}_{k=1}^{(-)}|>|\underline{v}_{k=1}^{(+)}|$，这样，当 $\varepsilon$ 从左边跨过 0.061 时，$\tilde{k}=1$ 从正能准模变成了负能准模；在稍大的 $\varepsilon$ 处，准模 $\tilde{k}=2$ 经历了相反的过程，在 $\varepsilon\approx 0.062$ 这一点上，原来 $|\underline{v}_{k=2}^{(-)}|>|\underline{v}_{k=2}^{(+)}|$ 的两个分支也汇合到 1，随后它的正向本征运动变得占优，有 $|\underline{v}_{k=2}^{(+)}|>|\underline{v}_{k=2}^{(-)}|$，因此越过这个参数点准模 $\tilde{k}=2$ 从负能态变成了正能态. 小插图给出了本征矢量随 $\varepsilon$ 变化的细部，从中可清楚地看到，随 $\varepsilon$ 增加准模 $\tilde{k}=1$ 和 $\tilde{k}=2$ 的能态转变是先后发生的，$\tilde{k}=1$ 先变成负能态，而后 $\tilde{k}=2$ 变成正能态.

随 $\varepsilon$ 增加共振准模的能态转变有先后，这一事实在 $\Omega$＝0.60 时(图 8-19)看得更清楚. 在 $\varepsilon\approx 0.082$ 处准模 $\tilde{k}=1$ 先从正能变成负能，而后在 $\varepsilon\approx 0.11$ 处准模 $\tilde{k}=2$ 从负能变成正能，这样，在 $\varepsilon$ 从 0.082 到 0.11 很大一个区间，两个准模的能态都是负的，它们都以逆向运动分支占优. 与图 8-8 和图 7-15 比较可见，约在这个参数范围内 Hopf 不稳定性增长率出现驼峰，波能周期振荡的幅度也出现驼峰. 虽然由于耗散效应，准模能态转变的两个临界点 $\varepsilon=0.082$ 和 $\varepsilon=0.11$ 并不正好是 Hopf 分岔和逆分岔的临界点，但非常明显，一对共振准模负能态的激发与 Hopf 分岔之间存在某种正的相关，它们的本征矢量逆向分支越强、能态越负，Hopf 不稳定性的增长率就越高.

与节 8.2 中一样，判断解出的本征矢量属于哪一个准模，要根据相应本征值 $\lambda_{\tilde{k}}$(实部或虚部)的连续性，图 8-16 至图 8-19 中 $\tilde{k}=1,2$ 就是这样标记的，由此观察到了本征矢量重联这一现象. 重联是共振准模的本征行为在参数空间表现出的一种奇异性，从已有的结果看，它总是发生在两个共振准模的同向本征矢量分支之间，随着驱动强度的继续增加，在重联点附近的一个参数区间，两个准模本征矢量的逆向分支都得到充分激发(参见图 8-19)，它们以 Hopf 分岔的形式释放出自由能. 负能准模的激发与 Hopf 分岔之间的相关说明，虽然分岔后波动变得更起伏不

定，系统却很可能达到了一个自由能更低的也就是在动力学上更稳定的状态.

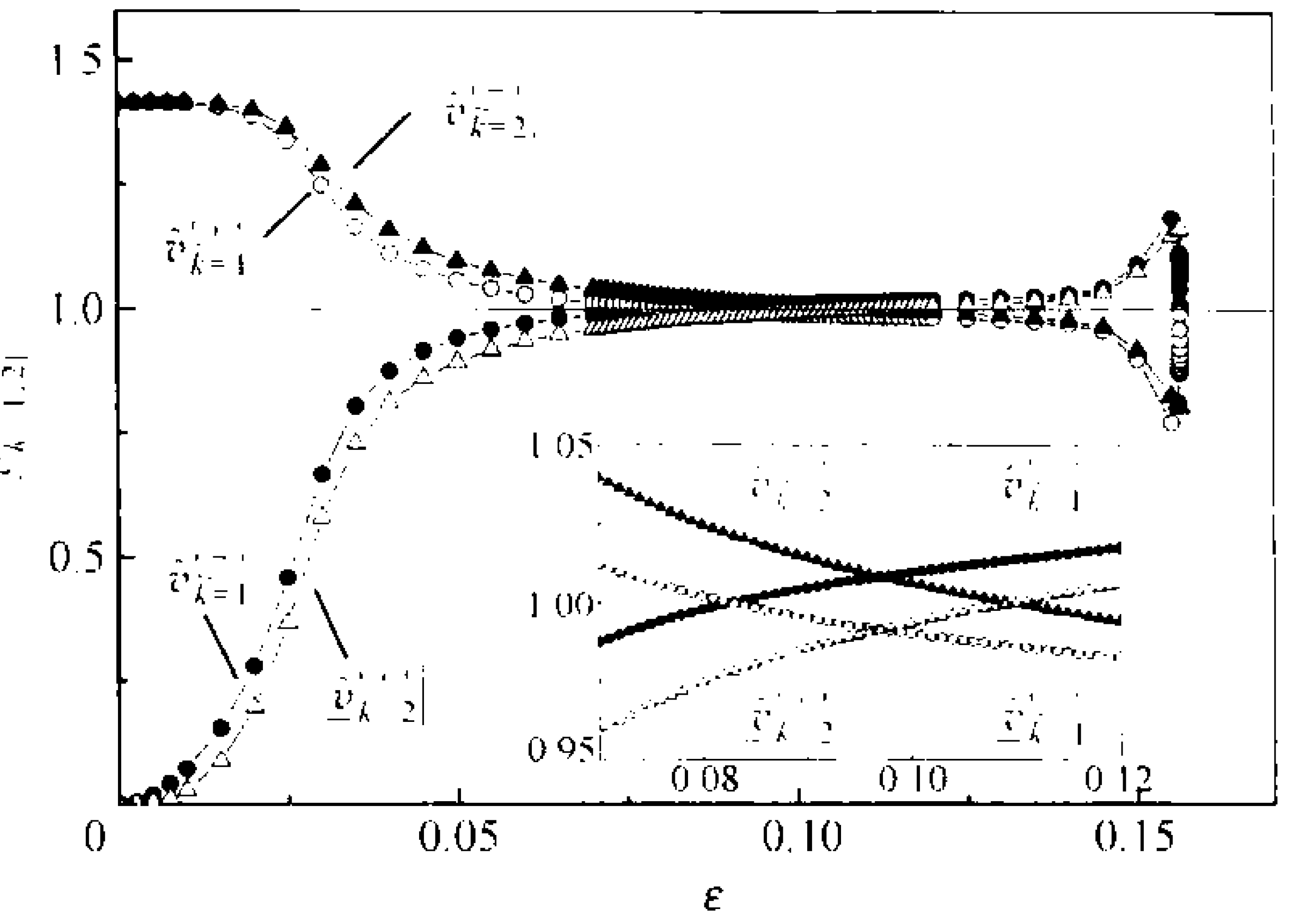


图 8-19　引起 Hopf 分岔的一对特征准模的本征矢量强度随 ε 的变化（$\Omega=0.60$）

在本章的最后，我们试图回答下面的问题：对于一个空间延展系统，在计算机模拟将空间作离散化时，要在多高波数的模式上截断才不至于丢失系统主要的动力学信息？这个问题没有简单答案，但是在分析了定态波解的稳定性后，我们至少可以作到心中有数. 例如，在相应于图 7-7(a)中那一簇滞后曲线的参数区，鞍结点和 Hopf 失稳的准模都是 $\tilde{k}=2$，如果 ε 不是很大，矩阵 $\underline{\underline{H}}$ 仍以主对角线（上的二维子矩阵）占优，任一准模 $\tilde{k}$ 也以在相应的傅里叶 $k$ 方向上的投影占优，那么只要将傅里叶空间截断到模式 $k\gg 2$ 的高波数，主要的动力学信息将不会丢失. 在另外的参数区，如图 8-9 中的情形，Hopf 分岔涉及更多的准模 $\tilde{k}$，它们在相应的傅里叶 $k$ 方向上的投影也可能不再明显占优，如果模拟中采用的模式数太少，结果与实际情况将有较大差异. 从前面的分析知道，随着 $\Omega$ 减小，出现鞍结点分岔的准模逐渐向高波数移动，在 $\Omega\to 0$ 的极端情形下，鞍结点分岔的特征准模应是 $\tilde{k}\to\infty$，任何有限波数截断下的模拟计算都不能观察到定态波的滞后现象. 在后面讨论湍流产生机制时，我们将选择图 7-7(a)的参数区，那里定态波解的失稳，无论是鞍结点还是 Hopf 失稳，都发生在准模 $\tilde{k}=2$ 上，预料系统主要的动力学性质可以在不太大的傅里叶空间中定性地展示出来.

# 第九章　弱湍动力学

一个多世纪以来，为研究湍流现象人们进行了很多努力，但对它的机制仍不甚明了．究其原因，有人指出，是因为对于均匀湍流（即在无限空间中性质均一的湍流），似乎缺乏一个小参量可以作为微扰论的基础[2]．幸运的是，在认识到在随波坐标系中定态波解是模式空间中的一个不动点后，知道至少对一类非线性波动方程来说，如果存在定态波解，就可以对它作扰动，并像传统所作的那样建立起相关的微扰论．在上一章中，我们以模型(7-47)为例，导出了在定态波解上微扰的本征方程，通过分析扰动准模的本征行为，发现了定态波解两种可能的失稳方式：鞍结点分岔和 Hopf 分岔．对于线性系统，一般获知其本征行为足矣，但非线性研究不会止步于此，它要关注当扰动振幅随时间指数增长后微扰论不再适用时，系统将出现什么样的动力学行为，这就是要讨论所谓远离平衡态的问题．

模型(7-47)中对于定态波解 $\phi_0(\xi)$ 的扰动 $\delta\phi(\xi,\tau)$ 由方程(8-10)制约．该方程中因系统非线性效应带来的有两项，其中

$$\frac{\partial}{\partial \xi}[\phi_0(\xi)\delta\phi]$$

项描写定态波解 $\phi_0(\xi)$ 与扰动波 $\delta\phi$ 之间的相互作用，另一项

$$\delta\phi\frac{\partial}{\partial \xi}\delta\phi$$

是扰动波的自非线性．当扰动幅度很小时，自非线性项可以被忽略，但是，如果 $\delta\phi$ 的幅度增加到与定态波解 $\phi_0(\xi)$ 的幅度可比时，它的自非线性就不能再被忽略．在这种情况下，扰动波一方面受到定态波解 $\phi_0(\xi)$ 作为势阱的散射作用，另一方面扰动模式之间还将出现复杂的模-模耦合过程．随着扰动波幅度的增大，它们之间的模-模耦合过程表现得越来越活跃．上一章我们已经指出，在随波坐标系中，对定态波解的扰动 $\delta\phi(\xi,\tau)$ 携带了系统随时间演化的全部信息，因此，像湍流这样的复杂动力学现象，正是扰动波非线性发展的结果．

在流体和等离子体研究中，常将湍流粗略地区分为弱湍和强湍两大类．弱湍的时空演化比较缓慢，波动能量主要集中在长波波段；强湍也被称为充分发展的湍流，它的涨落幅度大得多，场量随时空迅速变化，特别是短波模式被充分激发．前面曾提到，通常人们按照场能与粒子热能之比来区分弱湍与强湍，以等离子体静电波为例，假设涨落电场的强度为 $E$，典型波数为 $k$，等离子体电子密度和温度分别为 $n$ 和 $\theta_e$，$\lambda_{De}$ 是电子的德拜半径，那么当 $E^2/4\pi n\theta_e \gg k^2\lambda_{De}^2$ 时，非线性对波动的贡献开始

超过粒子热运动的影响，波的能量将被耦合到短波长模式上，在这种情况下弱湍理论已不适用[55]. 当然，这不是一种动力学意义上的严格划分.

那么，我们能否从动力学状态上区分弱湍和强湍呢？在第七章中对非线性漂移波模型(7-47)的数值模拟结果已经显示了定态波失稳后的一些混沌运动状态，它们有的看起来像人们所说的弱湍(如图 7-16)，有的则像强湍或充分发展的湍流(如图 7-17). 在本章和下一章中，我们将在随波坐标系中讨论定态波解失稳后的运动. 本章将讨论弱湍态，说明它是定态波解作为相空间中的一个不动点经过一系列局域分岔后发展起来的，在这个演变过程中波动轨道被束缚在越来越高维的拓扑环上. 我们还将说明，拓扑奇点的出现将中断局域分岔序列，由于奇点的存在，运动流形的环形拓扑有可能阵发地被破坏，使得波动的时空行为暂时变得十分无序，直到运动轨道再度调节到拓扑环上. 下一章将讨论强湍，强湍态的成因与弱湍在动力学上完全不同，它由全局分岔所引发，是一种不连续的状态突变. 此外，我们还将说明弱湍与强湍分属于截然不同的两种相同步状态.

## §9.1 从定态波解的分岔序列

上一章在随波参照系中对定态波解 $\phi_0(\xi)$ 进行了微扰，知道 $\phi_0(\xi)$ 作为模式空间中的一个不动点可能通过鞍结点分岔和 Hopf 分岔出现失稳. 从本章开始，我们考虑完全的非线性波动方程(7-47). 将 $\phi(x,t)$ 展开为

$$\phi(x,t) = \sum_{k=1}^{N} \tilde{\phi}_k(t) e^{ikx} + \text{c. c.} , \tag{9-1}$$

其中复振幅 $\tilde{\phi}_k(t)$ 满足 $\tilde{\phi}_k^*(t) = \tilde{\phi}_{-k}(t)$，代入波动方程(7-47)后，得到模式 $\tilde{\phi}_k(t)$ 服从的方程为

$$(1 - ak^2)\frac{d\tilde{\phi}_k}{dt} + ick\tilde{\phi}_k + \frac{if}{2}\sum_{p+q=k} k\tilde{\phi}_p\tilde{\phi}_q + \gamma\tilde{\phi}_k - \frac{\varepsilon}{2}\delta_{1,k}[\sin\Omega t + i\cos\Omega t] = 0. \tag{9-2}$$

注意这里 $\tilde{\phi}_k(t)$ 是波动解 $\phi(x,t)$ 的傅里叶模式，它与上一章讨论的扰动波 $\delta\phi(\xi,\tau)$ 的模式 $\delta\phi_k(\tau)$ 不是一个概念. 首先参照系不同，式(9-2)是在实验室坐标系中的方程，在第八章作稳定性分析时出现的扰动波 $\delta\phi(\xi,\tau)$ 则是在随波坐标系 $\xi = x - \Omega t$，$\tau = t$ 中的变量；其次，扰动波 $\delta\phi(\xi,\tau)$ 只包含波动解 $\phi(\xi,\tau)$ 中随时间变化的活跃部分，满足 $\phi(\xi,\tau) = \phi_0(\xi) + \delta\phi(\xi,\tau)$，因此 $\delta\phi(\xi,\tau)$ 只是从波动解 $\phi(\xi,\tau)$ 中去掉了定态波解 $\phi_0(\xi)$ 以后余下的那一部分.

将复模式用它的实振幅和实位相表示，波动解 $\phi(x,t)$ 的傅里叶展开改写为

$$\phi(x,t) = \sum_{k=1}^{N} \tilde{A}_k(t)\cos[kx + \tilde{\vartheta}_k(t)], \tag{9-3}$$

这里$\{\widetilde{A}_k(t),\tilde{\vartheta}_k(t)\}$都是实数,波浪号表示这里模式的振幅和位相一般可以随时间变化,不像定态波解$\phi_0(\xi)$展开式(7-51)中模式振幅$A_k$和位相$\theta_k$都是时间的常数,后面式(9-7)中$\tilde{\theta}_k$上的波浪号的意义也同此.

在用赝谱方法数值求解方程(9-2)时,在每一个步长上都可以获得复模式$\tilde{\phi}_k(t)$的信息,由此可计算出它的振幅和位相$\{\widetilde{A}_k,\tilde{\vartheta}_k\}$随时间的演化,其中模式$k$的振幅是

$$\widetilde{A}_k(t) = 2\sqrt{[\mathrm{Re}\tilde{\phi}_k(t)]^2 + [\mathrm{Im}\tilde{\phi}_k(t)]^2}, \tag{9-4}$$

位相$\tilde{\vartheta}_k$满足

$$\tan\tilde{\vartheta}_k(t) = \mathrm{Im}\tilde{\phi}_k(t)/\mathrm{Re}\tilde{\phi}_k(t), \tag{9-5}$$

它的反函数给出$\tilde{\vartheta}_k(t)$在$[-\pi,\pi]$区间中的主值,$\tilde{\vartheta}_k(t)$的解还需要根据$\tilde{\phi}_k$的实部和虚部符号最后决定.

这样得到的位相$\tilde{\vartheta}_k(t)$是在实验室中观察的结果,我们需要将其转换到随波运动坐标系$(\xi,\tau)$,这是观察非线性波的动力学的恰当参照系,在这个坐标系中的位相相对于实验室坐标系的将出现多普勒移动.为计算在随波坐标系$(\xi,\tau)$中模式的位相,将波动解重新展开为

$$\phi(\xi,\tau) = \sum_k \widetilde{A}_k(\tau)\cos[k\xi + \tilde{\theta}_k(\tau)], \tag{9-6}$$

其中$\tilde{\theta}_k$与在实验室参照系中的模式位相$\tilde{\vartheta}_k$满足下面的关系[229,230]:

$$\tilde{\theta}_k(\tau) = \tilde{\vartheta}_k(\tau) + k\Omega t, \tag{9-7}$$

因此,多普勒移动的大小依赖于模式的波数$k$,波长越短,移动越大.这就好比一个大齿轮与一组半径各异的小齿轮咬合,随大齿轮旋转,小齿轮半径越小旋转的周数越多.

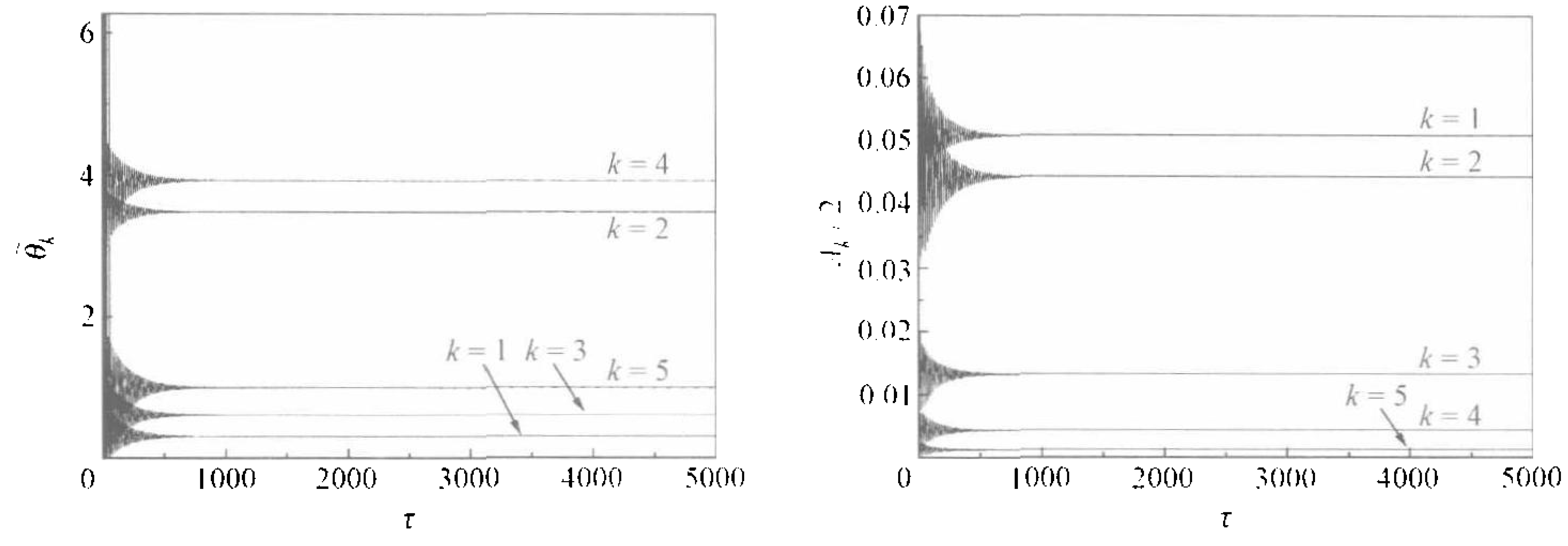
在用赝谱方法解方程(7-47)时,除离散化外没有对波动方程的形式作任何变动,也没有对解作任何近似假设,因此用上述方法计算的$\{\widetilde{A}_k(\tau),\tilde{\theta}_k(\tau)\}$结果非常可靠,除了赝谱方法本身以及模式截断等可能带来的误差外,它们真实地反映了该非线性波动系统各尺度模式运动的信息.

### 9.1.1 不动点向极限环的分岔

第八章已经说明,在随波坐标系中定态波解$\phi_0(\xi,\tau)$作为相空间中的一个不动点,可能发生鞍结点分岔和 Hopf 分岔,其中鞍结点分岔是一种绝对不稳定性,数值研究表明,在鞍结点不稳定的定态波不动点和它的紧邻找不到可实现的波动状态;与此相对照,在 Hopf 不稳定的定态波的紧邻,扰动波的各模式可以建立起相干的合作关系.下面我们将目光聚焦在 Hopf 不稳定的定态波解附近,观察失稳前后的波动状态.

先看稳定定态波$\phi_0(\xi)$的情形.图 9-1 给出$\Omega=0.60$,$\varepsilon=0.06$时模式$k=1\sim5$的位相$\tilde{\theta}_k(\tau)$[图(a)]和振幅$\widetilde{A}_k/2$[图(b)]随时间$\tau$的演化,它们是用上一节提出的

方法计算得到的，其中 $\tilde{\theta}_k(\tau)$ 已取了 $2\pi$ 范围内的主值. 由图可见，对应这个稳定的定态波，各模式的振幅和位相都渐近地趋向常数，它们与从定态波的模式方程组(7-52)得到的解完全相同. 这个结果也证实，在随波坐标系中定态波解 $\phi_0(\xi)$ 的确是相空间中的一个不动点，在本例中不动点是稳定的，只要初始条件在它的吸引盆内，轨道都将被吸引到这个不动点上[230].




(a) 位相 $\theta_k(\tau)$　　(b) 振幅 $A_k/2$

图 9-1　在随波坐标系中稳定定态波解的模式位相和振幅随时间的演化($\Omega=0.60$, $\varepsilon=0.06$)

从第八章的稳定性分析知道，对于 $\Omega=0.60$，当 $\varepsilon$ 增加到超过约 0.065 时(参考图 8-8)，定态波解 $\phi_0(\xi)$ 出现 Hopf 不稳定性，在失稳方向 $\tilde{k}=2$ 上的扰动被放大，相应的本征频率(记为 $\omega_{\tilde{k}-2}$)在运动中显现出来. 在相空间其他本征方向上虽然也有非零本征频率，但它们的振幅被抑制，频率不会在渐近波动中显现. 因此，迭加在定态波 $\phi_0(\xi)$ 不动点上的只有频率为 $\omega_{\tilde{k}-2}$ 的振动. 这样，与非线性时序系统的情形一样，Hopf 失稳的不动点在相空间中将发展成为一个极限环吸引子.

图 9-2 所示的是 $\Omega=0.60$ 时，在 $\varepsilon=0.06\sim0.07$ 参数区中的几个计算样本，相图(a)是 $\tilde{\theta}_{k-2}(\tau)$ 作为 $\tilde{\theta}_{k-1}(\tau)$ 的函数，(b)是 $\tilde{A}_{k-2}(\tau)/2$ 作为 $\tilde{A}_{k-1}(\tau)/2$ 的函数，由图可见，不仅模式的振幅，而且它们的位相也都从不动点分岔为极限环.

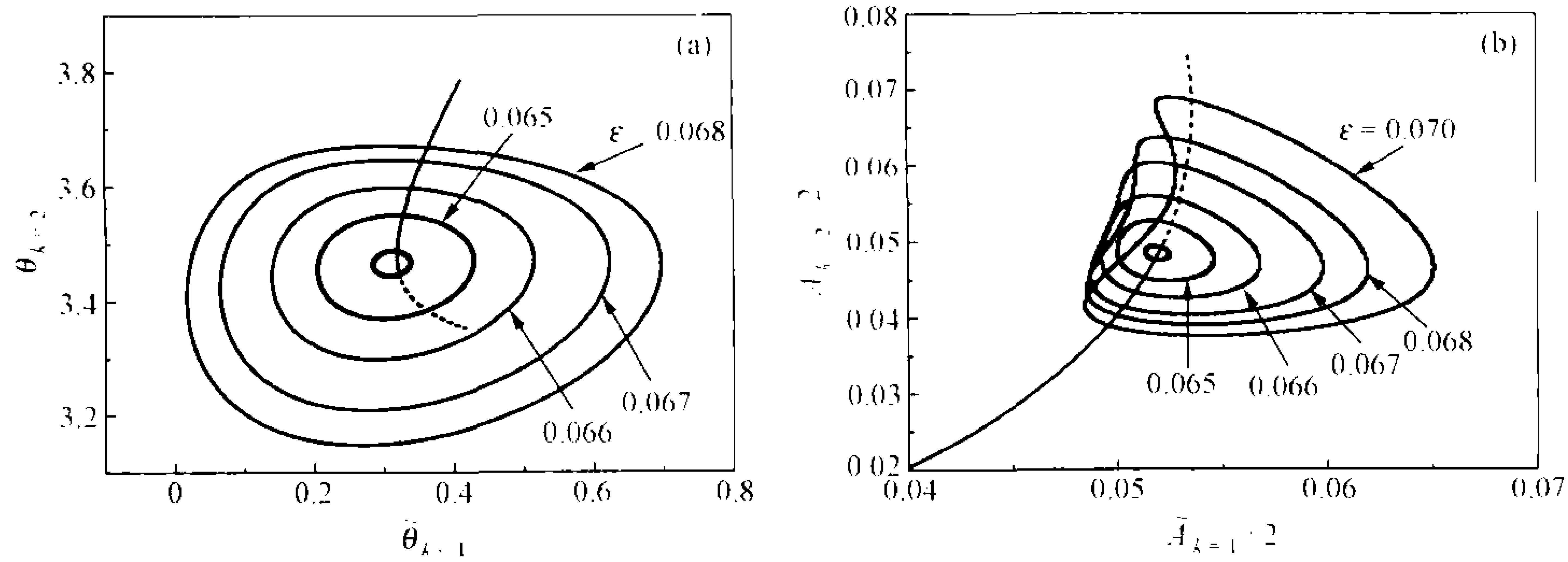



图 9-2　在随波坐标系中渐近波动解的模式位相和振幅的相图($\Omega=0.60$, $\varepsilon=0.06\sim0.07$)

在图 9-2 对应的参数区内，失稳准模振幅的线性增长率随 $\epsilon$ 增加，因此轨道最终被吸引在尺度越来越大的极限环上．图中可见一条曲线穿过这些极限环的中心，它是求解定态波 $\phi_0(\xi)$ 的模式方程(7-52)得到的结果，其中实线部分对应的是稳定的定态波解随 $\epsilon$ 的改变，虚线部分对应的是不稳定定态波解，图中的那些极限环正是从虚线上相应的不稳定定态波解分岔而来的[230]．

图 9-3 是出现逆 Hopf 分岔的参数区，$\Omega=0.60$，$\epsilon=0.13\sim0.15$(参考图 8-8)，在这个参数区中失稳准模振幅的线性增长率随 $\epsilon$ 增加逐渐减小，相应地图 9-3 中极限环的尺度也随 $\epsilon$ 增加逐渐缩小，最后稳定到不动点，图中以圆点表示．

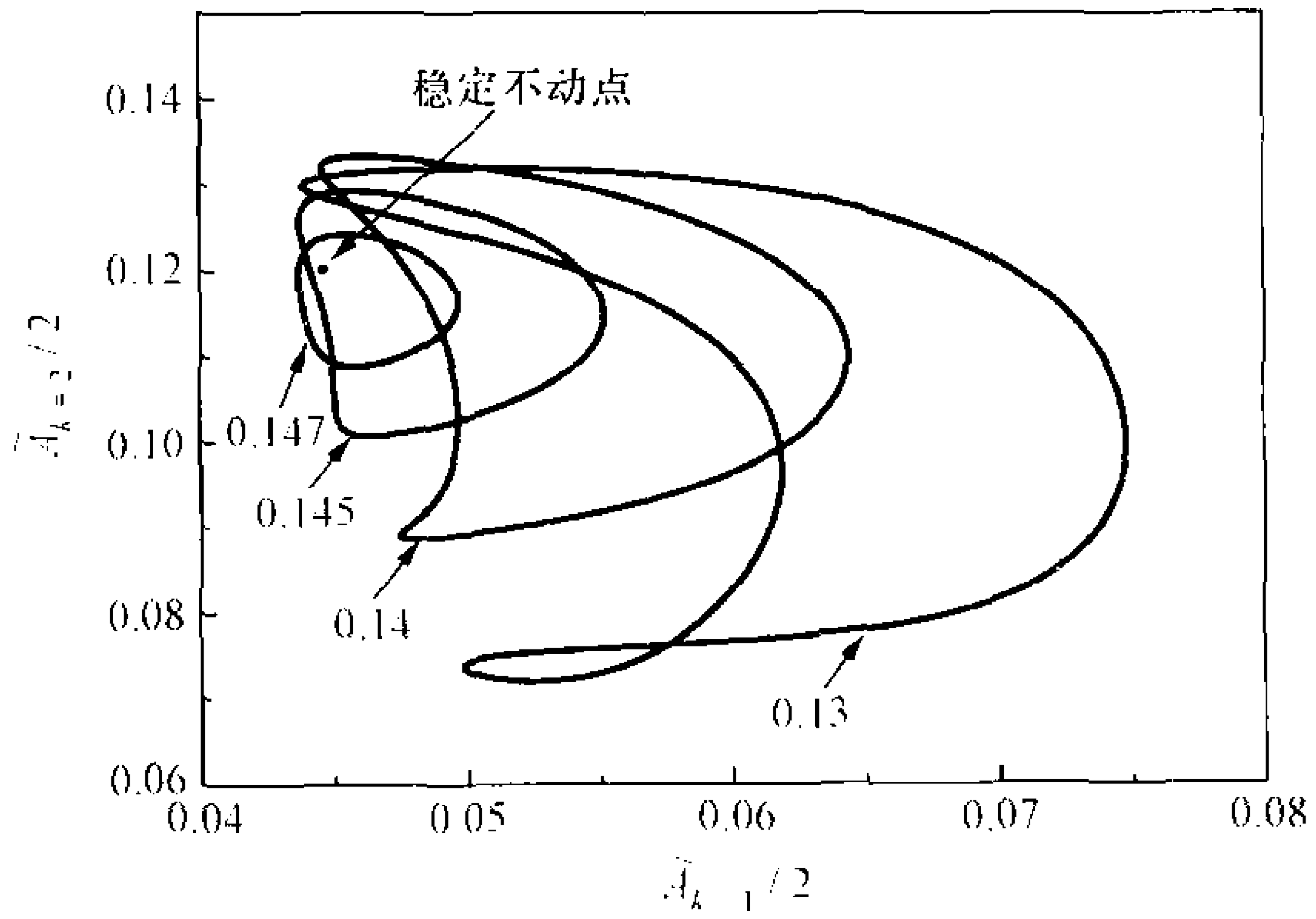
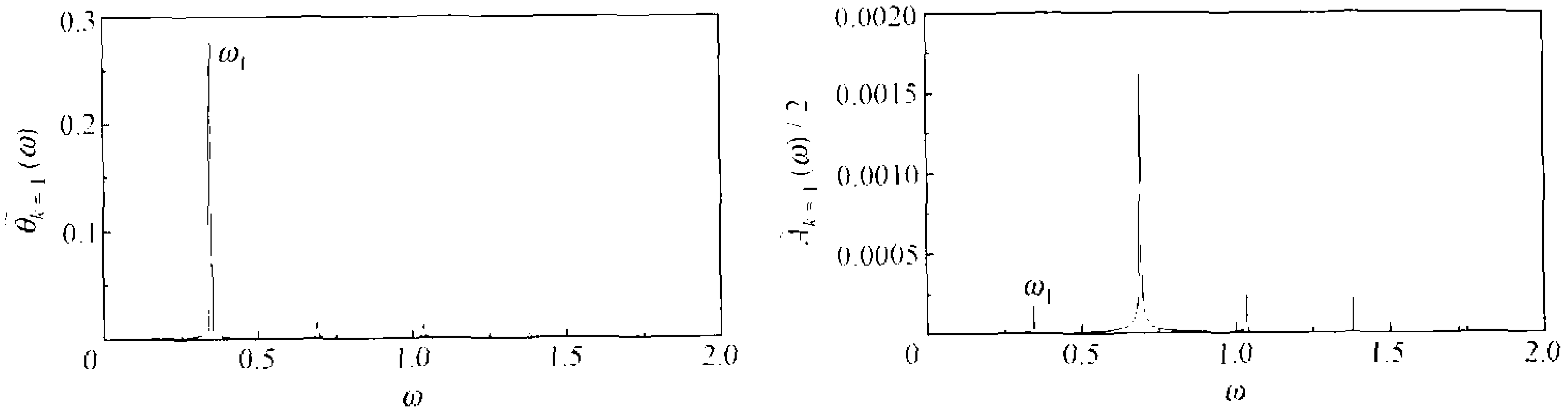



图 9-3　在随波坐标系中渐近波动模式振幅的相图($\Omega=0.60$，$\epsilon=0.13\sim0.15$)

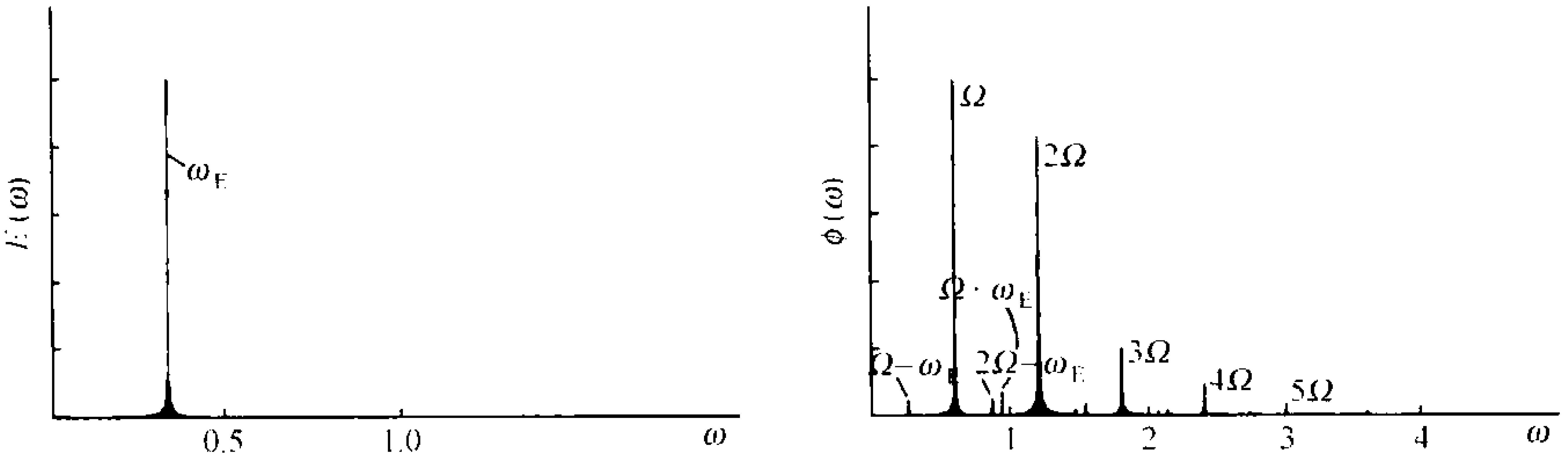
不难确认图 9-2 和图 9-3 中 Hopf 失稳的频率恰在扰动准模 $\tilde{k}=2$ 的本征频率附近，准模投影在所有傅里叶 $k$ 方向上，所以在任何 $k$ 方向都可以观察到这个频率．图 9-4(a)和(b)分别是 $\tilde{\theta}_{k=1}(\tau)$ 和 $\tilde{A}_{k=1}(\tau)/2$ 的傅里叶频谱($\Omega=0.60$，$\epsilon=0.10$)，它们显示基频 $\omega_1\approx0.345$ 和它的谐波频率 $n\omega_1$($n$ 为整数)的谱线，与图 8-8(b)比较，知道在极限环上运动的频率 $\omega_1$ 大体就等于相应定态波解失稳的本征频率 $\omega_{k=2}$．




(a) 位相 $\dot{\theta}_{k=1}(\tau)$ 的频谱　　(b) 振幅 $\dot{A}_{k=1}(\tau)/2$ 的频谱

图 9-4　渐近波能 $E(t)$ 为简单周期运动时，在随波坐标系中观察的模式位相和振幅的频谱($\Omega=0.60$，$\epsilon=0.10$)

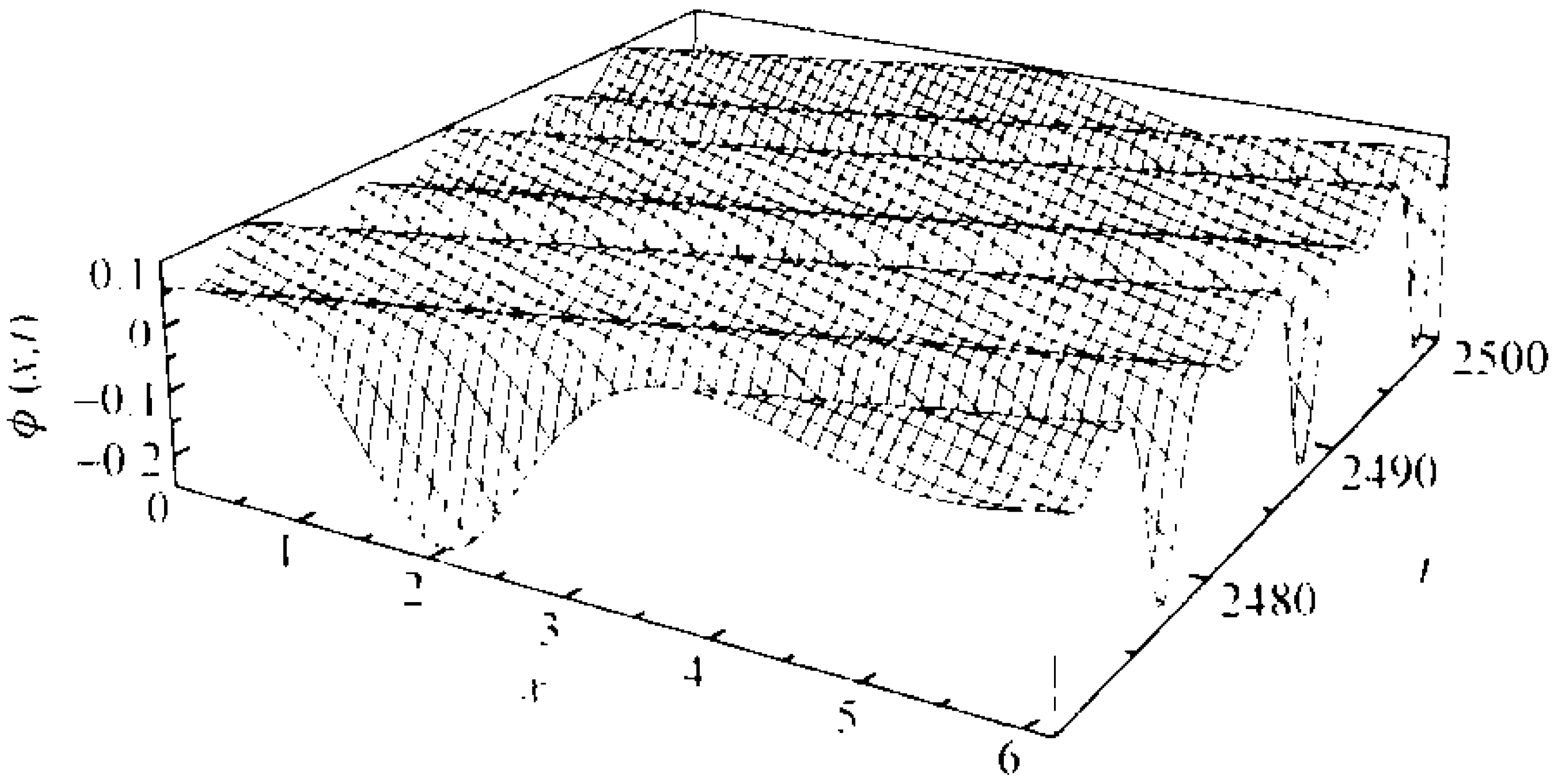
图 9-5 是 $\Omega=0.60$，$\varepsilon=0.0675$ 时用赝谱方法数值模拟波动方程(7-47)得到的渐近态的频谱．图(a)是周期振荡的波能 $E(t)$的谱，其中基频位于 $\omega_E\approx0.34$，正好就在定态波解 Hopf 失稳的频率 $\omega_{k=2}$附近；图(b)是在实验室坐标系固定空间点处观察的涨落电位 $\phi(x=0,t)$的频谱，它的形式要复杂些，失稳频率 $\omega_E$ 以与 $m\Omega(m=1,2,\cdots)$拍频的形式出现在波谱中，这是因为定态波解以群速度 $\Omega$ 运动，Hopf 失稳频率发生了多普勒移动的缘故.



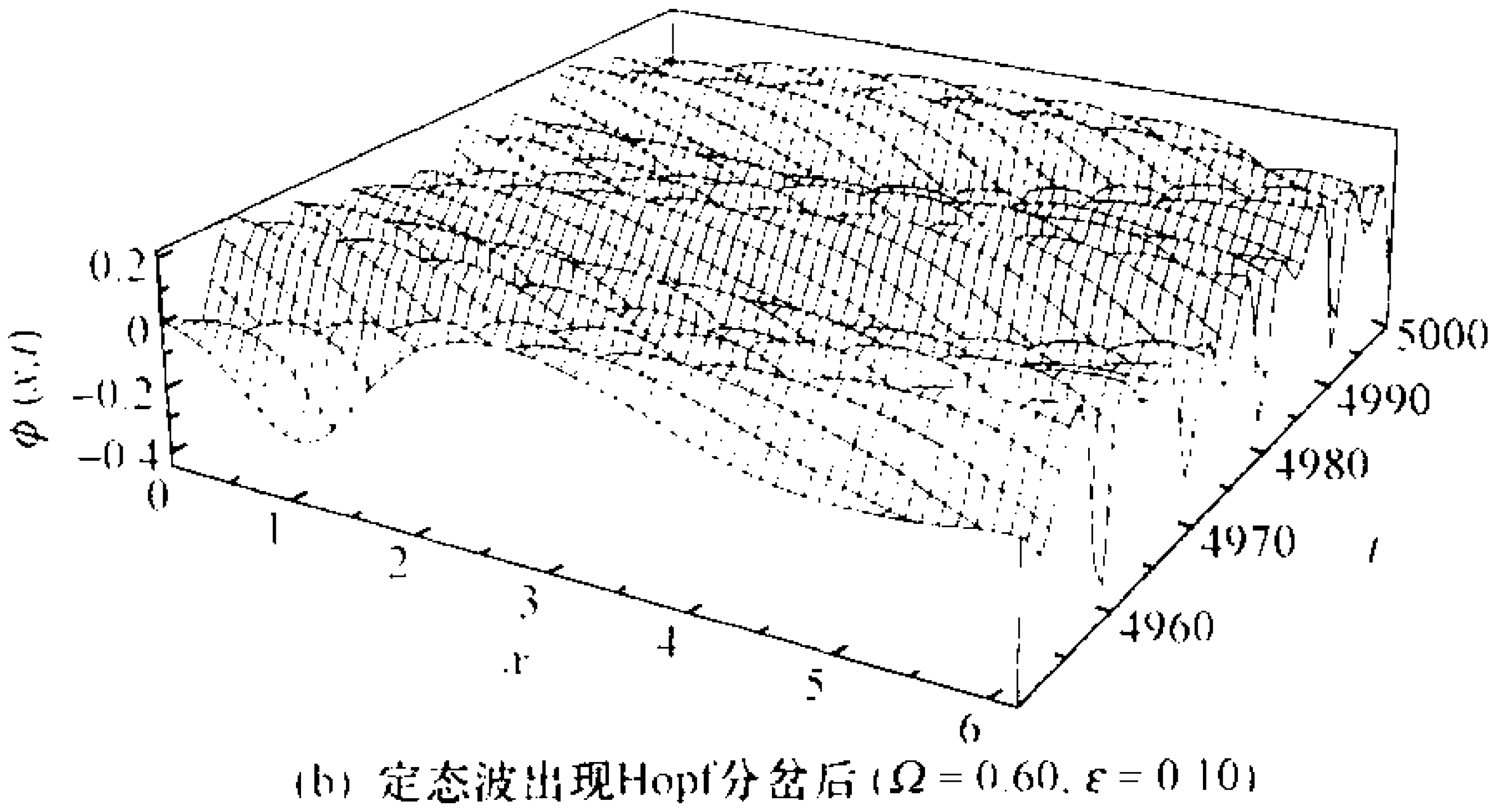
(a) 波动能量的频谱 $E(\omega)$ (b) 在固定空间点测量的波函数的频谱 $\phi(\omega)$

图 9-5 数值模拟波动方程(7-47)得到的渐近波能 $E(t)$显示简单周期振荡时的频谱($\Omega=0.60$，$\varepsilon=0.0675$，实验室坐标系)

波动模式振幅和位相的 Hopf 分岔使得波动看起来更为飘忽不定，作为比较，图 9-6(a)和(b)分别给出分岔前后渐近波动的时空斑图：图(a)中 $\Omega=0.60$，$\varepsilon=0.06$，



(a) 稳定的定态波 ($\Omega$ 0.60, $\varepsilon$ 0.06)



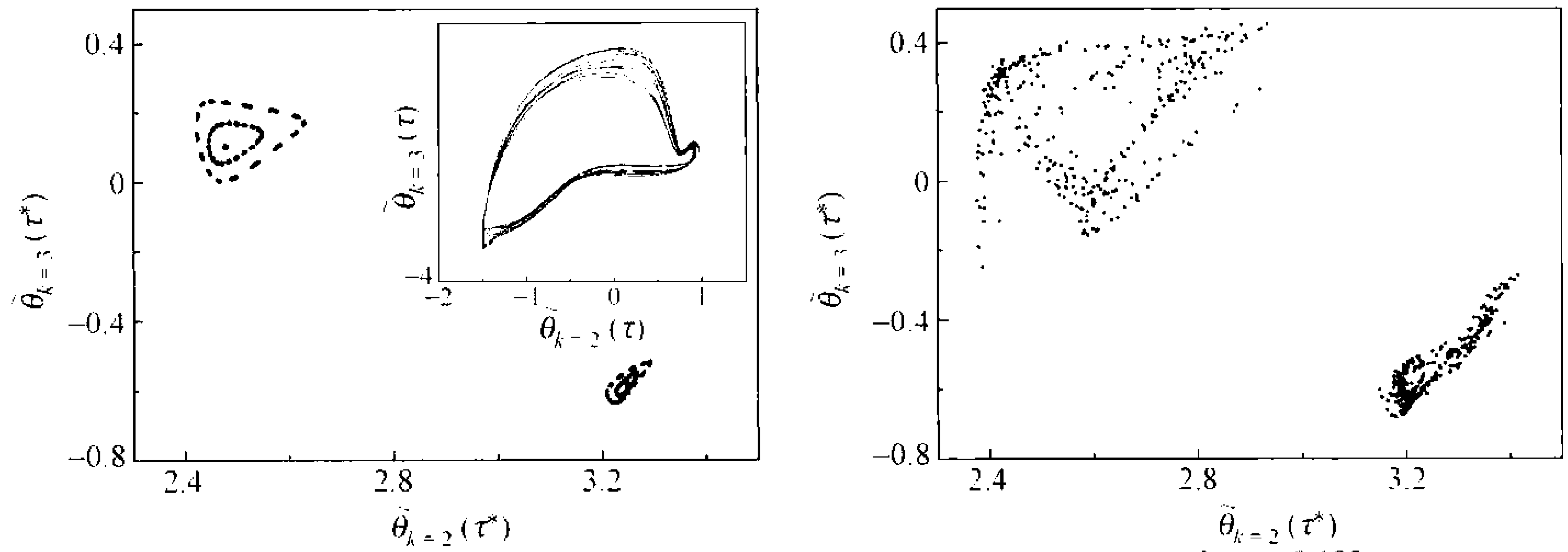
(b) 定态波出现Hopf分岔后 ($\Omega=0.60$, $\varepsilon=0.10$)

图 9-6 定态波发生 Hopf 分岔前后的渐近波斑图 $\phi(x,t)$

这是一个稳定定态波 $\phi_0(x,t)$ 的时空斑图，波的形状和幅度不随 $t$ 改变；图(b)中 $\Omega=0.60$，$\varepsilon=0.10$，此时定态波解已经出现 Hopf 不稳定性，图中实现了的波动解 $\phi(x,t)$ 看起来变化无常，但从前面的分析知道，如果在随波坐标系中观察，它的轨道运动在相空间中严格地遵循一定的规律：所有傅里叶模式的振幅和位相都以同一个频率围绕不动点作周期运动.

### 9.1.2 在高维环上的空间相干波动

当参数 $(\Omega,\varepsilon)$ 进一步改变时，图 9-2 所示的极限环不再稳定，各模式振幅和位相 $\{\widetilde{A}_k(\tau),\tilde{\theta}_k(\tau)\}$ 的运动继续分岔. 图 9-7(a)中给定 $\Omega=0.65$，计算了 $\varepsilon=0.186$，0.187，0.188 这 3 个参数下轨道运动的庞加莱截面，即每当轨道经过模式 $k=1$ 的位相 $\tilde{\theta}_{k=1}(\tau)$ 等于 0 和 $\pi$ 的时刻(记为 $\tau^*$)，记录模式 $k\neq1$ 的位相，图中是位相 $\tilde{\theta}_{k=3}(\tau^*)$ 作为 $\tilde{\theta}_{k-2}(\tau^*)$ 的函数. 由图可见轨道的截点分别形成了两套闭合曲线，这说明，对应每一个 $\varepsilon$ 值，轨道都在相空间中一个面包圈样的二维环形拓扑上运动. 图 9-7(a)中的庞加莱截面就像沿面包圈大直径切了一刀，两个切口边界分别形成了闭合曲线. 位于这些闭合曲线的中心有一个极限环的庞加莱截点，那些二维环就是从这个极限环 Hopf 分岔而来的. 除在极限环上运动的频率而外，一个新频率伴随 Hopf 分岔出现. 图 9-7(a)中的小插图是没有作庞加莱截面时的相图 $\tilde{\theta}_{k=3}(\tau)$ 作为 $\tilde{\theta}_{k-2}(\tau)$ 的函数，轨道在相空间中准周期地演化. 对应二维环流形，波动 $\phi(x,t)$ 的时空行为看起来更加捉摸不定.

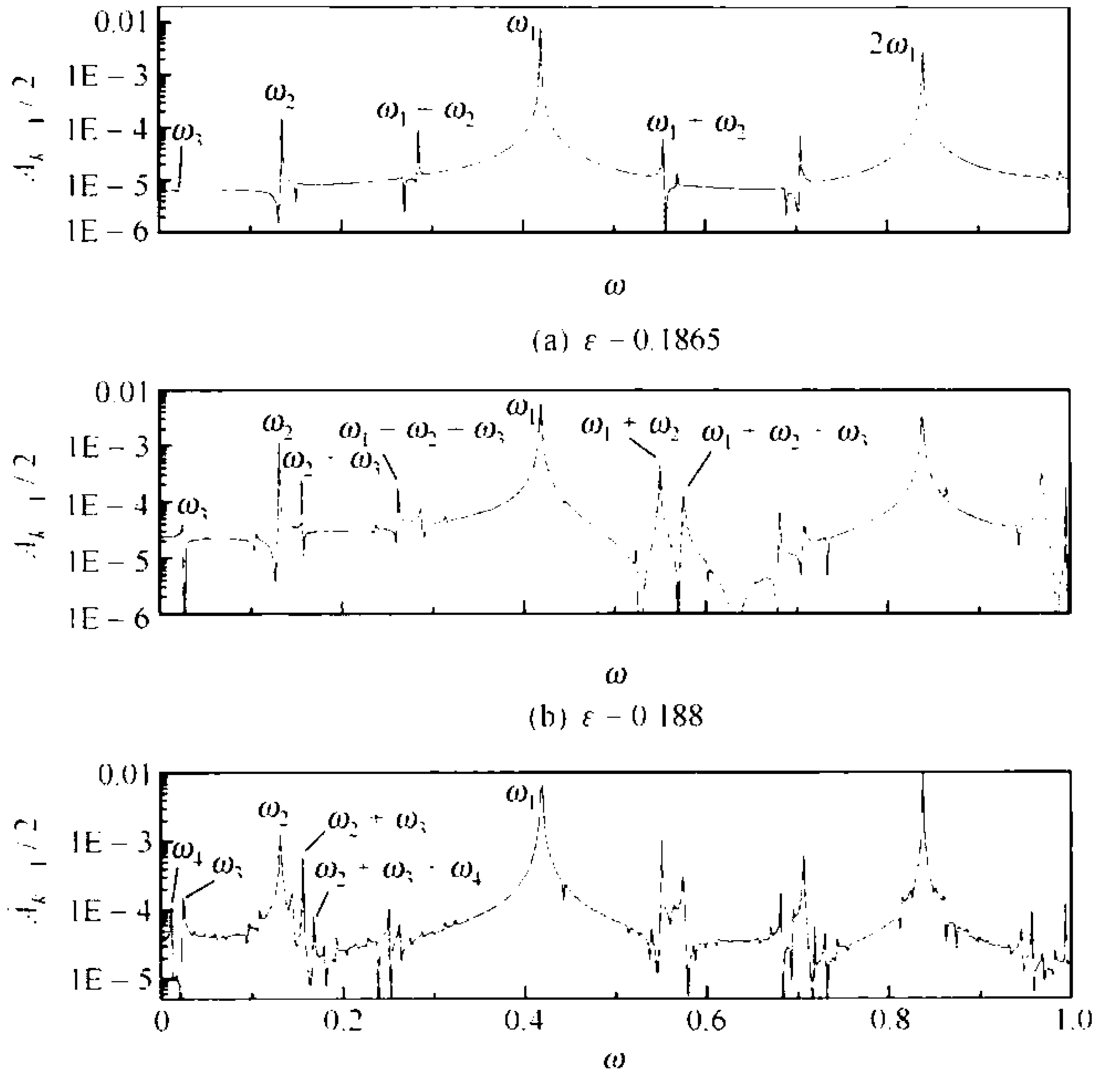



(a) $\varepsilon=0.186, 0.187, 0.188$　　(b) $\varepsilon=0.192$

图 9-7 在随波坐标系中波动轨道的庞加莱截面图($\Omega=0.65$)

随 $\varepsilon$ 继续增加，二维环拓扑也会失稳，出现进一步的分岔. 图 9-7(b)是 $\Omega=0.65$，$\varepsilon=0.192$ 时的庞加莱截面图，计算方法与图(a)相同. 图中轨道截点散布在更大的相空间范围，它们已形不成光滑的曲线，说明轨道并非简单地围绕二维环面运动，但这些截点仍集中形成了两个斑块，所在位置与图(a)中的两套闭合曲线明显对应.

当吸引子有二维以上环形拓扑时，它们的形态很难从庞加莱截面图分辨出来，这时借助谱分析可获得更多的信息. 图 9-8(a)是 $\Omega=0.65$，$\varepsilon=0.1865$ 时模式 $\widetilde{A}_{k=1}(\tau)/2$ 的频谱，在这组参数下，轨道在二维环上运动，图中容易分辨出两个特征频率的谱线 $\omega_1\approx0.418$ 和 $\omega_2\approx0.133$ 以及它们的拍频 $m\omega_1\pm n\omega_2$，其中 $\omega_1$ 是失稳到二维环之前在极限环上的运动频率，$\omega_2$ 则是极限环 Hopf 失稳后新出现的频率. 在这个例子中 $\omega_1$ 和 $\omega_2$ 不可约，若时间足够长，轨道在庞加莱截面上的截点将充满一条闭合曲线，如图 9-7(a)上的那样；如果这两个频率变得可约，二维环面将蜕变为一条封闭曲线，相应在庞加莱截面上出现的是有限个孤立截点.




(a) $\varepsilon=0.1865$

(b) $\varepsilon=0.188$

(c) $\varepsilon=0.189$

图 9-8　在随波坐标系中振幅 $\widetilde{A}_{k=1}(\tau)/2$ 的频谱($\Omega=0.65$)

图 9-8(b)和(c)分别是 $\varepsilon=0.188$ 和 0.189 时模式 $\widetilde{A}_{k=1}(\tau)/2$ 的频谱，仍有 $\Omega=0.65$，在图(b)上我们可以分辨出 3 个独立频率，其中 $\omega_1$ 和 $\omega_2$ 与图 9-8(a)中在二维环上运动的两个频率分别对应，频率 $\omega_3$ 在图 9-8(a)中已初露头角，这里更明显了；在图(c)上可进一步分辨出第四个独立频率 $\omega_4$. 在图上我们标出了这些独立频率及其谐频，以及它们之间的拍频[230].

综合以上结果我们可以建立起这样一个图像：在无穷维相空间$\{\widetilde{A}_k,\bar{\theta}_k\}$中，波动系统的吸引子从一个稳定不动点，逐渐分岔到极限环、二维环、三维环等高维环

形拓扑,虽然多个频率的出现带来分辨上的困难,在图 9-8(c)中有 4 个独立频率应是无疑的,说明拓扑环至少已分岔到四维. 这样,从不动点的 Hopf 失稳开始,看起来系统又经历了一系列的 Hopf 分岔,每一次 Hopf 分岔都将一个新频率带到系统中,使得吸引子发展成越来越高维的拓扑环.

第五章中已介绍,Ruelle 和 Takens 等提出第三个不可约频率的出现将导致二维环的破坏和混沌运动的发生[85,86],在中性流体和等离子体中都观察到这个途径,该途径还特别得到了漂移波弱湍实验的证实[179,174,38]. 不过,如第五章曾提到的,也有一些实验研究展现的结果却使得这个问题变得扑朔迷离,例如,在非线性振荡电路实验中,同样是有 3 个竞争的频率,在不同参数区却分别表现出有规或混沌的运动,该文作者认为,他们的实验结果既不能肯定也不能否定 Ruelle-Takens 途径[94],在 Rayleigh-Bénard 实验中甚至清楚地观察到有 4 个或 5 个独立频率的非混沌运动[95]. 这些结果说明,在一些条件下 3 个甚至更多的不可约频率并没有导致混沌,轨道仍可保持在拓扑环上运动. 就这一点而言,图 9-8 的结果与文[95]的一致,第三个独立频率的出现,并没有立即破坏吸引子的环形拓扑. 是不是因为连续空间带来了某些新的效应,致使第三个独立频率不一定能直接导致混沌? 的确,文[95]的作者就强调了空间局域化效应对模式运动的影响. 所谓空间局域化,是指某些模式的运动被约束在一定空间范围,不能自由地传播,这些模式因此难于调节与其他模式之间的相对关系,如它们的相对位相等,这极大地限制了波动可能形成的状态. 在第十章中我们将提出证据说明,在模型(7-47)中,在滞后负斜率分支上的那些鞍结点不稳定的定态波解 $\phi_0^*(\xi)$就可以像势阱那样,在一定条件下限制扰动模式在空间中的自由运动.

那么,从以上这些结果我们是不是可以得出结论说,这样的 Hopf 分岔序列将无限地持续下去呢? 如是,这将回到朗道提出的湍流起因图像. 不过,事实是 Hopf 分岔序列并没有也不可能无限地进行下去,第十章中将说明,目前的局域分岔序列会被一次全局分岔所中断;除此之外,如下面将看到的,吸引子的环形拓扑结构也使分岔过程难以一直平稳持续.

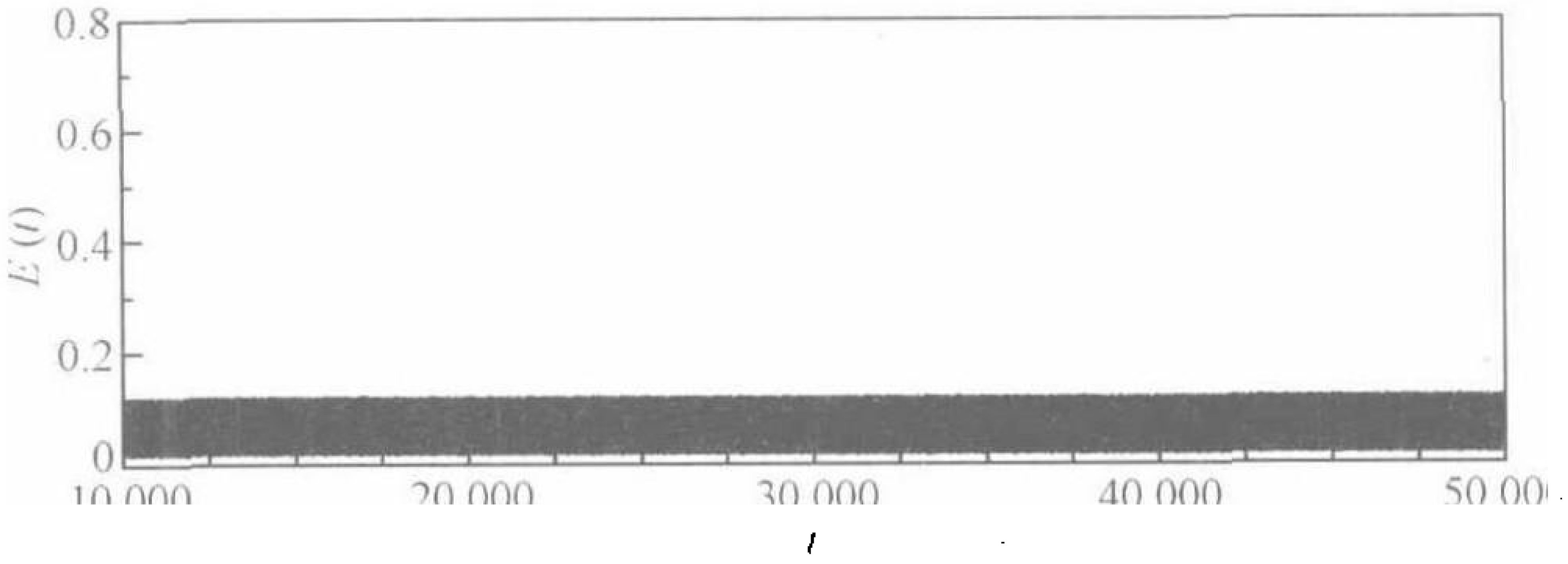
注意,在图 9-8 中最早的两次 Hopf 分岔引出的频率 $\omega_1$ 和 $\omega_2$ 是频谱中两个最强的峰,因此尽管吸引子的维数已经很高,运动流形的拓扑看起来仍有一个二维环的骨架,它是由两个振幅最大的周期运动的螺旋形轨道在相空间中划出的一个光滑二维环面,进一步的 Hopf 分岔使环面变得粗糙,却没有改变吸引子的基本架构,它仍有面包圈样. 这一事实得到图 9-7(b)中庞加莱截面结果的支持,图中吸引子在 $\tilde{\theta}_{k=1}=0,\pi$ 处的两个截斑明确地分开,就像一个面包圈被拦腰一刀所得到的切口一样,切口虽不再是光滑曲线,里面布满了截点,吸引子的二维环骨架却暴露无遗. 形象地说,一个有高维环形拓扑的吸引子看起来就像一个粗糙的面包圈,随着

参数变化，这个面包圈变得越来越“胖”，越来越粗糙，这样发展下去，终致运动流形出现拓扑奇点，Hopf 分岔也就不能再平稳地持续下去了. 下一节我们将提出支持这一论点的进一步的证据[230].

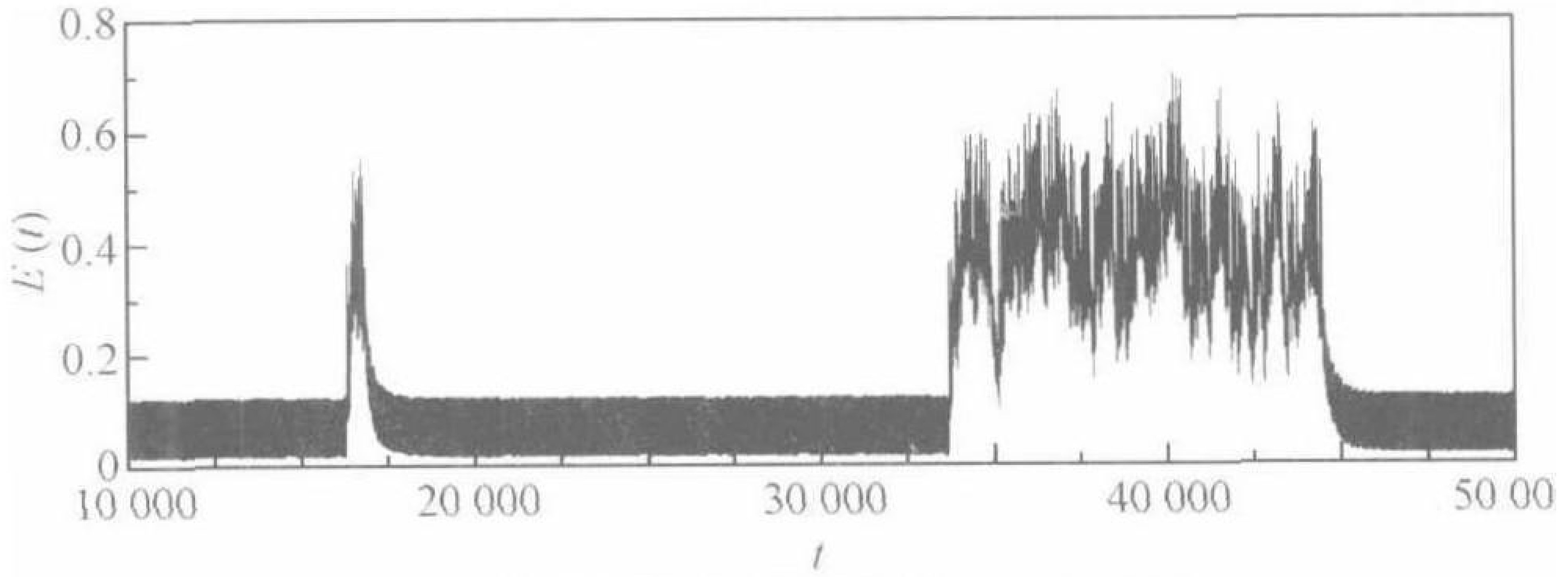
## § 9.2 拓扑环的奇点和波动中的阵发现象

阵发是自然界中十分普遍存在的一个现象，在波动系统中也很常见，第五章中已经介绍了几种不同类型的阵发现象，如 I-型阵发的特点是运动在平稳的准周期振荡和大幅的混沌爆发之间来回切换. 在模型(7-47)中，也观察到典型的 I-型阵发现象，计算表明，对于给定 $\Omega$ 值，阵发出现在吸引子已经分岔到高维环拓扑的某个临界 $\varepsilon$ 之后，如对于 $\Omega=0.65$，阵发约在 $\varepsilon$ 大于 0.192 以后出现.

图 9-9(a)是 $\Omega=0.65$，$\varepsilon=0.192$ 时波能 $E$ 随时间的演化，它显示平稳的准周期振荡，从上一节知道，在这个参数下，各个波动模式的轨道都在相空间中一个高维环形拓扑上周而复始地运动；图 9-9(b)中 $\Omega=0.65$，$\varepsilon=0.19294$，驱动强度仅略高于(a)中的值，波能却出现了阵发，它的准周期振荡相几乎与(a)中的一样，显然在这个相中运动轨道一定也是缠绕在高维环上的；但准周期相总是间或地被混沌爆发相所打断，爆发相可长可短，这个期间的运动显得十分无序，每次混沌爆发出现得非常突然，看不到任何先兆，爆发产生和持续的时间似乎也完全是随机的，而从爆发相到准周期振荡相却有一个明显的轨道回调过程[230]. 究竟是什么神秘的力量使波动反复地出现爆发，爆发后又能调节回到高维环拓扑呢？




(a) 波动能量随时间准周期振荡 ($\varepsilon=0.192$)

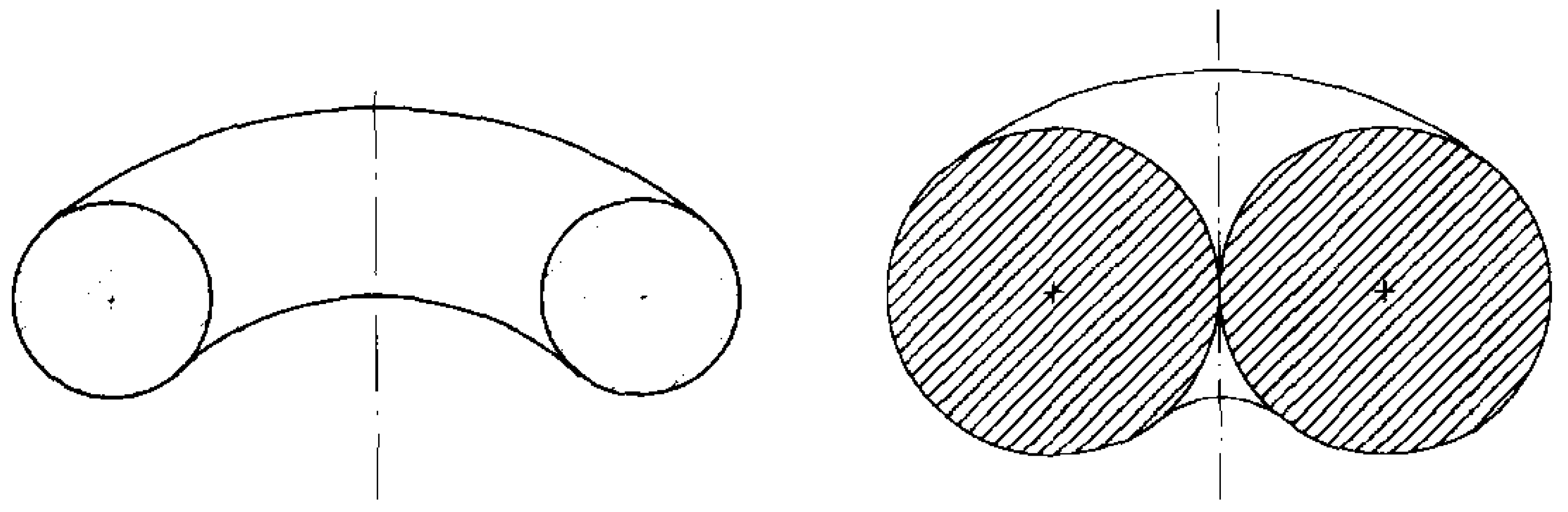



(b) 波动能量出现混沌阵发 ($\varepsilon=0.19294$)

图 9-9 波能 $E(t)$ 的阵发现象($\Omega=0.65$)

在第五章中介绍的虫口映射模型中的 I-型阵发现象，在切分岔的基础上得到了解释（参考图 5-13）．当映射函数曲线几乎与对角线相切时，它们之间有一个狭窄通道．轨道在通道中接近周期地运动．当走出这个通道时，映射值变得混沌．波动方程（7-47）是否也能简化成一个非线性映射，在切分岔的基础上理解阵发现象呢？这是一个可能的分析途径，但结果必定不理想，因为如果在映射曲线与对角线之间形成了一个狭窄通道，在通道中运动的振荡包络随时间一定会经历缓慢的变化，解释不了图 9-9(b) 在准周期相中不变的振荡包络．我们将另辟蹊径，探究当非线性波的轨道吸引子有高维环形拓扑时有可能发生什么情况．

对应图 9-9(a) 的参数，在随波坐标系中波动模式的振幅和位相 $\{\widetilde{A}_k,\tilde{\theta}_k\}$，都在高维环上运动，前面已指出，这样的高维环却有二维环的骨架．图 9-10 是二维环剖面示意图，随着图(a)中面包圈样的二维环变得越来越粗大，它的中心孔洞终将消失，如在图(b)中显示的那样，孔洞的两个侧面出现相切，在切点上轨道运动没有确定的方向．

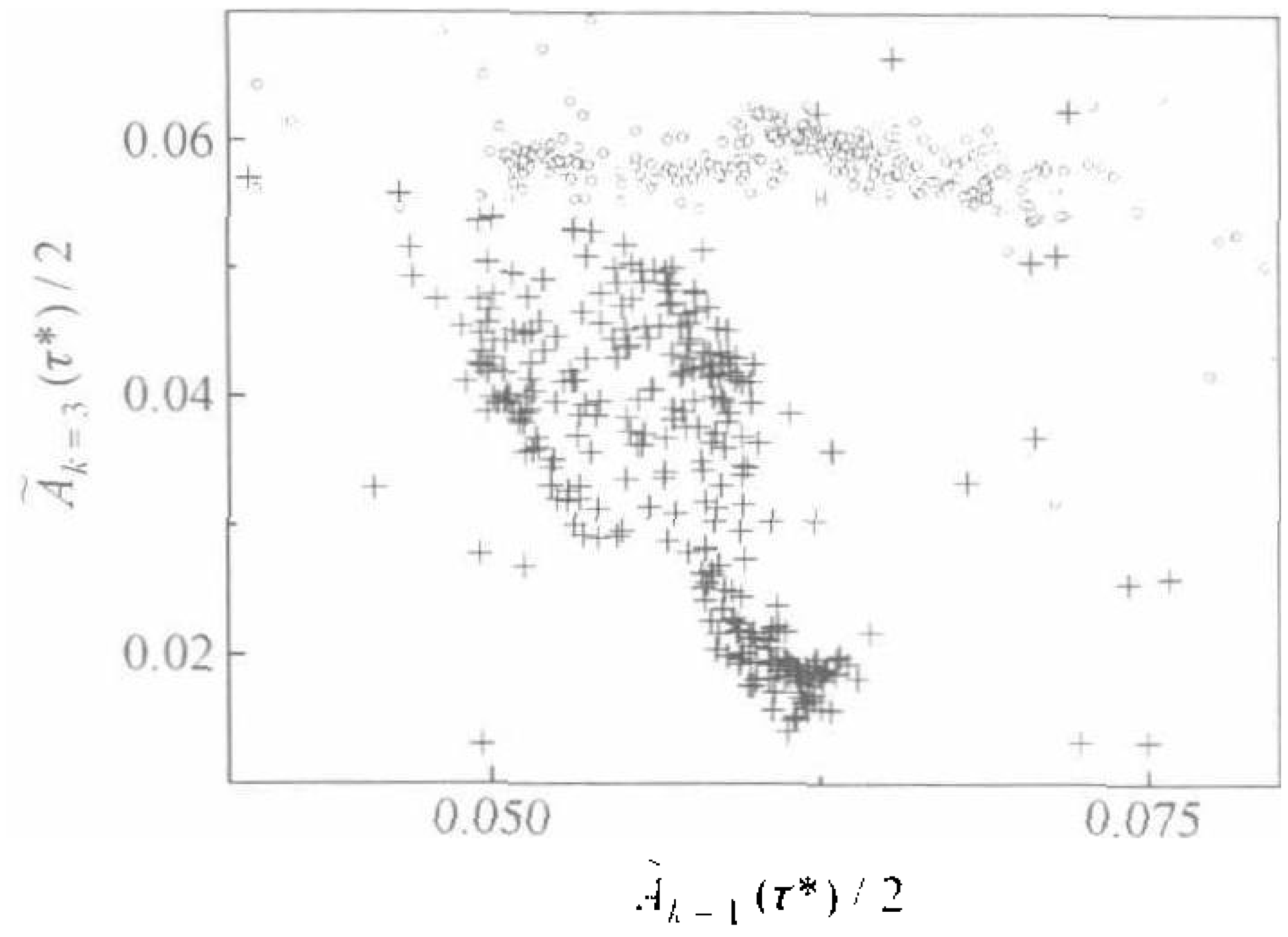


(a) 普通二维环　　　　(b) 二维环内侧面相切时出现拓扑奇点

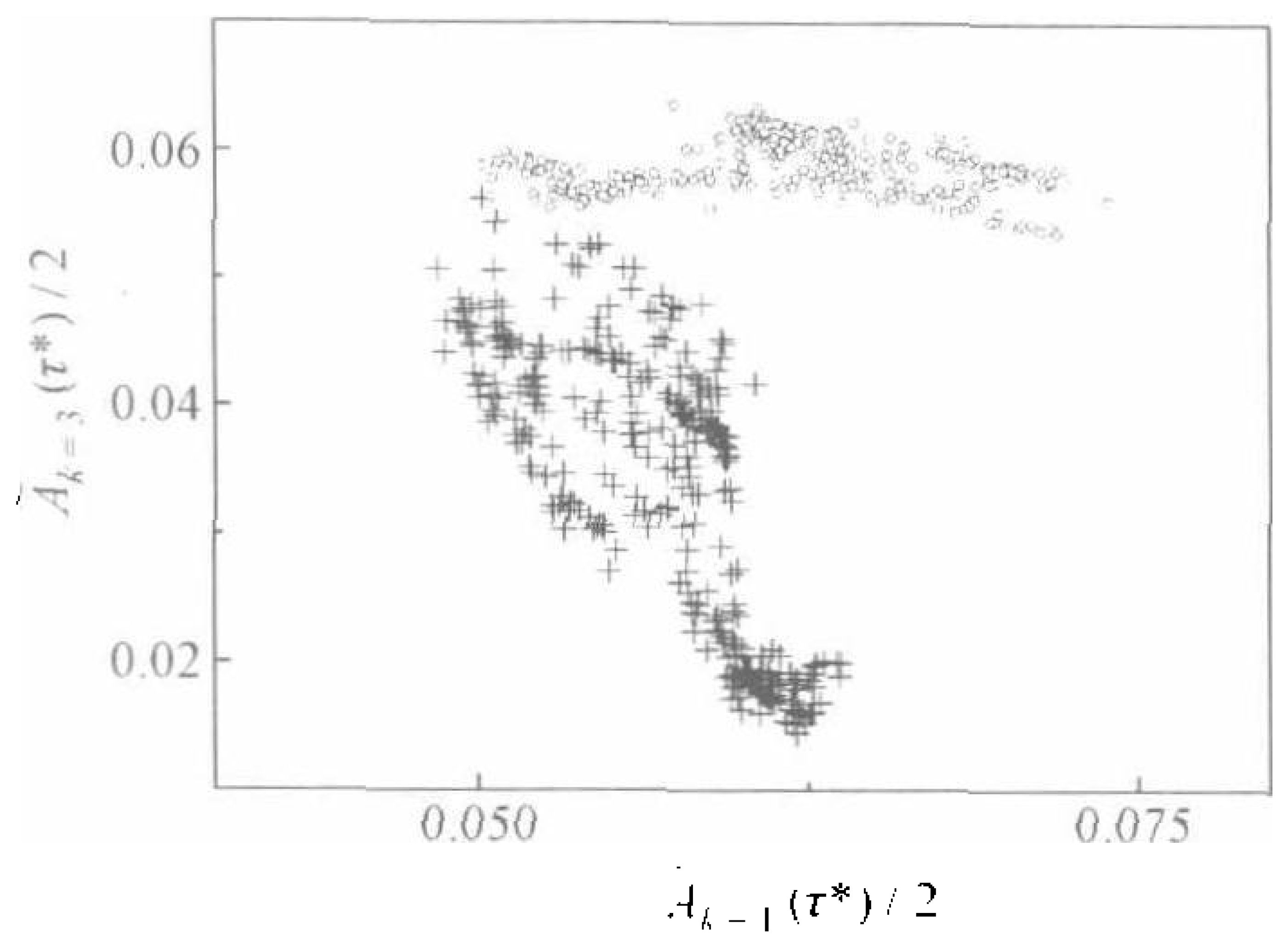
图 9-10　二维拓扑环的剖面示意图

这有点类似于图 4-1(b) 中在球形拓扑两个极点上的情形，只是这里两个极点黏在一起，变成了拓扑环的奇点．模型（7-47）的实际情况比示意图 9-10 还要复杂些，那里的吸引子流形是一个高于二维的拓扑环，形状看起来像粗糙的面包圈，随着这个高维拓扑环的二维环骨架变得粗大，在相空间的某（几）个而不是所有方向上，面包圈的中孔将收缩为零，出现拓扑奇点．研究表明，图 9-9(b) 中的阵发现象，与拓扑奇点的出现直接相关[230]．

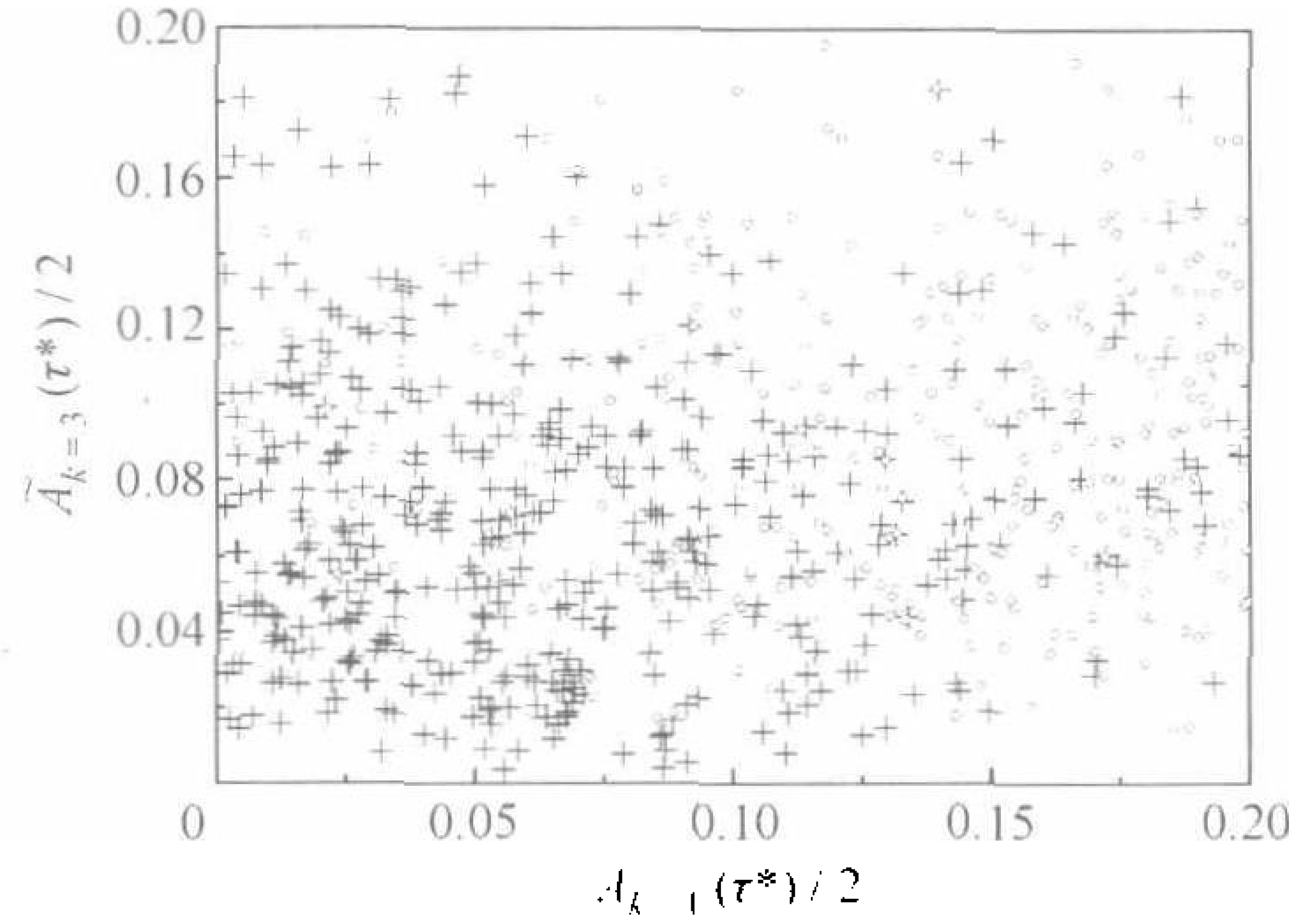
为说明这个问题，图 9-11 给出波动模式振幅的庞加莱截面图，$\widetilde{A}_{k=3}(\tau^*)/2$ 作为 $\widetilde{A}_{k-1}(\tau^*)/2$ 的函数，这里 $\tau^*$ 表示轨道经过 $\tilde{\theta}_{k-1}=0,\pi$ 的时刻，参数与图 9-9(b) 完全相同，轨道通过 $\tilde{\theta}_{k=1}=0$ 时的截点用“∘”标记，通过 $\tilde{\theta}_{k-1}=\pi$ 时的截点用“＋”标记．其中(a)～(c)对应图 9-9(b) 中的 3 个不同时段：(a) $\tau=15\,000\sim20\,000$，在这一时段中波能 $E(t)$ 既包含了准周期振荡相也包含了短暂的爆发相；(b) $\tau=20\,000\sim25\,000$，运动完全是准周期振荡；(c) $\tau=35\,000\sim45\,000$，运动完全处于爆发相．比较图 9-11(a)～(c) 这三张图，不难注意到在纯准周期振荡相的图 9-9(b) 中，截点“∘”




(a) $\tau=15\,000-20\,000$，准周期振荡和混沌爆发的混合相




(b) $\tau=20\,000-25\,000$，准周期振荡相




(c) $\tau=35\,000-45\,000$，混沌爆发相

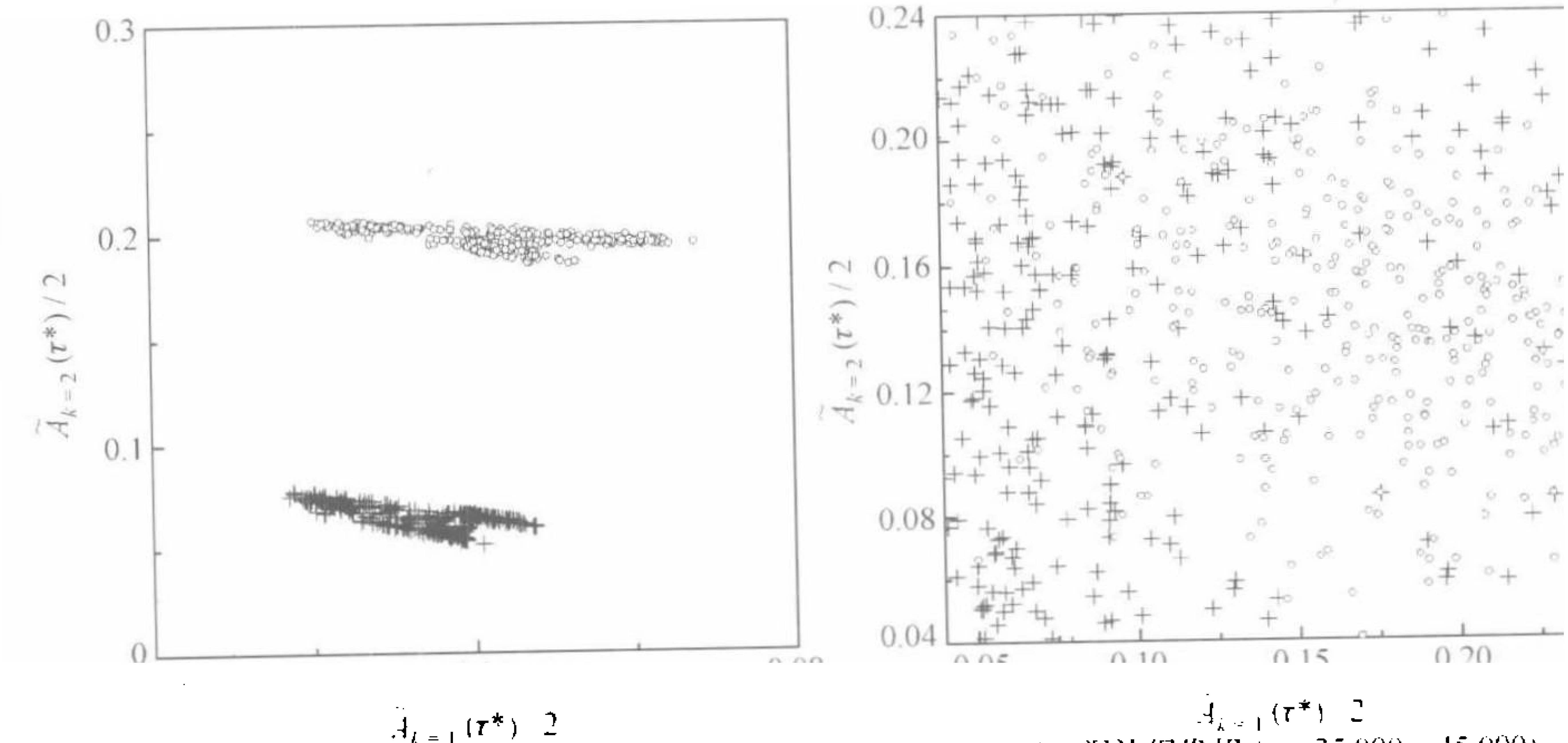
图 9-11　在随波坐标系中波动轨道的庞加莱截面图($\Omega=0.65$，$\varepsilon=0.192\,94$)

和截点“+”各自形成了两片截斑，但两个截斑在相空间中相接，仔细观察可以看到有一个“+”点与一个“∘”点在图上占据了几乎相同的位置；在纯爆发相的图 9-11(c)中，“+”点与“∘”点则完全混杂地散在分布，没有出现截然分开的斑块，而且截点分布的相空间范围比准周期相(b)中的大得多；最后，在准周期相与爆发相混合的图 9-11(a)中，既有类似于图(b)中的两片集中分布的截斑，又有类似于图(c)中混杂的散在截点.

从上面的结果我们提出波能阵发的如下产生机制：随着二维环骨架变得越来越胖大和粗糙，在某(几)个方向上环面内侧出现相切，高维环产生拓扑奇点，切点上的轨道没有确定的方向；当轨道运动到这一点时，有可能继续沿环面上的螺旋形轨道前进，维持平稳的准周期振荡，也有一定几率穿过奇点，运动到拓扑环的另一侧. 在后一情况下，环形拓扑被破坏，轨道得以在更大的相空间范围内行走，这引起了波能混沌爆发. 这类轨道穿越奇点破坏环形拓扑的事件一再发生，每次穿过奇点时轨道的方向和运动状态都可能不同，回调到环形拓扑的时间也因此各异，这造成了长短不一的爆发相，出现了类似于图 9-9(b)中那样的 I-型阵发现象. 如果追踪阵发刚出现时的轨道，可以看到截点“+”(“∘”)逐步入侵到原来截点“∘”(“+”)占据

的相空间区域,它清楚地显示了环形拓扑被破坏的过程.

所有这些观察都支持波能阵发现象是环形拓扑奇点引起的这一观点.不过,如前面曾提到的,在波动系统的无穷维相空间中,奇点并没有出现在所有方向上.在图 9-9 的例子中,如换一个相空间方向作庞加莱截面图,将看不到奇点.图 9-12 是 $\widetilde{A}_{k=2}(\tau^*)/2$ 作为 $\widetilde{A}_{k=1}(\tau^*)/2$ 函数的庞加莱截面.参数和截取方法同图 9-11.在准周期相的图 9-12(a)[$\tau=20\,000\sim25\,000$,对应图 9-11(b)]中,两个截斑明确地分开,这表示高维环的内侧面还远达不到相切,更不可能出现奇点;可是在爆发相的图 9-12(b)[$\tau=35\,000\sim45\,000$,对应图 9-11(c)]中,仍然看到截点“+”和“∘”混杂地散布在很大的相空间范围,很明显,这完全是由于在图 9-11 所示的庞加莱截面方向上轨道穿越了奇点、破坏了环形拓扑所造成的结果.

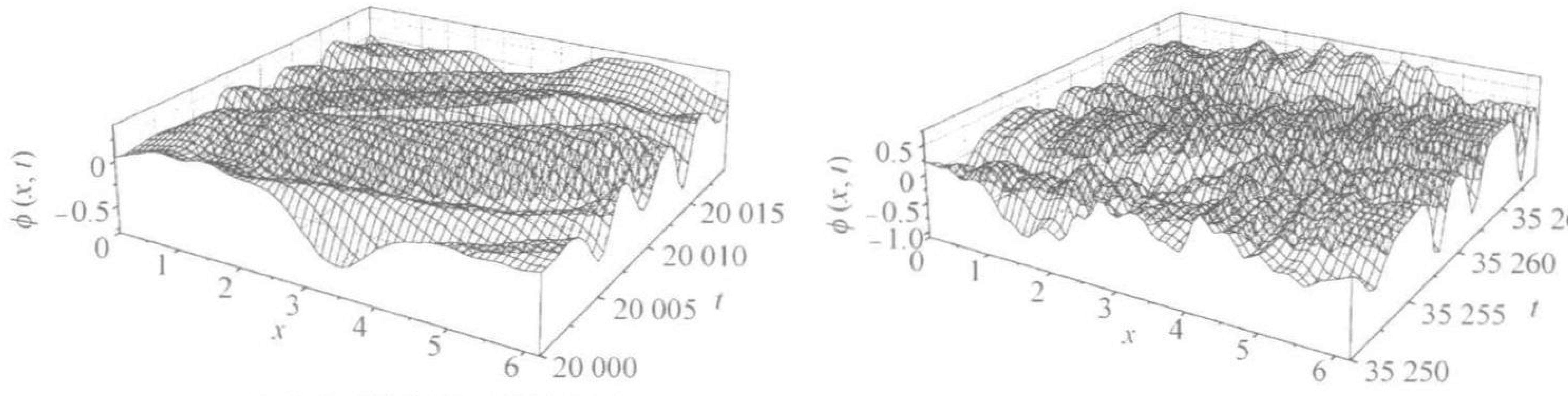



(a) 准周期振荡相($\tau=20\,000\sim25\,000$)　　(b) 混沌爆发相($\tau=35\,000\sim45\,000$)

图 9-12　在随波坐标系中波动轨道的庞加莱截面图($\Omega=0.65$,$\varepsilon=0.19294$)

图 9-13 是波能 $E(t)$ 准周期相[图(a)]和爆发相[图(b)]下的时空斑图 $\phi(x,t)$.(a)中波形光滑,波列清晰,(b)中波斑图则随时间和空间迅速而无规地变化.不过它又与典型的强湍状态波斑图[参考图 7-17(b)]显著不同.图 9-14(a)和(b)分别是在准周期振荡相和混沌爆发相中波动 $\phi(x,t)$ 的等高图,分别对应图 9-13(a)和(b):在图 9-14(a)中可以很清楚地看到定向传播的波峰和波谷.在图(b)中虽然也可大体分辨出波峰和波谷,但似乎出现了横跨峰谷之间的某种流.与前面提到的在爆发相中轨道可以穿越环形拓扑奇点这个图像一致.

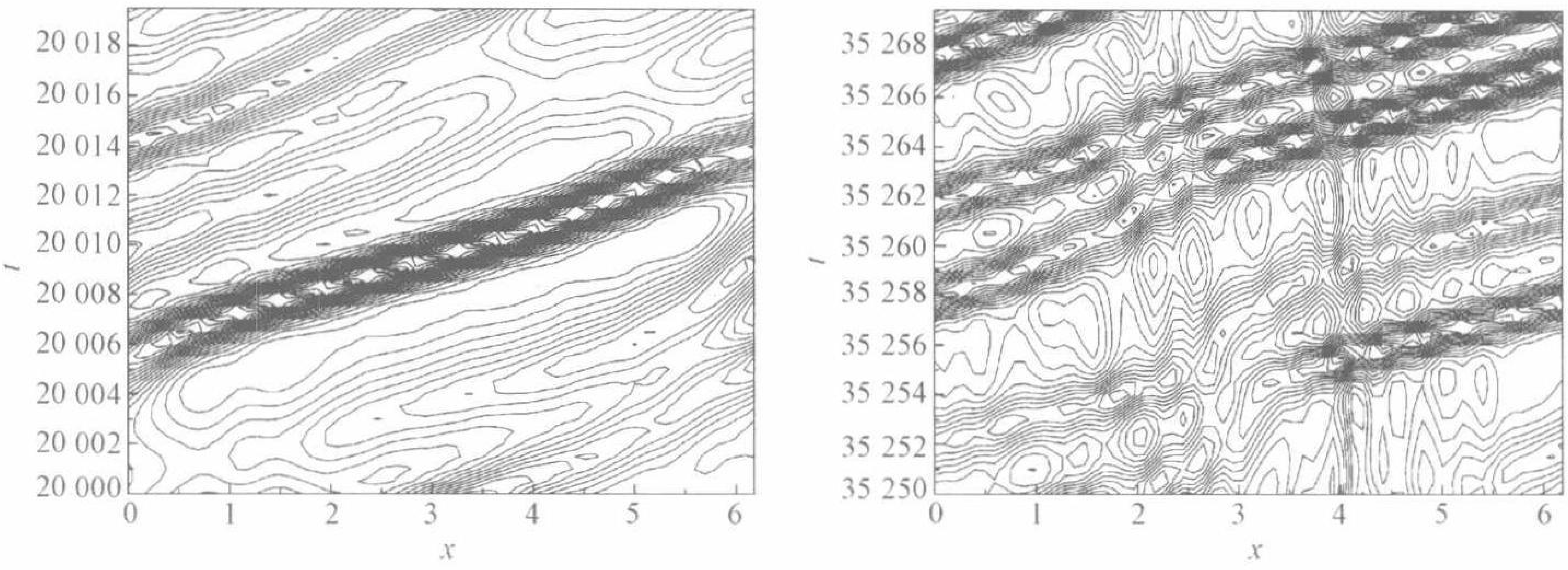
图 9-15 是模式振幅 $\widetilde{A}_{k=1}(\tau)/2$ 的频谱,参数同图 9-9(b),其中图(a)对应准周期相,图(b)对应爆发相.与图 9-8 的谱相比,图 9-15(a)中的频谱已经显著加宽,不过两个最强的频率峰(在图上标记为 $\omega_1$,$\omega_2$)和它们的拍频仍十分突出,这个结果支持前面关于准周期相中运动流形的拓扑结构有二维环骨架的论断,两个特征峰分别对应围绕二维环上两个不可约回路的运动;在图(b)爆发相中,频谱已不显示




(a) 波能准周期振荡时的波斑图　　(b) 波能混沌爆发时的波斑图

图 9-13　在波能 $E(t)$准周期振荡相和混沌爆发相下的时空波斑图 $\phi(x,t)$

（实验室坐标系，$\Omega=0.65$，$\varepsilon=0.19294$）




(a) 准周期振荡相　　(b) 混沌爆发相

图 9-14　在准周期振荡相和混沌爆发相中波动 $\phi(x,t)$的等高图

（实验室坐标系，$\Omega=0.65$，$\varepsilon=0.19294$）

任何特征峰，说明这时拓扑环已完全被破坏.

通过探讨波能阵发的机制，我们已经认识到环形拓扑奇点对系统动力学的重要作用，它的出现使 Hopf 分岔序列不能无限持续下去. 在拓扑奇点出现之前发生的有限次 Hopf 分岔使得波形变得复杂，但却谈不上是真正意义上的湍流，相轨道还是被约束在高维环上，波动在空间仍然是相干的. 只是在爆发相中，轨道穿过了奇点，环形拓扑被破坏，才暂时失去了空间相干性. 在第十章中我们将讨论强湍状态，在那里空间相干性完全被破坏，强湍状态下的特征谱[参见图 7-17(c)]与爆发态下的波谱图[参见图 9-15(b)]也大相径庭，这是因为二者产生的动力学机制截然不同的缘故. 下一章我们将说明，强湍的出现是一次全局分岔引起的，它完全中断了局域分岔序列，结果形成的状态与本节讨论的阵发相中的状态非常不同.

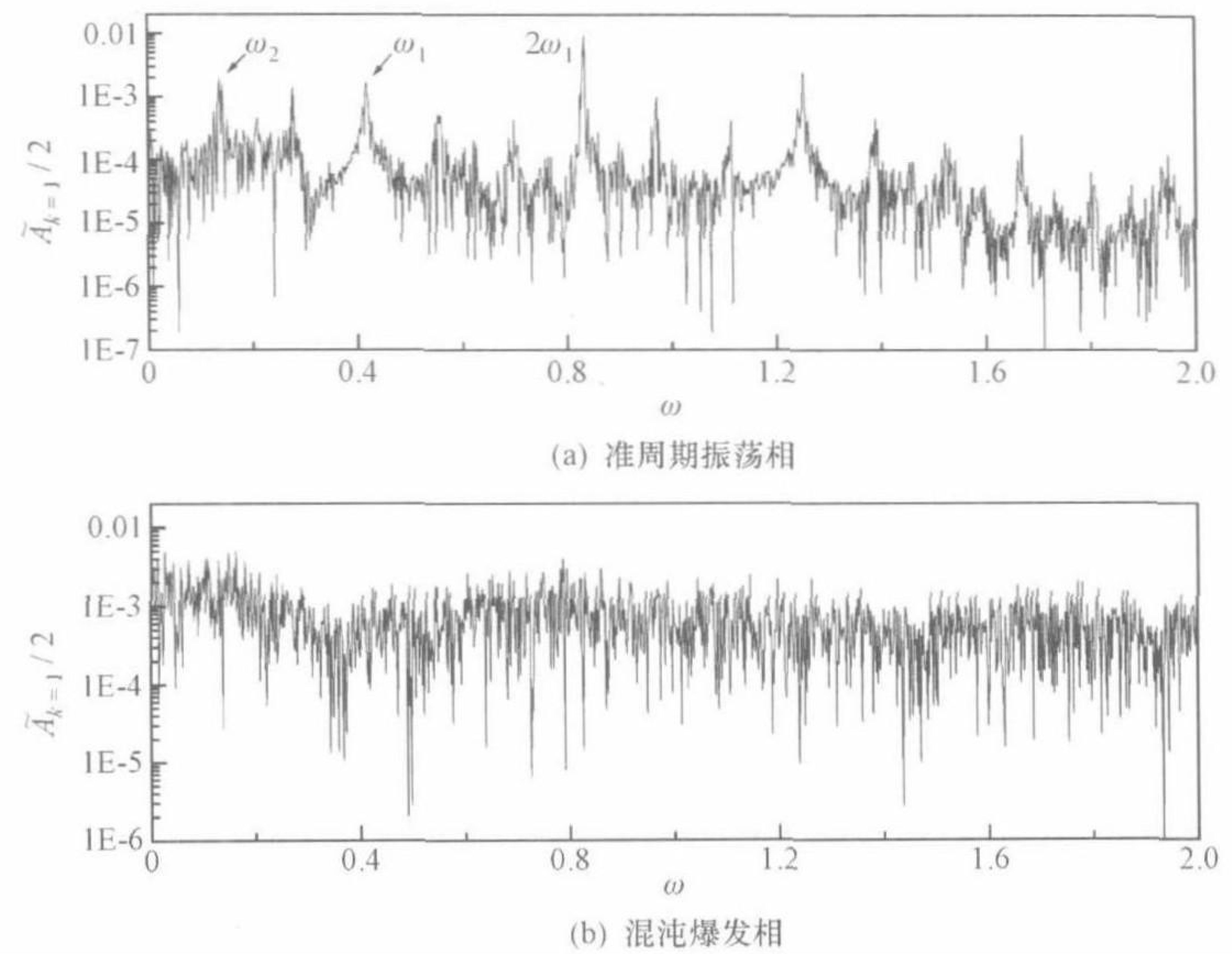



图 9-15　在准周期振荡相和混沌爆发相中模式振幅 $\widetilde{A}_{k=1}/2$ 的频谱，随波坐标系 ($\Omega=0.65, \varepsilon=0.19294$)

# §9.3　波动系统中的相同步

在空间延展系统中传播的一个非线性波动，有无穷多个运动模式，在做数值模拟方程(7-47)时虽做了模式截断，也通常要用到 $2^{6\sim9}$ 个复模式，有兴趣的话，不妨利用方程(7-58)估算一下这么多模式会形成多少个三波过程. 每一个波动模式振幅和位相的演化，都受到大量模-模耦合过程的影响，而任一模式运动状态的变化，又反过来影响其他模式的运动. 真的很难想象，非线性系统具有的协调能力是何等强大，从某个初始状态出发，经过或长或短的暂态，常常能够成功地将如此众多的模式组织到如此有规的状态，如调节到模式黏在一起运动的稳定定态波，或者本章前面讨论的那种空间相干波动，它们看起来起伏不定，实际上轨道却在高维拓扑环上周而复始地旋转. 一个非线性系统究竟是通过什么方式，将如此众多模式的运动协调到相空间中完美的拓扑结构上去？ 回答这个问题，离不开一个重要话题——相同步[130].

## 9.3.1　波动模式的位相

在第五章中已经扼要介绍了非线性时序系统的一些相同步现象，例如完全相同步，泛函相同步和非完美相同步等. 耦合振子有调节到相同步的强烈倾向，这已

被大量理论研究和实际观察所证实. 相同步是振子间合作的一种方式,如果协调不到完全的同步态,耦合振子系统也会采用延迟、相滑等方式,试图在新的状态下实现尽可能完美的相同步. 时序系统如此,空间延展的非线性系统又如何呢? 从模式空间来看,非线性波动不过是不同空间尺度振子的耦合运动,这些振子没有理由不与其他时序系统中的振子遵循相同的规律——如果自然界的确存在着某种普适法则的话. 虽说如此,波动系统的相同步仍涉及一些它所特有的问题.

首先还是参照系问题. 频率在运动坐标系中的多普勒移动意味着在两个惯性参照系中观察到的位相运动是不一样的,例如在一个惯性系中不随时间改变的位相(频率为 0),在另一个惯性系中将以一定的频率作旋转运动. 那么,究竟应该在什么参照系中讨论相同步现象呢? 当然还是应该选择随定态波运动的参照系. 一个显而易见的事实是,孤立波样的稳定定态波本身就是模式间达到相同步的一个绝佳范例. 以非线性漂移波模型(7-47)为例,在随波参照系中,图 9-1(a)显示的波动解 $\phi(\xi,\tau)$的模式位相$\{\tilde{\theta}_k(\tau)\}$都渐近地趋向常数,在这个状态下任意两个模式之间的位相差$[\Delta\tilde{\theta}_{ij}(\tau)=\tilde{\theta}_i(\tau)-\tilde{\theta}_j(\tau)]$都不随时间改变. 在这个意义上,一个孤立波就是一组实现了完美相同步的耦合振子运动,振子之间的相对关系如此之和谐,以至于不需要再随时间作任何调整. 但如果在实验室坐标系中观察,这些模式间的位相差将随时间迅速增加,看不到相同步的迹象. 所以随波运动的参照系应该适合于讨论相同步现象,可以预料,当一个稳定定态波随参数改变失稳时,各模式一定会在原来常数位相差的基础上调整相互之间的关系.

其次我们可以提这样一个问题: 不同波斑图状态与特定的相同步方式这二者之间有关联吗? 这个猜测不无根据: 我们已经知道,在稳定定态波状态下,任意两个波动模式之间的位相差 $\Delta\tilde{\theta}_{ij}(\tau)$保持常数,这可以看做是一种完全相同步;而在定态波 Hopf 失稳后,轨道在拓扑环上运动时,所有模式的位相$\{\tilde{\theta}_k(\tau)\}$都作周期或准周期运动(参考图 9-2 和图 9-7),两个模式之间的位相差 $\Delta\tilde{\theta}_{ij}(\tau)$也周期地变化,这显然是一种泛函相同步. 这些迹象都说明,相同步方式改变与波斑图状态改变之间可能存在某种对应关系. 进一步我们可以问: 更复杂的波斑图,如强湍,也会出现相同步现象吗? 这是我们需要探讨的.

还有就是位相变量的选择问题. 我们知道,在讨论非线性时序系统的相同步时,位相变量通常需要根据具体问题定义,对波动系统来说,这好像不应该是个问题,因为波动 $\phi(\xi,\tau)$的每个傅里叶模式 $k$ 都拥有一个位相 $\tilde{\theta}_k(\tau)$,用这个变量来观察相同步似乎是不言而喻的;然而事实是,$\tilde{\theta}_k(\tau)$却未必是观察相同步现象的一个最理想的变量,因为复杂的相同步过程是一种随时间演化的行为,而我们已经知道,如果将实现了的波动解 $\phi(\xi,\tau)$分解作定态波解和扰动波之和,$\phi(\xi,\tau)=\phi_0(\xi)+\delta\phi(\xi,\tau)$,波动 $\phi(\xi,\tau)$中随时间演化的全部信息都将由扰动波 $\delta\phi(\xi,\tau)$所携带,因

此,讨论相同步现象,似乎应选择分析扰动波 $\delta\phi(\xi,\tau)$模式的位相运动.下面让我们根据 $\delta\phi(\xi,\tau)$的运动方程,建立起其模式运动方程,以讨论相关的相同步现象.

## 9.3.2 定态波势阱中的耦合振子系统

将扰动波 $\delta\phi(\xi,\tau)$的演化方程(8-10)重新写出,即

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(1+a\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\right)\delta\phi-\Omega\frac{\partial}{\partial\xi}\left(1+a\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\right)\delta\phi+c\frac{\partial\delta\phi}{\partial\xi}$$
$$+\gamma\delta\phi+f\frac{\partial}{\partial\xi}[\phi_0(\xi)\delta\phi]+f\delta\phi\frac{\partial}{\partial\xi}\delta\phi=0, \qquad (9\text{-}8)$$

第八章对定态波解 $\phi_0(\xi)$作稳定性分析时,忽略了关于扰动波 $\delta\phi$ 的自非线性,即方程左边最后一项,只讨论了 $\delta\phi$ 的线性演化.我们已经发现,在参数改变时,在相空间某个特征方向 $\tilde{k}=\tilde{k}^*$ 上扰动准模的运动可能失稳,如 Hopf 失稳.由于失稳方向 $\tilde{k}^*$ 上的运动在所有傅里叶方向 $k$ 上都可能有投影,在不稳定性发展的线性阶段,扰动波 $\delta\phi$ 各傅里叶模式的幅度都指数地增长,当模式幅度足够大时,它们之间的相互作用,也就是方程(9-8)左边最后一项,不再可忽略.

在周期 $2\pi$ 边界条件下将扰动波 $\delta\phi(\xi,\tau)$作傅里叶展开

$$\delta\phi(\xi,\tau)=\sum_{k=1}^{N}b_k(\tau)\cos[k\xi+\alpha_k(\tau)], \qquad (9\text{-}9)$$

这里$\{b_k,\alpha_k\}$分别是实振幅和实位相.扰动波在发展到非线性演化阶段时,各扰动模式不断地调节它们的振幅和位相,以寻求一种平稳的合作状态,包括可能的相同步态.我们的研究表明,位相$\{\alpha_k(\tau)\}$是讨论这个波动系统相同步现象的一个恰当变量.事实上,在有的情形下,如对于空间相干波动,观察波动 $\phi(\xi,\tau)$的模式位相$\{\tilde{\theta}_k(\tau)\}$或扰动波 $\delta\phi(\xi,\tau)$的模式位相$\{\alpha_k(\tau)\}$的运动,都可以分析是否出现了相同步;但在运动变得更复杂时,如强湍波动,$\{\tilde{\theta}_k(\tau)\}$就不是一个讨论相同步现象的好参量,只有观察扰动波模式位相$\{\alpha_k(\tau)\}$才能方便地捕捉到相同步的信息.

让我们建立扰动波模式$\{b_k,\alpha_k\}$的运动方程,将 $\delta\phi(\xi,\tau)$的展开式(9-9)与 $\phi_0(\xi)$的展开式

$$\phi_0(\xi)=\sum_{k=1}^{N}A_k\cos[k\xi+\theta_k], \qquad (9\text{-}10)$$

一起代入方程(9-8),得到[231]

$$\frac{\mathrm{d}b_k}{\mathrm{d}\tau}=-\frac{\gamma}{1-ak^2}b_k+\frac{fk}{2(1-ak^2)}$$
$$\times\left\{\sum_{i+j=k}\left[A_ib_j\sin(\theta_i+\alpha_j-\alpha_k)+\frac{b_ib_j}{2}\sin(\alpha_i+\alpha_j-\alpha_k)\right]\right.$$
$$+\sum_{i-j=k}\left[A_ib_j\sin(\theta_i-\alpha_j-\alpha_k)+\frac{b_ib_j}{2}\sin(\alpha_i-\alpha_j-\alpha_k)\right]$$

$$+\sum_{i+j=k}\left[A_ib_j\sin(-\theta_i+\alpha_j-\alpha_k)+\frac{b_ib_j}{2}\sin(-\alpha_i+\alpha_j-\alpha_k)\right]\Bigg\},\quad(9\text{-}11a)$$

$$\frac{d\alpha_k}{d\tau}=-k\left[\frac{c}{1-ak^2}-\Omega\right]-\frac{fk}{2(1-ak^2)b_k}$$

$$\times\Bigg\{\sum_{i+j=k}\left[A_ib_j\cos(\theta_i-\alpha_i-\alpha_k)+\frac{b_ib_j}{2}\cos(\alpha_i+\alpha_j-\alpha_k)\right]$$

$$+\sum_{i-j=k}\left[A_ib_j\cos(\theta_i-\alpha_j-\alpha_k)+\frac{b_ib_j}{2}\cos(\alpha_i-\alpha_j-\alpha_k)\right]$$

$$+\sum_{-i+j=k}\left[A_ib_j\cos(-\theta_i+\alpha_j-\alpha_k)+\frac{b_ib_j}{2}\cos(-\alpha_i+\alpha_j-\alpha_k)\right]\Bigg\},$$

$$(k=1,2,\cdots,N)\qquad(9\text{-}11b)$$

这是一组关于扰动波模式振幅和位相$\{b_k(\tau),\alpha_k(\tau)\}$的非线性耦合方程.

定义扰动波的相体积元为

$$dV=\prod_k b_k db_k d\alpha_k.\qquad(9\text{-}12)$$

它随时间的变化率是

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dt}=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{b_k}\frac{\partial}{\partial b_k}\left(b_k\frac{db_k}{dt}\right)+\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial}{\partial\alpha_k}\left(\frac{d\alpha_k}{dt}\right)$$

$$=-\sum_{k=1}^{N}\frac{2\gamma}{1-ak^2}.\qquad(9\text{-}13)$$

因为 $a<0$,在 $\gamma>0$ 时扰动波模式的相体积 $V$ 以常速率收缩.

在方程(9-11)中,扰动波振子 $k$ 的运动受制于它的振幅 $b_k$ 演化方程和位相 $\alpha_k$ 演化方程,单个振子方程的基本结构与第五章中讨论 Hopf 分岔的复振子方程(5-13)相似,如方程(9-11a)右边第一项给出振幅 $b_k$ 的线性增长率,方程(9-11b)右边第一项给出位相 $\alpha_k$ 的线性频率,其余的项都来自系统非线性的贡献. 不过方程 (9-11)中非线性项的形式要复杂得多,它不仅包含了不同扰动振子$\{b_k,\alpha_k\}$之间的模-模耦合项,还包含了扰动振子$\{b_k,\alpha_k\}$与定态波模式$\{A_k,\theta_k\}$之间的耦合项. 在第八章中已经知道,定态波解 $\phi_0(\xi)$对于扰动波振子$\{b_k,\alpha_k\}$来说,就好像是一个空间势阱,如从方程(9-11)看到的那样,只要满足相应的三波共振条件,定态波模式$(A_i,\theta_i)$将把振子$(b_j,\alpha_j)$散射到$(b_k,\alpha_k)$方向上去. 因此方程组(9-11)描写的实际上是在势阱 $\phi_0(\xi)$中一组耦合非线性复振子的运动.

我们看到,在方程(9-11)中$(b_j,\alpha_j)$与$(A_i,\theta_i)$的模-模耦合项依赖于它们的位相状态,因此这些项对 $db_k/d\tau$ 和 $d\alpha_k/d\tau$ 的贡献可正可负. 换句话说,势阱 $\phi_0(\xi)$对振子振幅 $b_k$ 的增长,既可能起驱动作用,也可能起抑制作用,对振子位相 $\alpha_k$ 的转动,既可能起加速作用,也可能起减速作用,这些都取决于这个振子在势阱 $\phi_0(\xi)$中的位置以及与其他振子的相对位置. 注意原波动方程(7-47)中的参数 $\varepsilon$ 已不在方

程(9-11)中显式地出现,它的作用现在由定态波势阱 $\phi_0(\xi)$来体现. 势阱 $\phi_0(\xi)$的存在,使扰动波振子的本征行为发生了非线性改变,这在第八章中已有分析. 方程(9-11)中还含有扰动波振子之间的共振三波相互作用项,这些项的大小和符号与各振子振幅和位相的瞬时状态有关,因此,扰动振子与势阱及其他振子之间的相对位置等因素都对振子的振幅和位相的演化产生影响.

在给定参数下,定态波解 $\phi_0(\xi)$的模式$\{A_k,\theta_k\}$可从方程组(7-52)求出,代入方程(9-11)在同样的模式截断下就可以计算扰动波模式$\{b_k(\tau),\alpha_k(\tau)\}$的演化了. 一般假设有小幅度的初始扰动,以保证初条件处于吸引子的吸引盆中. 如果定态波解 $\phi_0(\xi)$稳定,所有振子的振幅$\{b_k(\tau)\}$随时间都趋于 0,方程组(9-11)显然允许这个平凡解;如果 $\phi_0(\xi)$不稳定,初始扰动在失稳方向上的振动幅度将首先增长,它投影在各傅里叶模式(振子)$\{b_k,\alpha_k\}$上,这些模式经过非线性演化,最终趋向其渐近状态. 扰动波模式与定态波模式叠加

$$\phi(\xi,\tau) = \sum_k A_k\cos[k\xi + \theta_k] + \sum_k b_k(\tau)\cos[k\xi + \alpha_k(\tau)] \tag{9-14}$$

就是在随波运动坐标系中实现了的波动解 $\phi(\xi,\tau)$,将其变换回到实验室坐标系,才是所要求的可观察波动解 $\phi(x,t)$. 在导出方程(9-8)和(9-11)时,并没有作任何近似,因此在恰当的初始扰动下用这种方法得到的波动解应该与用赝谱方法直接模拟波方程(7-47)得到的解一致,计算机结果证实了这一点.

用这种方法,我们已将求解 $\phi(x,t)$的非线性波方程(7-47)变换为求解定态波 $\phi_0(\xi)$模式$\{A_k,\theta_k\}$的一组代数方程(7-52)和与之耦合的扰动波 $\delta\phi(\xi,\tau)$振子$\{b_k(\tau),\alpha_k(\tau)\}$的一组常微分方程(9-11). 这个变换并非是为了计算上的简化,事实上,在同样模式截断下,求解方程组(9-11)比用赝谱方法直接模拟方程(7-47)更费机时. 之所以在讨论非线性波的动力学机制时采用方程组(9-11),是因为它所具有的深刻物理内涵,如前面指出的,一个非线性波 $\phi(x,t)$在随波坐标系中来观察,可以看做是在相应定态波势阱 $\phi_0(\xi)$中运动的一组耦合复振子,这组振子携带了非线性波活跃部分的所有信息. 从某种意义上说,在定态波势阱中的耦合振子就像在周期结构中的辐射场,第七章已经提到,在计入非线性时,辐射可以形成相干结构[14,189],这里耦合振子在定态波势阱中也可以架构起各种各样的结构,相干的或随时间无序变化的结构. 在第十章讨论强湍动力学时,这一图像的合理性将更充分地显示出来.

### 9.3.3 空间相干波动中的完美相同步

让我们利用方程(9-11)计算扰动波 $\delta\phi(\xi,\tau)$的振子$\{b_k(\tau),\alpha_k(\tau)\}$在定态波势阱 $\phi_0(\xi)$约束下的运动,并观察它们的位相$\{\alpha_k(\tau)\}$可能出现的同步状态,本章暂且局限于讨论渐近解是空间相干波动时的相同步行为.

图 9-16 是 $\Omega=0.65$，$\varepsilon=0.12$ 时从方程(9-11)得到的渐近解，相应的定态波解 $\phi_0(\xi)$ 处于波能滞后曲线的下分支. 图(a)是扰动波能量

$$\delta E(\tau)=\sum_k(1-ak^2)[A_k b_k\cos(\theta_k-\alpha_k)/2+b_k^2/4], \tag{9-15}$$

它随时间的演化有周期振荡的形式. 与总波能 $E(\tau)$ 仅相差定态波的常能量 $E_0=\sum_k(1-ak^2)A_k^2/4$，因此这里和后面，常使用 $\delta E(\tau)$ 代表系统能量 $E$ 的时间行为；图(b)～(d)是模式位相差 $\Delta\alpha_{1k}(\tau)$ 时间演化的几个典型结果，这里 $\Delta\alpha_{1k}(\tau)\equiv\alpha_1(\tau)-\alpha_k(\tau)(k=2,3,4)$，它们都与波能一样小幅度地周期振荡.

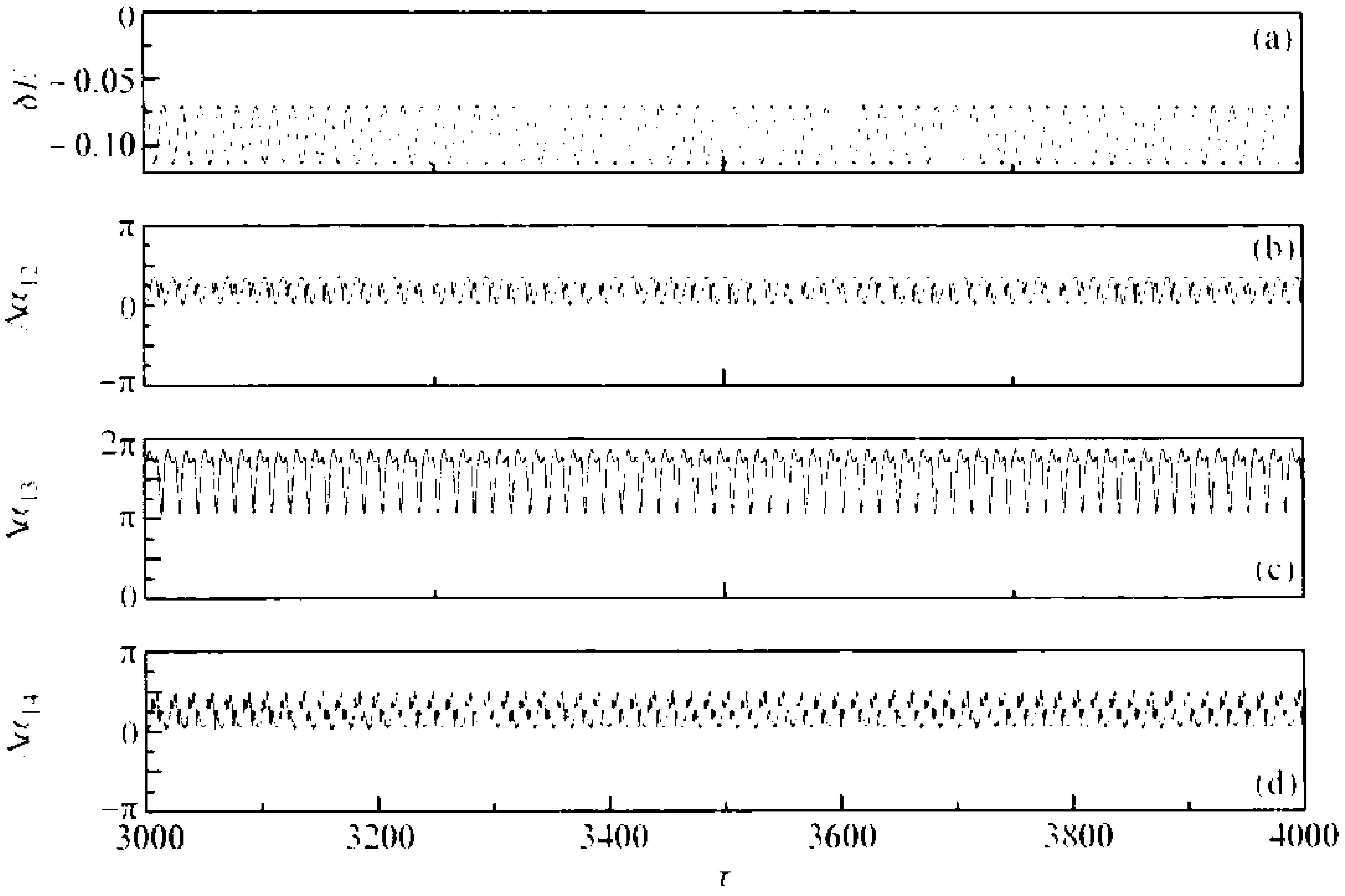



图 9-16 渐近状态下扰动波能量和模式位相差随时间的演化(随波坐标系，$\Omega=0.65$，$\varepsilon=0.12$)

图 9-17(a)～(c)是 $\alpha_{k=2,3,4}(\tau)$ 作为 $\alpha_{k=1}(\tau)$ 的函数，与图 9-16(b)～(d)分别对应. 由图可见，它们的轨道都是封闭曲线，说明各位相间形成了完美的泛函相同步[232].

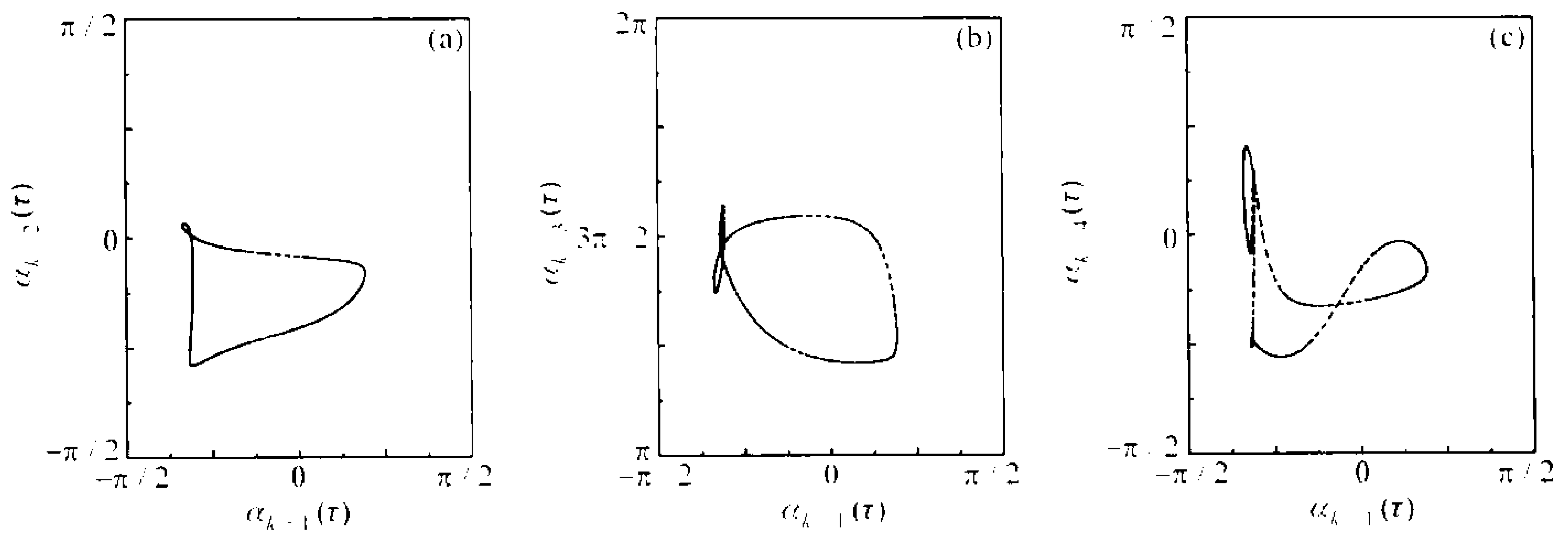
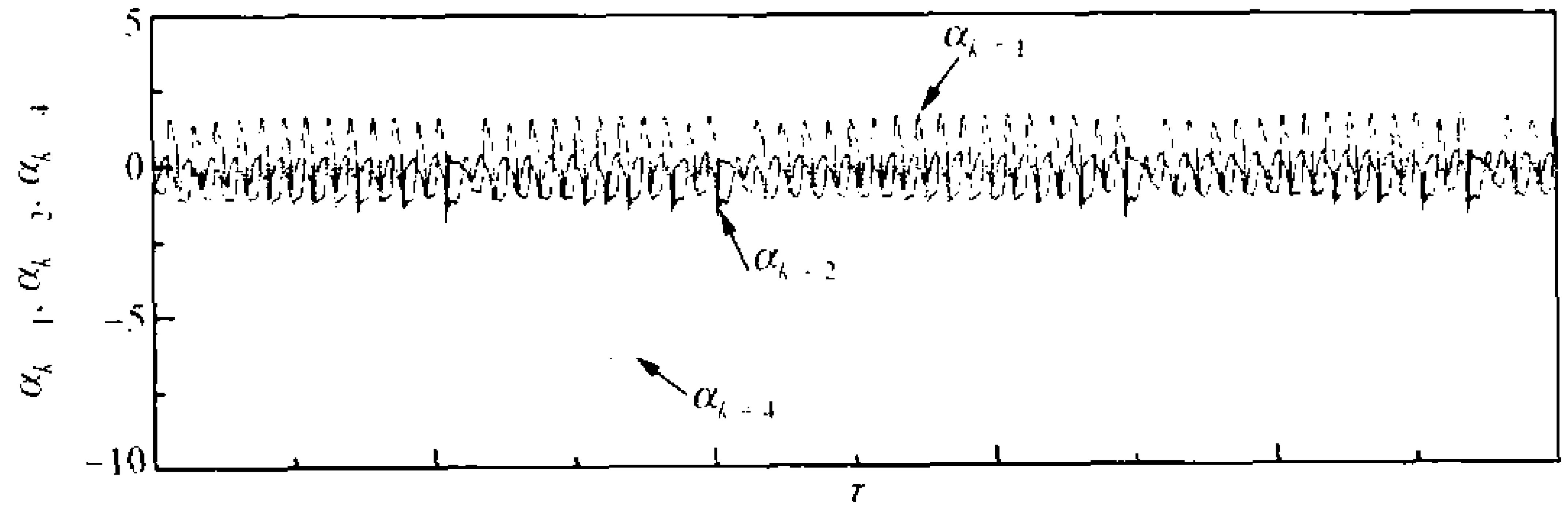


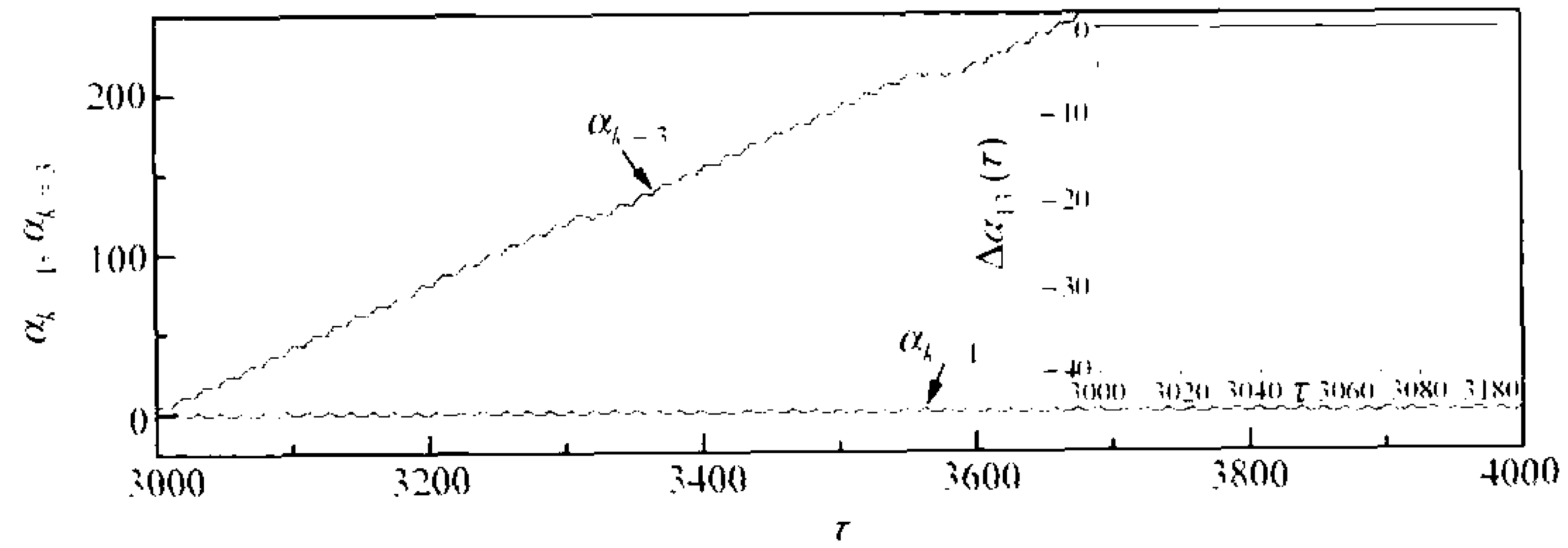

图 9-17 渐近状态下扰动波模式位相的相图(随波坐标系，$\Omega=0.65$，$\varepsilon=0.12$)

随 $\varepsilon$ 增加，扰动模式位相的时间演化逐渐变得复杂. 图 9-18(参见彩图 9-18)

是 $\Omega=0.65$，$\epsilon=0.19$ 时的情形，图(a) 给出位相 $\alpha_{k=1,2,4}(\tau)$随时间 $\tau$ 的演化，它们的轨道已经有些无序，其中 $\alpha_{k=1}(\tau)$和 $\alpha_{k=2}(\tau)$在小于 $2\pi$ 的范围内振荡，$\alpha_{k=4}(\tau)$则不时出现相滑，位相突然跳跃约 $2\pi$ 后又很快地调节回到原来的振荡区间；图(b)是位相 $\alpha_{k=1,3}(\tau)$随时间 $\tau$ 的演化，其中位相 $\alpha_{k=3}(\tau)$平均来说随时间线性地增加，说明它有一个有限大小的平均频率，与 $\alpha_{k=1}(\tau)$平均频率为 0 形成对照；小插图是位相差 $\Delta\alpha_{13}(\tau)$，曲线呈台阶状，表明两个位相 $\alpha_{k=1}(\tau)$和 $\alpha_{k=3}(\tau)$运动之间存在相关.




(a) 模式 $k=1,2,4$ 的位相

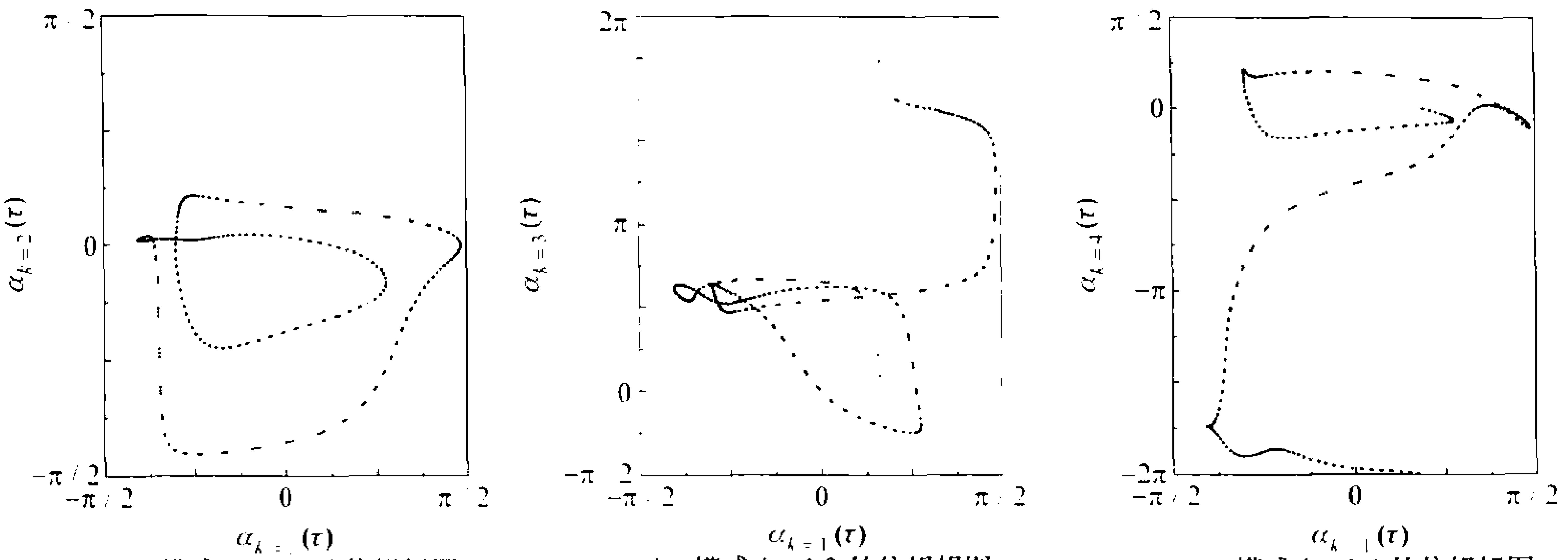



(b) 模式 $k=1,3$ 的位相，小插图为位相差$\Delta\alpha_{13}$

图 9-18 渐近状态下扰动模式位相随时间的演化(随波坐标系，$\Omega=0.65$，$\epsilon=0.19$)

图 9-19 是相应于图 9-18 参数下位相的相图，(a)～(c)分别是 $\alpha_{k=2,3,4}(\tau)$作为 $\alpha_{k=1}(\tau)$的函数，其中 $\alpha_{k=3,4}(\tau)$分别取了$(-\pi/2,2\pi)$和$(-2\pi,\pi/2)$范围内的主值，令人惊讶的是，虽然在图 9-18 上两个模式位相的演化行为有很大差别，但它们在相空间中的轨道都形成光滑的封闭曲线，尽管形状十分古怪，仍可认定这些位相之间都处于完美的泛函相同步状态. 在时序系统的研究中，通常把有相滑的情形归类于非完美相同步，这里的结果说明，即使出现相滑，位相的同步状态依然可以十分完美，这是运动流形有环形拓扑的缘故.

在图 9-16(d)中，位相 $\alpha_{k=3}(\tau)$被约束在小于 $2\pi$ 的范围内摆动，但在图 9-18(b)中 $\alpha_{k=3}(\tau)$的绝对值随时间不断增加，后者表明，平均而言它经历了一个位相持续增加的旋转运动，旋转频率由曲线的平均斜率给出. 模式 $k=3$ 位相行为的这一改变有点像单摆相图 4-3 中从摆动相跨过了分界线转变到转动相的情形，属于位相动力学状态的一种改变. 不过图 9-18 的情况比单摆要复杂，$\alpha_{k=3}(\tau)$在转动的同时还有摆动，这造成了图中台阶状的曲线. 随驱动强度 $\epsilon$ 增加，其他模式的位相也

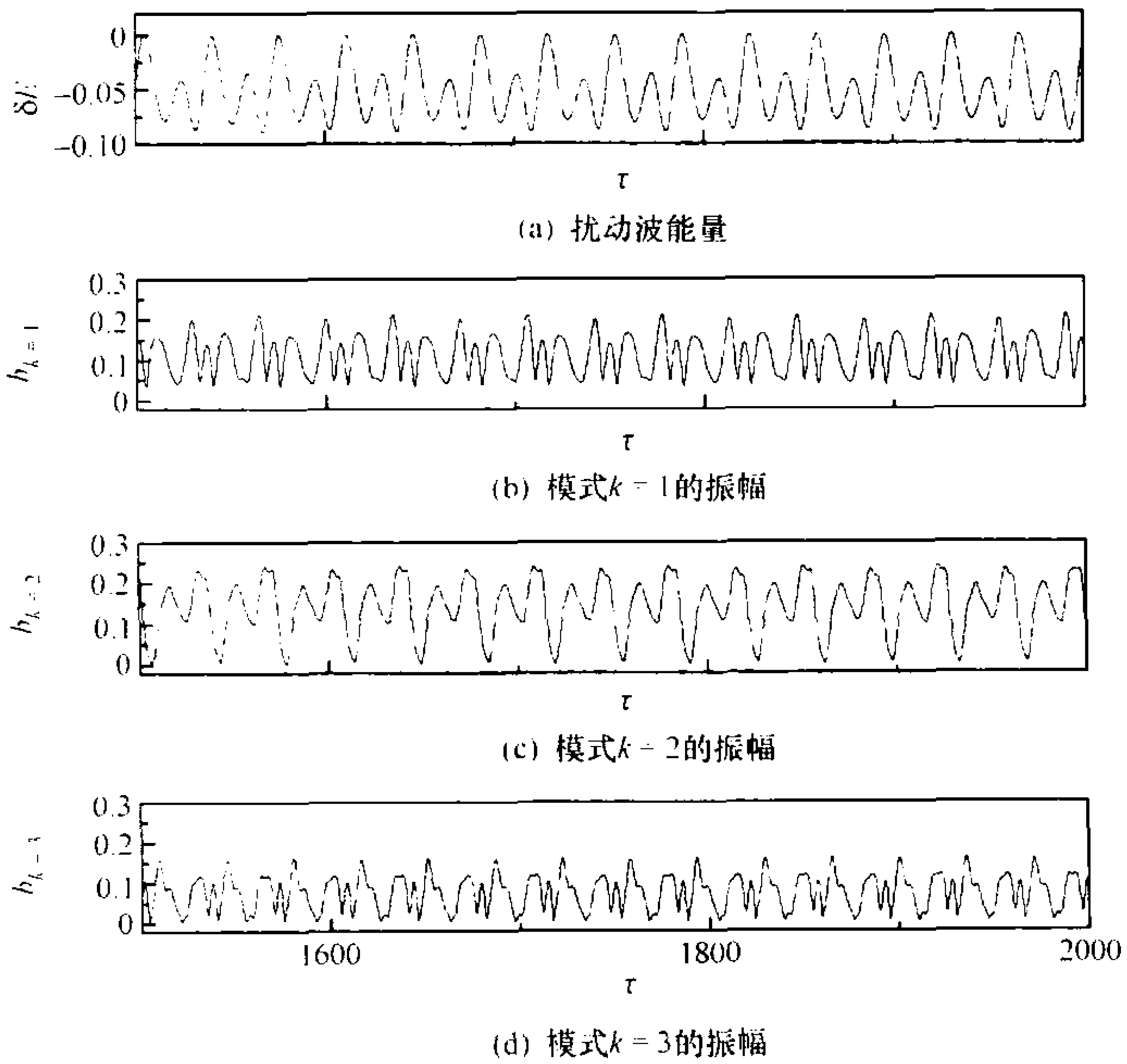


(a) 模式 $k=1,2$ 的位相相图　(b) 模式 $k=1,3$ 的位相相图　(c) 模式 $k=1,4$ 的位相相图

图 9-19　渐近状态下扰动模式位相的相图(随波坐标系,$\Omega=0.65$,$\varepsilon=0.19$)

可能从摆动相向转动相转变,但在本章讨论的空间相干波动状态下,主模式 $k=1$ 的位相 $\alpha_{k=1}(\tau)$ 始终处于摆动状态,直到另一个临界现象发生以后,它的状态才发生了突变,我们将在下一章讨论主模式位相发生突变这一临界现象.

图 9-20 中的参数为 $\Omega=0.65$,$\varepsilon=0.192$,其中图(a)是扰动波能量 $\delta E(\tau)$ 的演化,它显示平稳的双周期运动,图(b)~(d)分别是振子振幅 $b_k(\tau)$($k=1\sim3$)随时间



(a) 扰动波能量

(b) 模式 $k=1$ 的振幅

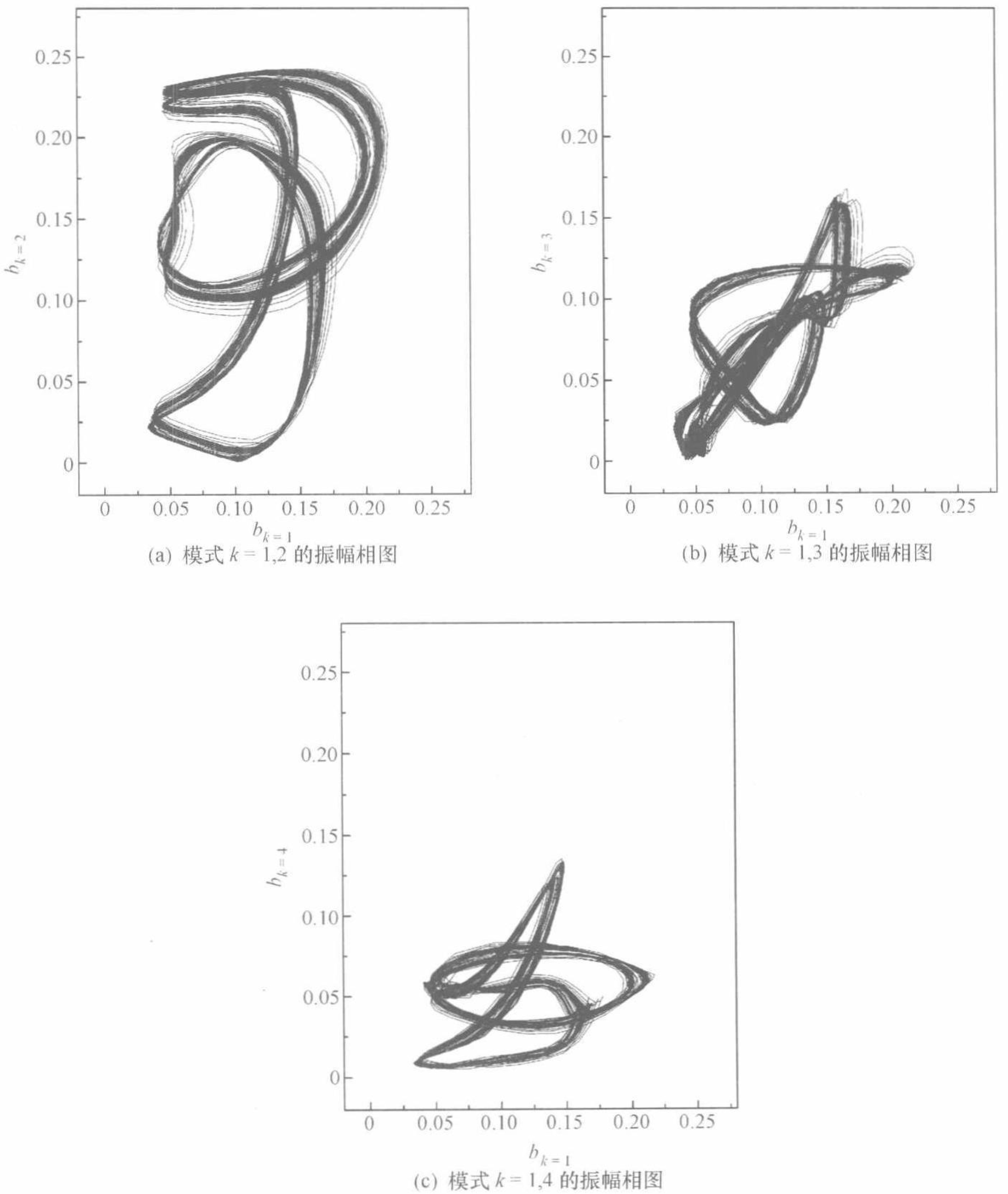
(c) 模式 $k=2$ 的振幅

(d) 模式 $k=3$ 的振幅

图 9-20　渐近双周期运动状态下扰动波能量和模式振幅随时间的演化(随波坐标系,$\Omega=0.65$,$\varepsilon=0.192$)

$\tau$ 的演化. 在图中的准周期振荡状态下，各振子振幅的极大值并不在同一时刻出现，这是轨道缠绕在拓扑环上的缘故，如在相图 9-21 上看到的那样.

这与下一章强湍的情形大不相同，在强湍状态下几个长波扰动振子的振幅常常能够几乎同时达到极大值，各振子能量因此得以非常有效地叠加起来，这造成波能演化曲线中一个个突兀的尖峰. 在第十章中我们将集中分析模型(7-47)所显示的强湍流状态，寻找强湍流的动力学起因，以及它与弱湍流在相同步等动力学性质上的差别.




(a) 模式 $k=1,2$ 的振幅相图

(b) 模式 $k=1,3$ 的振幅相图

(c) 模式 $k=1,4$ 的振幅相图

图 9-21　渐近双周期运动状态下扰动波模式振幅的相图(随波坐标系，$\Omega=0.65$，$\varepsilon=0.192$)

# 第十章　向强湍的激变和强湍动力学

上一章说明了在随波坐标系下，驱动-耗散漂移波模型(7-47)的定态波解作为相空间中的一个不动点，可以经过一系列 Hopf 分岔，发展成高维拓扑环，相应的波动看起来有弱湍的特点，本章将进一步分析该模型显示的具有强湍特征的波斑图的产生机制. 与弱湍不同，系统的运动状态向强湍的转变表现为激变现象. 第五章曾介绍了有关激变的概念，它是在临界参数下出现的一种全局分岔. 就像时序系统那样，向强湍的激变也表现为参数空间中的临界现象，如果弱湍吸引子在相空间中与鞍点共存，在越过某个临界参数时，吸引子总有机会与鞍点碰撞，这引起吸引子突然膨胀，在急剧膨胀了的吸引子上，系统的运动遵循强湍动力学. 然而对波动系统颇具特色的是，这里所说的鞍点，实际上是坐标空间中一个运动着的、鞍结点不稳定的空间延展结构.

沿着节 9.3.2 中的思路，本章在对模型所显示的强湍现象作动力学分析时，仍把可观察的波动解看做是相应的定态波势阱与在势阱中运动的一组耦合振子所组成的系统，只是这里的势阱是鞍结点不稳定的，下面简称为鞍型势. 分析结果再次给非线性波动的这一物理图像提供了非常有力的支持. 关于向强湍激变的机制，除上面提到的它是由吸引子与鞍点碰撞触发的而外，分析发现，碰撞还引发了另一个临界动力学现象，这就是最长波振子相对于鞍型定态波势阱的运动出现了束缚-自由转变以及在统计意义上对称性质的改变. 只有在经历了这个继发的临界转变之后，吸引子才急剧膨胀，运动才真正进入强湍状态. 我们还将说明，强湍实际上是一种特殊的相同步状态. 不同于弱湍下的泛函相同步，强湍下的相同步是非完美的，它是一种阵发的时空同步态，在强湍状态下，定态波势阱中的若干长波振子之间不时地调节到大体相同的位相，与此同时振幅也几乎同步冲高，实现了瞬间的波能极大化.

## §10.1　强湍流现象

### 10.1.1　充分发展的湍流

第五章曾介绍了关于中性流体运动的一些观测结果，例如流体运动状态的改变总是伴随着某种对称性质的改变，又如强湍流表现出阵发的特点，且时而有涡旋丝这样不规则的小尺度空间相干结构产生和湮灭等. 这些现象都提示湍流不是一个完全随机的运动，它的动力学本质有可能通过决定性的波动模型被认识.

考虑一个有外驱动力 $f(\boldsymbol{x},t)$的波动方程，$f(\boldsymbol{x},t)$在与系统尺度可比的波长上输入能量，在一定参数下，系统有可能经过复杂的非线性动力学过程，将能量逐渐传递到小尺度模式，形成充分发展的湍流．湍流中短波模式非常活跃，显示所谓的 Kolmogorov 谱，它的主要特征是在波数空间中存在一个惯性区，在那里波动能量随波数的变化遵循幂律，惯性区的长波端远小于系统的特征尺度，短波端截止在耗散作用还不是很强的波数处[3]．

幂律谱在自然界十分普遍，如太阳耀斑，它是太阳以 X-射线和高能粒子流形式喷射的能量爆发，观测表明耀斑爆发强度、持续时间以及两次爆发间隔的时间等都有幂律分布．图 10-1 是两个数据库纪录的太阳 X-射线两次爆发间隔时间为 $\tau_L$ 的事件发生的概率分布 $P(\tau_L)$，它们在一个相当宽的波数范围都有幂律形式，在双对数图上的拟合都是直线[233]．

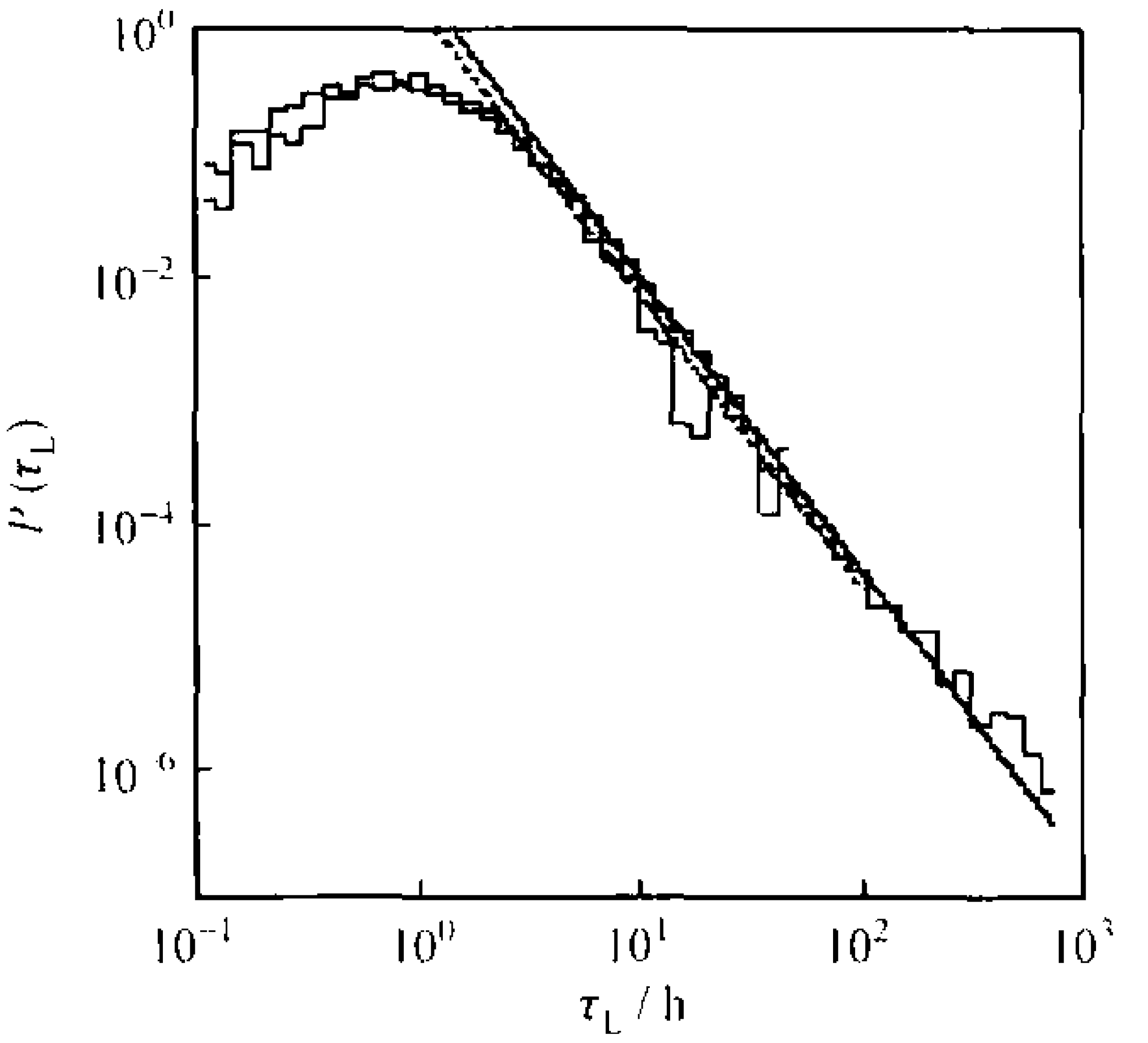



图 10-1　太阳 X-射线两次爆发间隔时间为 $\tau_L$ 的事件出现的概率分布
（引自文[233]）

在众多物理系统中都出现了幂律分布，这一事实理所当然地受到人们特别的重视，它背后到底有怎样的物理是一个有兴趣的问题．以太阳耀斑爆发为例，有人曾将其解释为自组织临界性（SOC）的结果．第七章中曾经提到的沙堆问题就是讨论 SOC 的典型模型之一[184]，随着沙粒的不断添加，底盘上的沙堆自组织到一个临界状态，此时若继续添加沙粒，沙堆会突然出现规模不等的坍塌，坍塌尺度的分布遵循一定的统计规律．在 SOC 模型下，太阳中的能量沉积就好比添加沙子，当能量沉积到某个临界状态，太阳就会出现耀斑爆发，就像沙堆在临界状态下发生的多尺度坍塌．不过，由 SOC 模型得到的能量爆发间隔时间 $\tau$ 出现的概率为 $P(\tau)=\langle\tau\rangle^{-1}\exp(\tau/\langle\tau\rangle)$［称为指数等待时间分布（exponential waiting time distribution），式中尖括号表示平均］，与观测到的幂律分布不符．后来，有人将太阳看做是一个非线性磁流体湍流系统，对模型进行数值计算得到了系统能量爆发中的各种幂律分

布，例如两次爆发间隔时间 $\tau$ 出现的概率分布遵循幂律 $P(\tau)\sim\tau^{-\alpha}$，有指数 $\alpha\approx 2.4$，这与观测结果一致[233]. 由此推测，自然界广泛出现的幂律谱极有可能很多都源于湍流运动.

自然界中一些湍流的巨大能量爆发对人类生产生活会产生重大影响，深刻认识它们的动力学产生机制有利于发展出一套预报或控制的方法. 湍流统计理论的建立也离不开对其动力学的认识，如在波-波相互作用的基础上作统计平均时，常对其中的非线性项作随机位相近似(random phases approximation)，这样的近似有没有动力学依据？有的湍流统计理论直接从随机耦合模型出发，假设湍流速度场 $v(t)$ 的第 $i$ 个模式 $v_i(t)$ 服从下面的非线性演化方程[165]

$$\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j,m} A_{ijm} v_j(t) v_m(t), \tag{10-1}$$

式中 $A_{ijk}+A_{kij}+A_{jki}=0$，求和对所有模式进行. 假设初始时速度场有随机分布，满足 $\langle v_i(0)v_j(0)\rangle=0(i\neq j)$，尖括号表示系综平均. 为计算二阶相关函数 $\langle v_i(t)v_l(t')\rangle$，要用 $v_l(t')$ 乘方程(10-1)两边并作系综平均，很明显，$\langle v_i(t)v_l(t')\rangle$ 依赖于三阶相关 $\langle v_j(t)v_m(t)v_l(t')\rangle$，而三阶相关又将依赖于四阶相关，如此等等形成无穷嵌套的方程序列. 研究表明，简单地截断方程组，即在某一级上假设相关函数为 0，所得的结果远不能解释实验，这是因为湍流中短波模式十分活跃的缘故. 因此，如何将相关函数的方程序列封闭，成为湍流随机耦合理论要解决的一个关键问题. 比较成功的一个方法是所谓的直接相互作用近似(direct interaction approximation)[1,205]，它在某一级相关函数上对随机变量的分布函数作了高斯近似，得到了比较理想的结果. 显然，这类近似的合理性也需要在动力学水平上进行检验. 对湍流动力学性质的深入认识还有可能刺激出新的统计理论，例如，根据湍流中存在时生时灭的小尺度相干结构这一事实，有人就提出了漂移波湍流的孤子气(soliton gas)模型，它的统计结果在一定程度上解释了实验观测到的漂移波湍流谱[234].

### 10.1.2 从空间相干波动向强湍的突变

讨论空间延展系统非线性问题的一个重要目标是探索时空混沌问题. 在时序系统中混沌运动有比较明确的概念，是指从相空间中任意相邻两点出发的轨道随时间指数地分开，这样由 Lyapunov 指数谱可以判别系统的轨道是否混沌以及混沌的程度. 在第五章已经提到，时空混沌这个概念比较含混，没有明确的数学界定[71]，根据波动系统的实际情况，本书将其理解为空间相干性被破坏了的状态，即人们常说的波碎(wave break)状态. 在第九章中因运动流形的拓扑环出现奇点引起的爆发相就处于时空混沌态，不过那里波碎只是暂时的，故可归于弱湍类. 本章将利用非线性漂移波模型(7-47)讨论源于激变的波动空间相干性破坏，如前所述，向强湍的激变是参数空间中的一个临界现象，与拓扑奇点引起的爆发相中的波碎不同. 在临界参数之前，系统的渐近状态是空间相干的(但可能阵发地出现波碎)，

如第九章讨论的那种弱湍状态；在越过临界参数之后，渐近波动完全处于波碎状态，不能再调回到完美的空间相干态，因此，向强湍流的激变是一种状态上的突变.

让我们先看一下模型(7-47)中与向强湍激变有关的一些现象[231,235]. 在一定参数区中对于给定 $\Omega$ 值，当驱动强度 $\varepsilon$ 越过某个临界值 $\varepsilon_c$ 时，渐近波斑图出现突变，如对 $\Omega=0.65$，突变的临界点为 $\varepsilon_c\approx0.20$. 图 10-2(参见彩图 10-2)是突变前和突变后的渐近时空等高图，其中(a) $\varepsilon=0.19$ 是突变前的典型状态，波动已变得起伏不定，但传播的波列仍清晰可见，在第九章中已经知道在随波坐标系中这类波动的轨道在高维环面上运动；(b) $\varepsilon=0.21$ 是突变后的状态，波动随时间和空间大幅度地迅速变化，波碎已发生. 代替突变前传播的波列，等高图上可见许多时空局域化的波峰和波谷，令人不禁联想起充分发展湍流中那些细微涡旋丝，二者都是湍流中时而产生时而湮灭的小尺度空间相干结构，只是在这里一维空间的情形，它们看起来像一些不规则的小型孤子和腔子，能量在孤子中高度集中，在腔子中几乎被抽空. 等高图 10-2(a)，(b)对应的波斑图可参考图 7-16(b)和图 7-17(b)，它们分别有弱湍和强湍的特征.

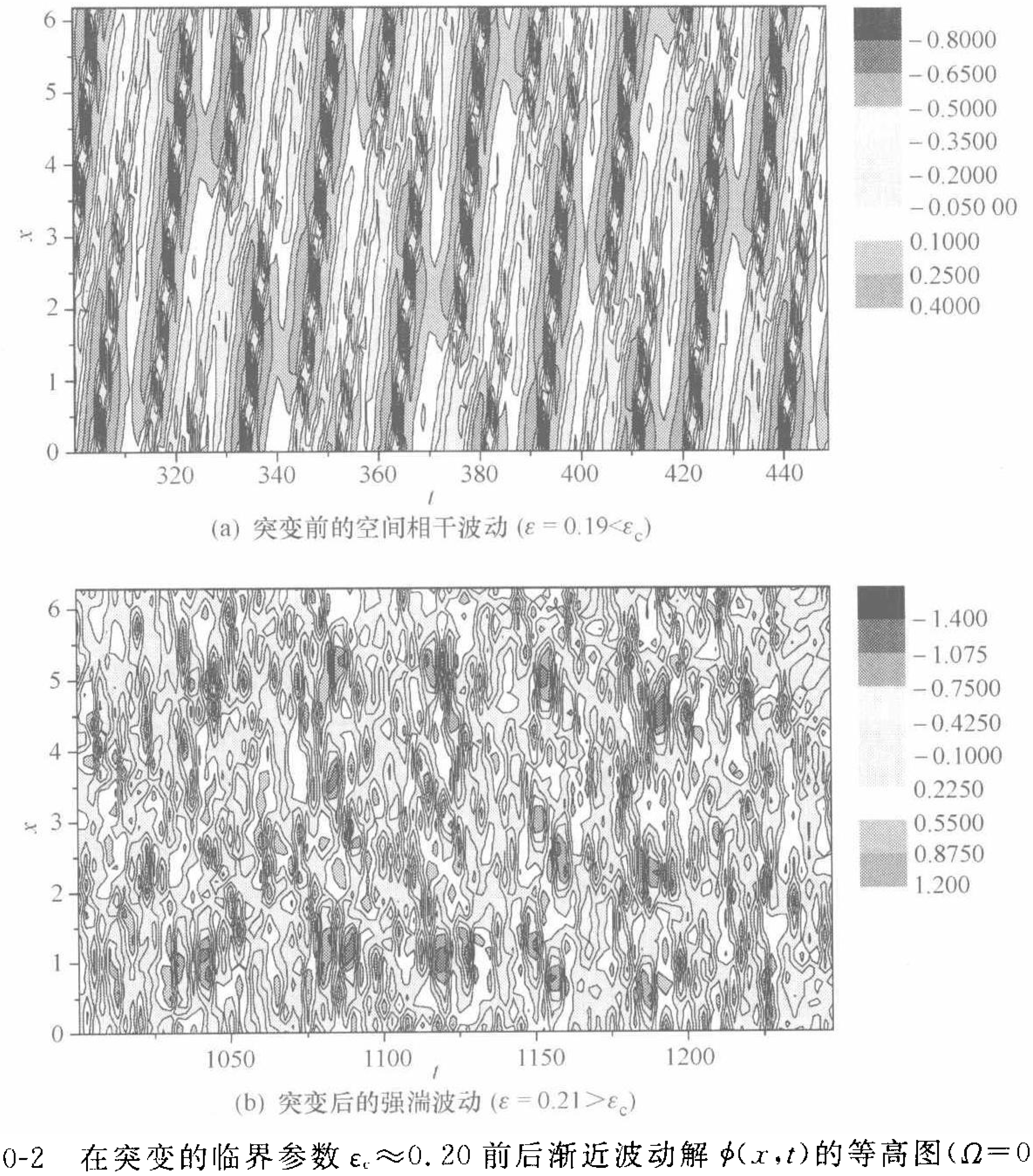
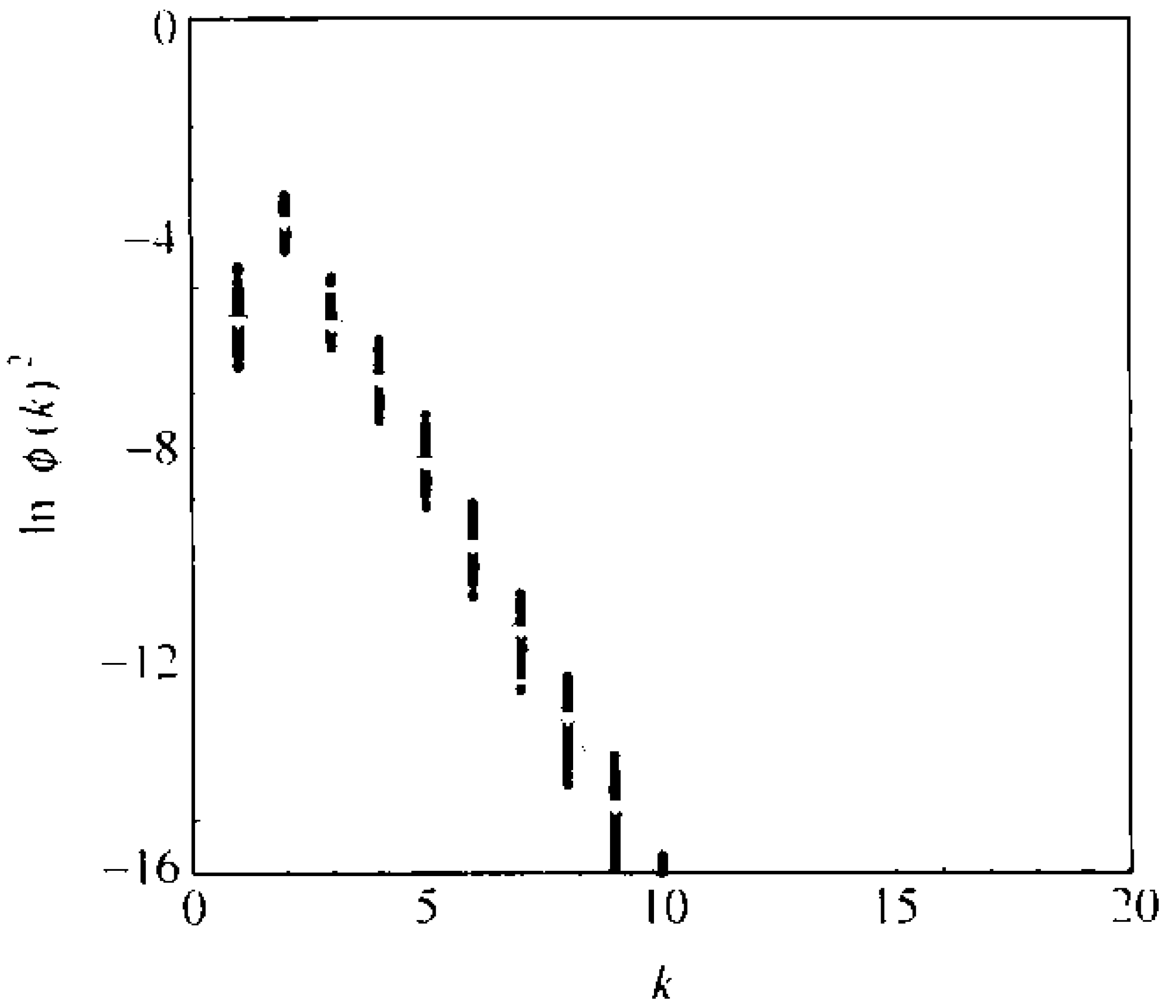



图 10-2 在突变的临界参数 $\varepsilon_c\approx0.20$ 前后渐近波动解 $\phi(x,t)$ 的等高图($\Omega=0.65$)

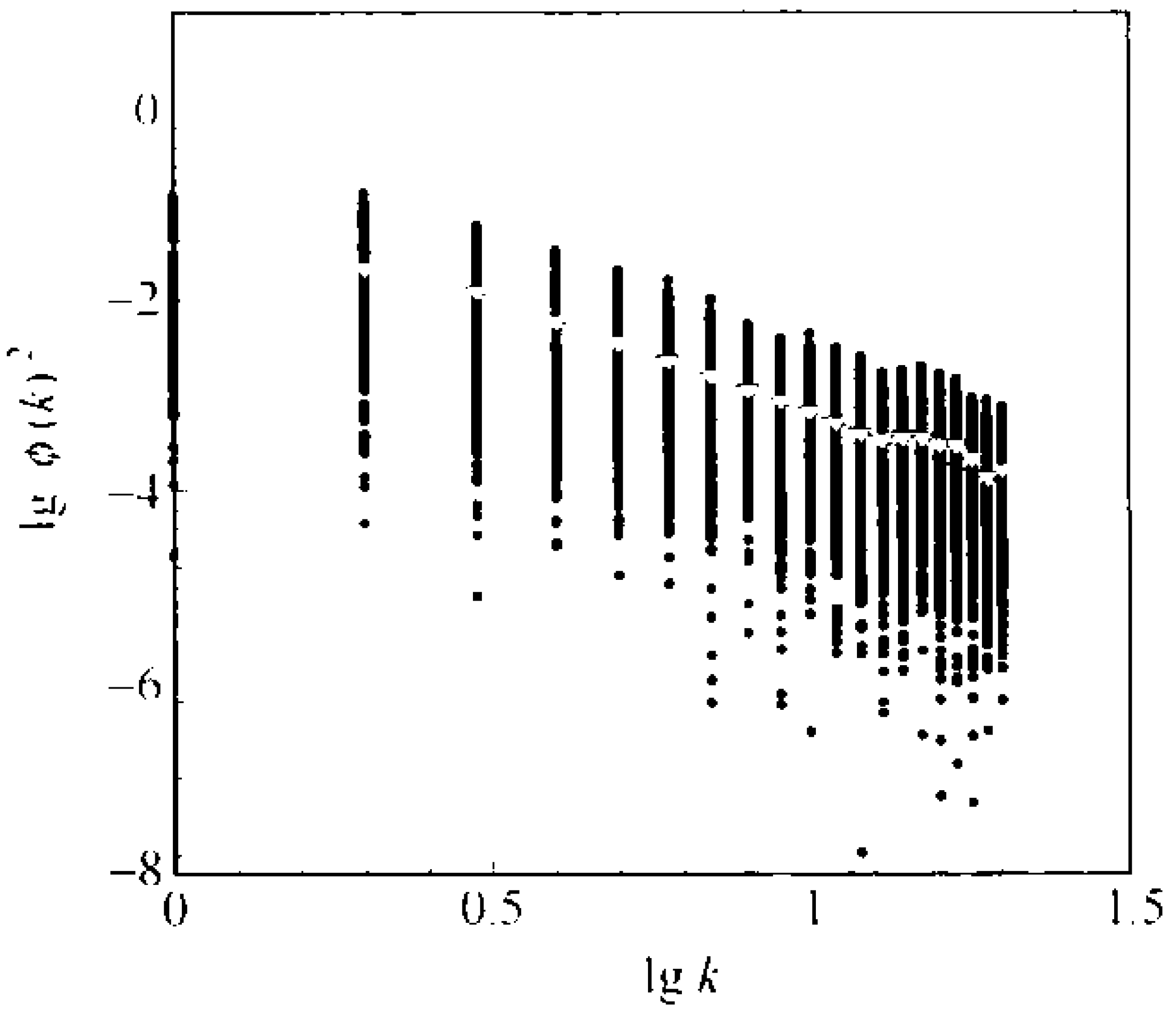
突变前后的波动分属动力学上不同的两个状态，这一点可从它们的波数谱显示的不同统计规律得到支持. 定义波数谱 $\phi(k,t)$ 为

$$\phi(k,t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\phi(x,t)e^{ikx}\,dx, \tag{10-2}$$

图 10-3(a)、(b)分别给出突变前后的波数谱 $\phi(k)$，$\Omega=0.65$. 图(a) $\varepsilon=0.19$ 为突变前空间相干态的谱，图(b) $\varepsilon=0.22$ 为突变后强湍流态的谱. 图中"·"是从一些分立时刻的波形 $\phi(x,t)$ 得到的结果，它们的时间平均在图上用"▽"表示. 图(a)中的主体部分在半对数图上呈直线形状，说明随波数增加波数谱 $\phi(k)$ 的平均幅度以指数规律 $e^{-\alpha k}$ 迅速下降，短波模式非常安静，拟合得到 $\alpha\approx1.56\approx3/2$；图(b)中 $\phi(k)$ 的幅度随时间的变化要剧烈得多，但它们的时间平均在双对数图[图(b)]上很大波数区间内呈很好的线性，说明波数谱 $\phi(k)$ 存在遵循幂律分布 $k^{-\beta}$ 的惯性区. 短波模式得到相当强的激发，符合充分发展湍流中惯性区的波谱特征. 拟合得到 $\beta\approx0.243\approx5/2$.




(a) 突变前的空间相干波动 ($\varepsilon=0.19<\varepsilon_c$)




(b) 突变后的强湍波动 ($\varepsilon=0.22>\varepsilon_c$)

图 10-3 在突变的临界参数 $\varepsilon_c\approx0.20$ 前后渐近波动解 $\phi(x,t)$ 的波数谱($\Omega=0.65$)

幂律分布的波数谱是模型(7-47)中突变后的波动解可以被视为充分发展湍流状态的重要依据. 除幂律分布符合强湍特点外，在图 10-3(b)中的低波数处，谱函数低于幂律规律，这一点也与实际观测的流体湍流谱一致. 在高波数处对幂律的偏离则可归因于计算中有限的模式数，在图 10-3(b)的计算中采用了 64 个空间格点，考虑到赝谱方法中的去伪相干(dealiasing)，图中有效复模式数为 20. 在上一章已说明，在这个参数区定态波的鞍结点和 Hopf 失稳方向都是 $\tilde{k}=2$，它以在傅里叶模式 $k=2$ 上的投影占优，因此用 20 个有效模式模拟就能够获得该参数下波动的主要动力学特征.

在临界点 $\varepsilon\approx0.20$ 前后强湍状态不同的统计规律，是波动模式能量交换状态

不同造成的. 图 10-4 比较了突变发生前后的两个状态下平均波数 $\bar{N}(t)$的演化,

$$\bar{N}(t)=\sqrt{\frac{\sum_k k^2\,|\,\phi_k(t)\,|^2}{\sum_k |\,\phi_k(t)\,|^2}},\qquad(10\text{-}3)$$

图中对应突变前空间相干波动($\Omega=0.65,\varepsilon=0.19$),平均波数 $\bar{N}$ 随时间很快达到平稳状态,在波数 $k\approx3$ 附近仅作微调,表明系统能量只在少数几个长波模式之间转移回归,描写这样的运动,三波相互作用模型也许就是个不错的近似;对应突变后的强湍波动($\Omega=0.65,\varepsilon=0.22$),$\bar{N}$ 随时间的演化完全失去了平稳态势,它先是随时间迅速振荡上升,表明长波模式能量不断向短波模式级联,随后平均上升速率逐渐趋缓,曲线的振荡却变得越来越激烈,这表示在长波和短波模式之间,或者说大尺度和小尺度模式之间,频繁地发生着能量交换,在能量交换过程中牵扯的模式尺度范围越来越宽[236]. 由数据可见,通常只需几个驱动周期 $2\pi/\Omega$,能量就可以从长波模式转移到极短波长的模式上,反过来在同样的时间尺度内,极短波长模式又将能量迅速地传递到长波模式上. 在用赝谱方法得到图 10-4 时划分了 $2^9$ 个空间格点,相当于约 170 个有效复模式,如果采用更多的空间格点,计算得到的平均波数 $\bar{N}(t)$将在更大范围内振荡.

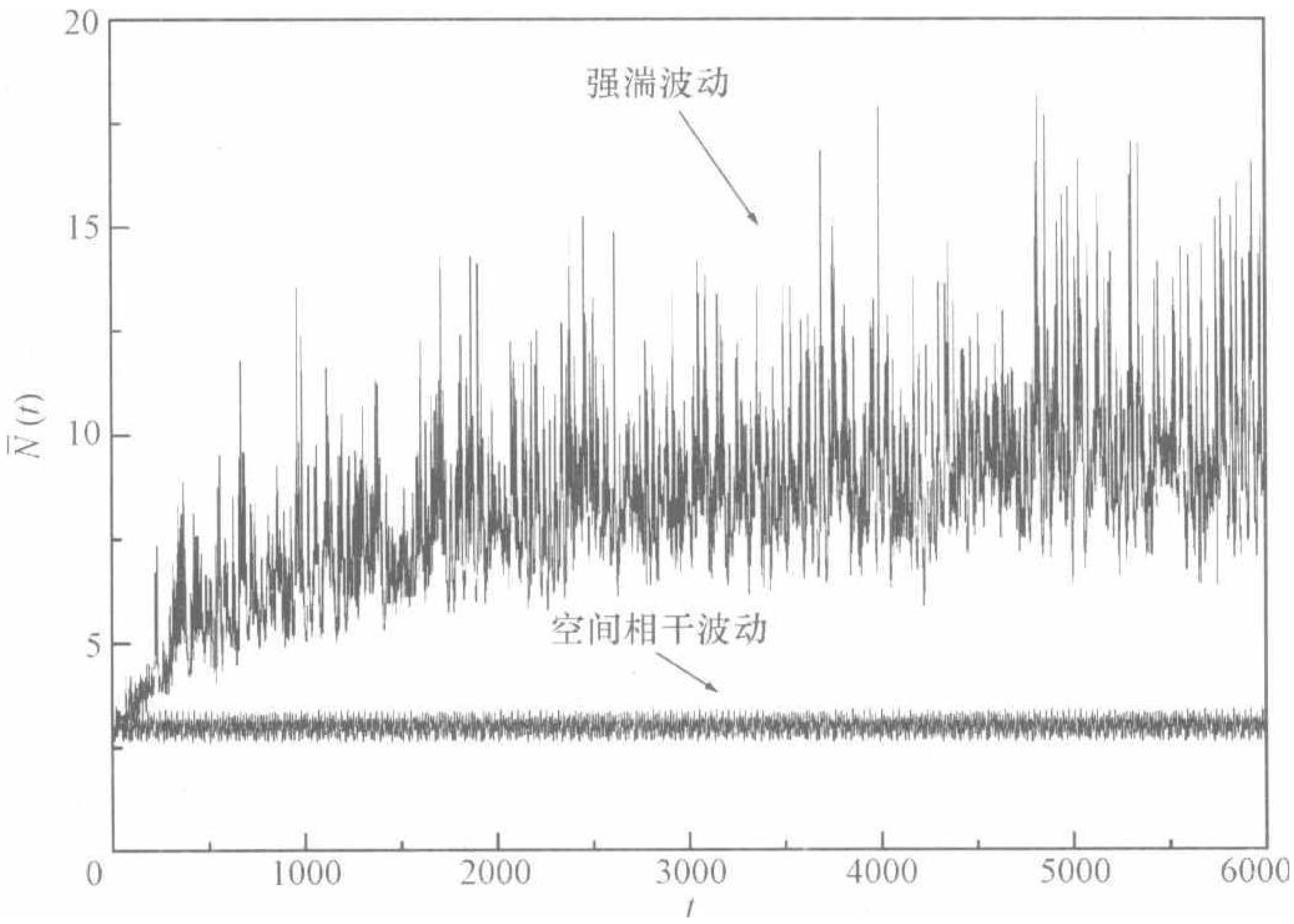



图 10-4　在突变的临界参数 $\varepsilon_c\approx0.20$ 前后波动解 $\phi(x,t)$的平均波数 $\bar{N}$ 随时间的演化

从图 10-4 可以构想出突变后渐近波动状态的如下图像:模式空间有两股相互竞争的能量流,一股从长波向短波模式正向转移,另一股从短波向长波模式逆向转移,时而正向的占优,时而逆向的占优. 通过这种在极宽波数范围内发生的双向能量流,最终才形成了强湍谱特有的幂律分布. 临界点前后迥异的能量传递方式也反映出突变后系统的动力学一定与突变前轨道约束在高维环上的运动截然不同.

此外，这一能量传递方式也与节 6.3 中考虑模式空间展宽的波-波相互作用模型中的显著不同，后者的能量几乎只是单向地向高波数模式转移(参考图 6-15)，长时间过后势必堆积在极短波模式上，不会形成幂律谱. 系统(7-47)的动力学在突变中究竟发生了怎样的变化，使得能量能在如此大跨度的尺度间有效地传递，是一个十分引人入胜的问题，值得去探个究竟.

## §10.2 鞍型定态波解的稳定和不稳定轨道

向强湍的转变表现为参数空间中的突变，这个现象已经暗示，强湍的起因一定不会像弱湍那样可以归因于一系列的局域分岔. 在非线性动力学理论中，激变是整个吸引子发生剧烈改变的一种动力学过程，如果向强湍转变是一种激变现象，那么它属于激变中的哪一类呢？从数值模拟结果结合定态波解的稳定性分析可以设想，如果的确发生了激变，极有可能它是与鞍点有关的激变. 从第七章介绍的数值模拟结果我们知道，出现湍流解的参数区与出现滞后现象的参数区高度相关，而第八章本征值分析又说明，那些位于滞后曲线负斜率分支上的定态波解，记做 $\phi_0^*(x-\Omega t)$，都是鞍结点不稳定的，而在随波运动坐标系的无穷维相空间中，$\phi_0^*(\xi\equiv x-\Omega t)$是一个鞍点，因此极有可能，正是这些鞍点在湍流产生中起了重要作用.

位于滞后负斜率分支上的鞍型波解 $\phi_0^*(\xi)$ 与同参数下位于其他分支(如下分支)上的定态波解 $\phi_0(\xi)$共存，如果后者作为一个不动点出现一系列 Hopf 分岔，我们在相空间中就有了一个随参数逐渐膨胀的吸引子，同时还有一个鞍点.

非线性动力学理论告诉我们，鞍点可能通过它的稳定和不稳定轨道影响混沌吸引子上的运动，在讨论这种影响是如何发生的之前，本节我们先了解一下波动系统中鞍点有怎样的稳定和不稳定轨道. 参照时序系统的情形，我们需要在随波坐标系中对鞍型定态波进行扰动，$\phi(\xi,\tau)=\phi_0^*(\xi)+\delta\phi(\xi,\tau)$，并计算在扰动波线性近似下的轨道 $\delta\phi^l(\xi,\tau)$，这里上标 l 表示线性近似. 第八章已导出了对定态波解 $\phi_0(\xi)$的线性扰动 $\delta\phi^l(\xi,\tau)$服从的一般方程(8-11)，现在定态波解是鞍结点不稳定的，$\phi_0^*(\xi)$，那么对它的线性扰动 $\delta\phi^l(\xi,\tau)$将沿着怎样的轨道演化？

记得在第八章中对扰动波 $\delta\phi^l(\xi,\tau)$作本征值分析时，我们曾将它的每个复模式 $\delta\phi_k^l(\tau)$投影到相空间中两个相互垂直的方向上，由此导出了扰动波模式的本征方程(8-16)；不过下面计算 $\delta\phi_k^l(\tau)$的轨道时，却不是采用这种投影方式，这是因为系统本征频率的数目一般与其自由度数目相同，特别是短波准模的本征频率通常非常高，这些频率会表现在傅里叶复模式上，它们在相空间两个正交方向上的投影快速地振荡，这给计算带来极大困难，而在极坐标下计算扰动波模式 $\delta\phi_k^l(\tau)$的轨道

可以避免这个困难.第九章已经导出了扰动波模式振幅和位相$\{b_k(t),\alpha_k(t)\}$满足的耦合方程组(9-11),这里忽略其中关于扰动模式的自非线性项,得到它们的线性演化方程如下[237,238]

$$\frac{\mathrm{d}b_k^1}{\mathrm{d}\tau}=-\frac{\gamma}{1-ak^2}b_k^1+\frac{fk}{2(1-ak^2)}\Big\{\sum_{i+j=k}A_ib_j^1\sin(\theta_i+\alpha_j^1-\alpha_k^1)$$

$$+\sum_{i-j=k}A_ib_j^1\sin(\theta_i-\alpha_j^1-\alpha_k^1)+\sum_{-i+j=k}A_ib_j^1\sin(-\theta_i+\alpha_j^1-\alpha_k^1)\Big\},\quad(10\text{-}4\text{a})$$

$$\frac{\mathrm{d}\alpha_k^1}{\mathrm{d}\tau}=-k\Big[\frac{c}{1-ak^2}-\Omega\Big]-\frac{fk}{2(1-ak^2)b_k^1}\Big\{\sum_{i+j=k}A_ib_j^1\cos(\theta_i+\alpha_j^1-\alpha_k^1)$$

$$+\sum_{i-j=k}A_ib_j^1\cos(\theta_i-\alpha_j^1-\alpha_k^1)+\sum_{-i+j=k}A_ib_j^1\cos(-\theta_i+\alpha_j^1-\alpha_k^1)\Big\},\quad(10\text{-}4\text{b})$$

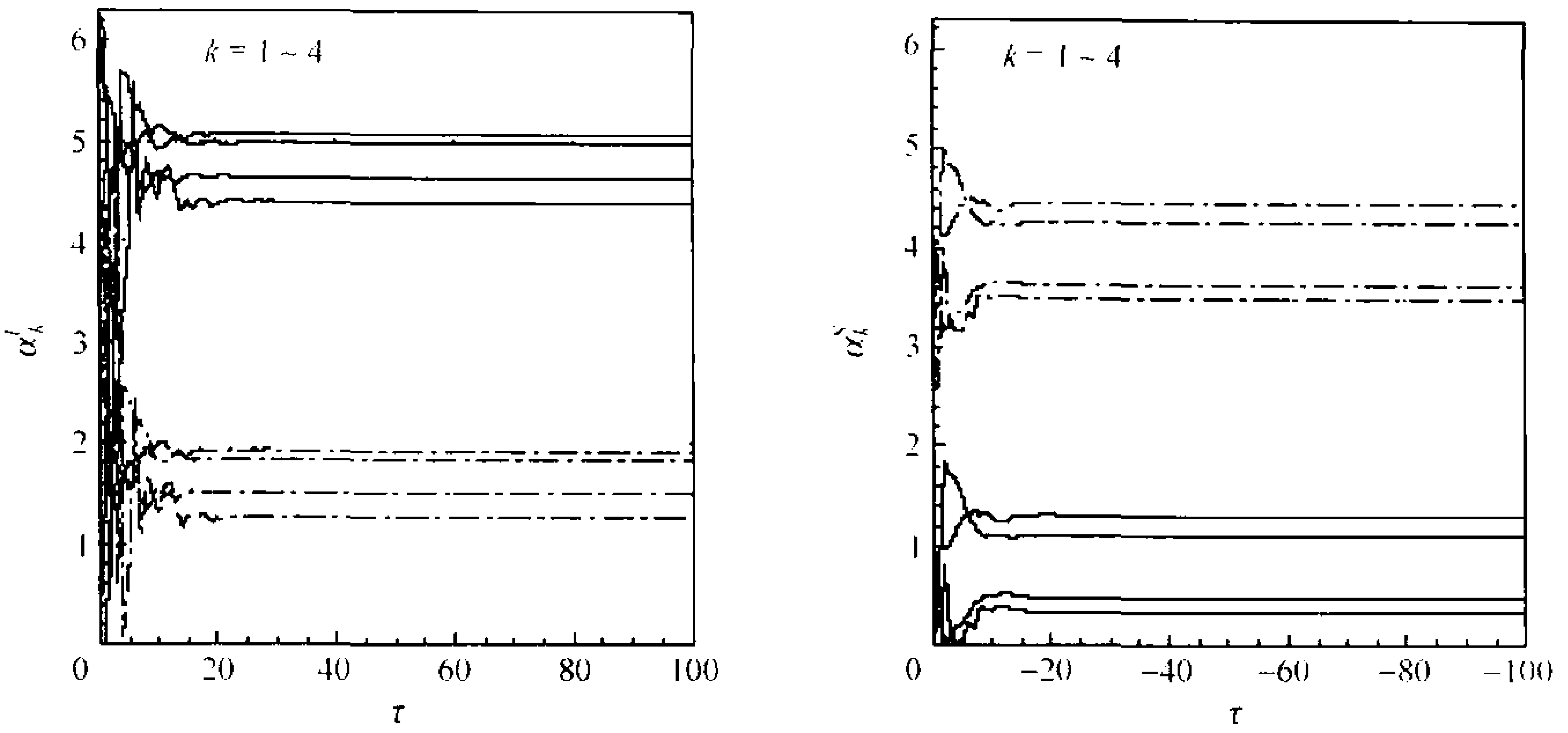
$$(k=1,2,\cdots,N).$$

方程没有计入不同波数的扰动模式$(b_k^1,\alpha_k^1)$之间的耦合,它们只受到定态波势阱$\phi_0(\xi)$的散射作用,因此方程(10-4)描写的是定态波解$\phi_0(\xi)$对扰动$\delta\phi$的线性响应.在给定参数下解得定态波模式$\{A_k,\theta_k\}$后,可从初始扰动$\{b_k^1(0),\alpha_k^1(0)\}$出发求解方程,计算线性扰动轨道.一般取扰动模式有很小的振幅$\{b_k^1(0)\}$,如果所有$\{b_k^1(\tau)\}$都趋于0,说明定态波解$\phi_0(\xi)$是稳定的;如果幅度$\{b_k^1(\tau)\}$随时间增长,说明$\phi_0(\xi)$对扰动不稳定.

根据鞍点轨道示意图5-1(d)我们知道,有两条不稳定轨道从鞍点伸展出去,另有两条稳定轨道从无穷远处回到鞍点,那么,鞍型定态波解$\phi_0^*(\xi)$作为相空间中的一个鞍点,是不是也有两条不稳定轨道和两条稳定轨道呢?

让我们取参数越过向强湍突变的临界点,如$\Omega=0.65,\varepsilon=0.22>\varepsilon_c$,由方程组(7-52)解出相应参数下位于能量滞后曲线负斜率分支上的那个鞍型定态波$\phi_0^*(\xi)$的各个模式$\{A_k^*,\theta_k^*\}$,然后从方程(10-4)计算它的不稳定和稳定轨道.其中不稳定轨道比较容易找到,将初始点设在$\phi_0^*(\xi)$近邻,即取极小的$\{b_k^1(0)\}$,经过一段暂态之后,所有稳定方向的运动都被阻尼,扰动$\{b_k^1(\tau),\alpha_k^1(\tau)\}$将沿鞍点的不稳定轨道前进.

对于波动系统来说,鞍点$\phi_0^*(\xi)$的不稳定轨道的不寻常之处并不在于扰动幅度$\{b_k^1(\tau)\}$的指数增长——这一点与时序系统没有什么不同,而在于其位相$\{\alpha_k^1(\tau)\}$的行为.图10-5(a)是4个模式的位相$\alpha_k^1(k=1\sim4)$沿鞍点不稳定轨道的演化,由图可见,在暂态过后,各模式位相分别趋向常数,$\{\alpha_k^1(\tau)\}\to\{\alpha_k^{U_1}\}$,如图10-5(a)上的实线所示.改变初始条件,如将各模式的初始位相加$\pi$,还可以找到另一条不稳定轨道,这时所有位相$\{\alpha_k^1\}$随时间趋向另一组常数,$\{\alpha_k^1(\tau)\}\to\{\alpha_k^{U_2}\}$,如图10-5(a)上的点划线所示.不难发现,在两组常位相之间有关系$\{\alpha_k^{U_1}\}=\{\alpha_k^{U_2}\pm\pi\}$.




(a) 沿鞍点的不稳定轨道　　(b) 沿鞍点的稳定轨道

图 10-5 在鞍型定态波解上线性扰动波 $\delta\phi^{l}(\xi,\tau)$的模式位相 $\alpha_k^{l}(\tau)(k=1\sim4)$的演化（随波坐标系，$\Omega=0.65$，$\varepsilon=0.22$）

再寻找鞍点的稳定轨道，它将位于无穷远处的粒子带回到鞍点. 为此，需将方程组(10-4)作时间反演，$\tau\rightarrow-\tau$，采用适当初始扰动$\{b_k^{l}(0),\alpha_k^{l}(0)\}$，追踪$-\tau\rightarrow+\infty$. 鞍点的稳定轨道也有两条，无独有偶，沿这两条稳定轨道，模式位相也分别趋于两组常数$\{\alpha_k^{S_1}\}$和$\{\alpha_k^{S_2}\}$，且有$\{\alpha_k^{S_1}\}=\{\alpha_k^{S_2}\pm\pi\}$，如图 10-5(b)的实线和点划线所示.

如何理解模式位相沿鞍点的稳定和不稳定轨道为常数这一不寻常性质？我们知道，扰动波的线性轨道方程(10-4)和本征方程(8-16)都源于方程(8-11)，它们描写同样的物理. 假设本征方程(8-16)有 $N$ 对复共轭本征值$\{\lambda_k=\gamma_k\pm\mathrm{i}\omega_k\}$，系统就有 $N$ 个本征频率$\{\omega_k\}$，只有那些不稳定方向上的本征频率出现在渐近运动中，它们投影在各个傅里叶模式 $k$ 上；我们记得，鞍结点不稳定的定态波解在失稳方向 $\tilde{k}^*$ 上的特征频率是 $\omega_{\tilde{k}^*}=0$，因此，当鞍型波 $\phi_0^*(\xi)$受到扰动时，在各个傅里叶模式的渐近运动中唯一显现出来的将是 0 频率，这就是为什么图 10-5 中沿鞍点轨道的位相 $\alpha_k(\tau)(k=1\sim4)$都趋向无振荡常数值的原因[219]，当然这里所说的频率都是在随波坐标系中观察的值.

让我们考虑一定波数 $k$ 的分波运动，鞍型定态分波是

$$\phi_{0,k}^*(\xi)=A_k^*\cos[k\xi+\theta_k^*], \tag{10-5}$$

线性扰动分波是

$$\delta\phi_k^{l}(\xi,\tau)=b_k^{l}(\tau)\cos[k\xi+\alpha_k^{l}(\tau)]. \tag{10-6}$$

既然沿鞍点的不稳定轨道运动时 $\alpha_k^{l}(\tau)$为常数，线性扰动分波 $\delta\phi_k^{l}(\xi,\tau\rightarrow\infty)$与分波势阱 $\phi_{0,k}^*(\xi)$的位相差 $\Delta_{1,2}^{U}\equiv\alpha_k^{U_{1,2}}-\theta_k^*$ 必定保持不变. 我们也可以作这样的理解，正是由于分波 $\delta\phi_k^{l}(\xi,\infty)$与 $\phi_{0,k}^*(\xi)$之间的位相差保持在一个特定的常数值（$\Delta_1^{U}$ 或 $\Delta_2^{U}$），扰动分波 $\delta\phi_k^{l}(\xi,\tau)$的振幅才能受到定态分波势阱 $\phi_{0,k}^*(\xi)$的持续驱动，得以指

数增长；类似地，所谓鞍点的稳定轨道，就是在另外两个特定位相差 $\Delta_{1,2}^{S}\equiv\alpha_k^{S_{1,2}}-\theta_k^*$ 上，分波 $\delta\phi_k^1(\xi,\tau)$ 的振幅被势阱持续地阻尼而指数衰减. 在一定意义上，这有点像带电粒子在静电波场势阱中运动的情形，在线性近似下，粒子被加速或减速与它在势阱中所处的位相有关.

能否将鞍型波动解 $\phi_0^*(\xi)$ 的不稳定和稳定轨道表达为示意图 5-1(d) 中那样的"标准"形式呢？在波动系统中它们是无穷维相空间中的轨道，可将其投影到傅里叶空间中一个截面上观察. 因为是复空间，把扰动波模式的振幅和位相组合成单一变量是方便的，如计算扰动模式 $\delta\phi_k$ 的能量，定义为[231]

$$\delta E_k(\tau) = (1-ak^2)[A_k b_k(\tau)\cos(\theta_k-\alpha_k(\tau))/2 + b_k^2(\tau)/4], \tag{10-7}$$

它是实现了的波动总能量 $E(\tau)$ 与定态波解的能量 $E_0$ 之差 $\delta E(\tau)$ 在相空间中 $k$ 方向上的投影，即有

$$\delta E(\tau) \equiv E(\tau) - E_0 \equiv \sum_k \delta E_k(\tau). \tag{10-8}$$

因为 $E_0$ 是时间的常数，波动能量 $E(\tau)$ 随时间演化的信息都包含在 $\{\delta E_k(\tau)\}$ 中.

图 10-6 是沿鞍点轨道运动时扰动波能量 $\delta E(\tau)$ 在 $k=1,2$ 平面上的投影，$\Omega=0.65$，$\varepsilon=0.22$. 图中原点是鞍点，它对应无扰动时的鞍型定态波解 $\phi_0^*(\xi)$. 由图可见，两条不稳定轨道("▽"连线)从鞍点出发趋向无穷远，两条稳定轨道("▲"连线)从无穷远处导向鞍点，与鞍点轨道的标准图像 5-1(d) 完全一致. 在由扰动模式能量 $\delta E_k(\tau)(k=1,2,\cdots)$ 架构起来的无穷维相空间中的任一截面上都可以找到鞍点轨道的类似投影.

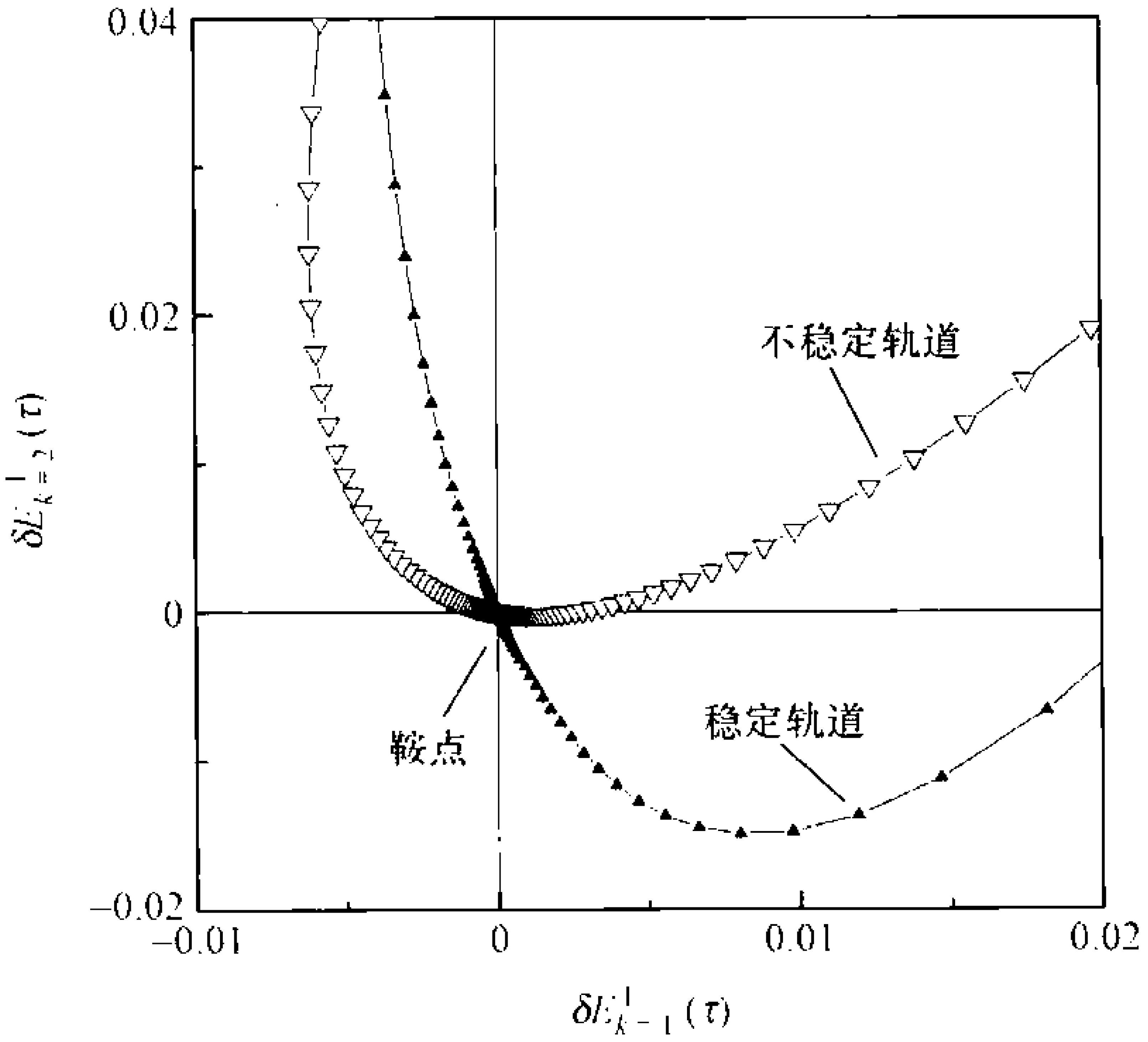



图 10-6　对鞍点的线性扰动轨道在模式能量空间的投影(随波坐标系，$\Omega=0.65$，$\varepsilon=0.22$)

因此，当观察相空间中与吸引子共存的鞍点时，不要忘记这个鞍点还"带着"它

的轨道伸展在相空间中. 非线性动力学理论告诉我们，如果这个吸引子变得混沌并膨胀得足够大，它将有可能与鞍点轨道相切，最终引发吸引子激变[10]. 这听起来有点不可思议，鞍点不是在物理上没有实现的数学解吗？它的所谓不稳定和稳定轨道也不过是在线性近似下从理论上得到的解，如此虚幻之物，又如何能影响实现了的吸引子上的轨道运动呢？让我们暂且接受这一理论，探究它在波动系统中的可能表现，再试图从物理上去理解它.

## § 10.3　鞍点在向强湍激变中的作用

从这一节开始，我们将深入探讨向强湍激变的机制，特别关注鞍点在其中的作用. 为此，需放弃对扰动波所作的线性近似，转而采用关于扰动振子$\{b_k(\tau),\alpha_k(\tau)\}$的完全非线性方程组(9-11). 与方程组(10-4)比较，方程组(9-11)包含了扰动波 $\delta\phi(\xi,\tau)$的自非线性项，相应的模-模耦合过程将允许失稳方向上的能量向其他方向转移.

在讨论强湍起因时，不是直接模拟非线性波方程(7-47)，却舍近求远，去求解扰动波的模式方程组(9-11)，是因为后者隐含着强湍动力学的物理. 在用赝谱方法模拟方程(7-47)时，我们是在实验室坐标系中将非线性波 $\phi(x,t)$看做一组相互耦合的分波，$\{\widetilde{A}_k(t)\cos[kx+\tilde{\vartheta}_k(t)]\}$，而求解扰动模式方程组(9-11)，则是在随波坐标系中将非线性波 $\phi(\xi,\tau)$视为在定态波势阱[这里是鞍型势 $\phi_0^*(\xi)$]中的一组耦合振子$\{b_k(\tau),\alpha_k(\tau)\}$. 在本章分析向强湍激变的机制以及强湍状态下波的动力学时我们将采用后一图像，许多有趣的现象可在这个图像下被揭示出来.

当然，我们也可以直接模拟非线性波方程(7-47)，却又保持关于非线性波的上述图像. 为此，就需要将模拟波方程(7-47)得到的解 $\phi(x,t)$变换到随波坐标系，$\phi(x,t)\to\phi(\xi,\tau)$，再分离出扰动波部分，$\delta\phi(\xi,\tau)\equiv\phi(\xi,\tau)-\phi_0^*(\xi)$，将结果的$\delta\phi(\xi,\tau)$投影到各傅里叶模式 $k$ 上，最后得到一组扰动振子$\{b_k(\tau),\alpha_k(\tau)\}$. 本章求解耦合振子方程组(9-11)的一些主要结果，都曾用后一方法作过交叉检验，下面引用的图中有一些就是用后一个方法计算的. 在本章的叙述中我们不特别强调使用了哪种方法，因为由它们得到的向强湍激变的机制完全相同. 用两个方法得到的结果符合也充分说明将所讨论的非线性波看做是(鞍型)定态波势阱中的耦合振子系统这一物理图像是非常合理的.

### 10.3.1　支配原理

在求解扰动波振子的完全非线性方程组(9-11)之前，让我们对系统(7-47)的动力学作进一步的定性思考. 在忽略扰动波的自非线性时，线性扰动振子的运动由方程(10-4)描写，它有 $N$ 个独立的复方向 $\bar{k}$，它们支撑起一个线性空间(不一定正

交),假设这 $N$ 个方向上的本征值都是复共轭的,就有 $N$ 对独立复振子(准模),若在某个 $\tilde{k}^*$ 方向上出现了 Hopf 失稳,在这个方向上的扰动将被放大. 当计入扰动波的自非线性时,振子的运动由方程(9-11)描写,在由复方向$\{\tilde{k}\}$支撑的表象中观察,原来独立的 $N$ 对振子现在不再独立,通过准模之间的相互作用,那些线性稳定的振子将可以从失稳的振子 $\tilde{k}^*$ 汲取能量,各振子间出现了频繁的能量交换过程.

在非线性理论中常使用"支配原理"(slaving principle)[8] 这一概念,即非线性系统的整体行为是被极少数序参量(order parameter)的行为所决定的,例如失稳的模式支配其他模式的运动,慢变量支配快变量等. H. Haken 在他著名的《协同学》中曾举例说,语言在一个人的生命过程中变化很少,一个人出生之后就会被他所学的语言所支配,当然也为这个语种的延续作出了贡献[8].

支配原理在这里如何表现呢? 如上所述,Hopf 不稳定的振子 $\tilde{k}^*$ 就像一个周期力,它通过模-模耦合以其失稳频率 $\omega_{\tilde{k}^*}$ 驱动其他稳定方向的振子 $\tilde{k}(\tilde{k}\neq\tilde{k}^*)$. 然而,随着后者幅度逐渐增长,那些 $\tilde{k}(\tilde{k}\neq\tilde{k}^*)$方向上的本征频率 $\omega_{\tilde{k}}$ 势必力图表现,那么模-模耦合的结果是否就是那 $N-1$ 个稳定方向上的本征频率 $\omega_{\tilde{k}(\tilde{k}\neq\tilde{k}^*)}$ 最终都将显现出来呢? 支配原理告诉我们的图像并不是这样.

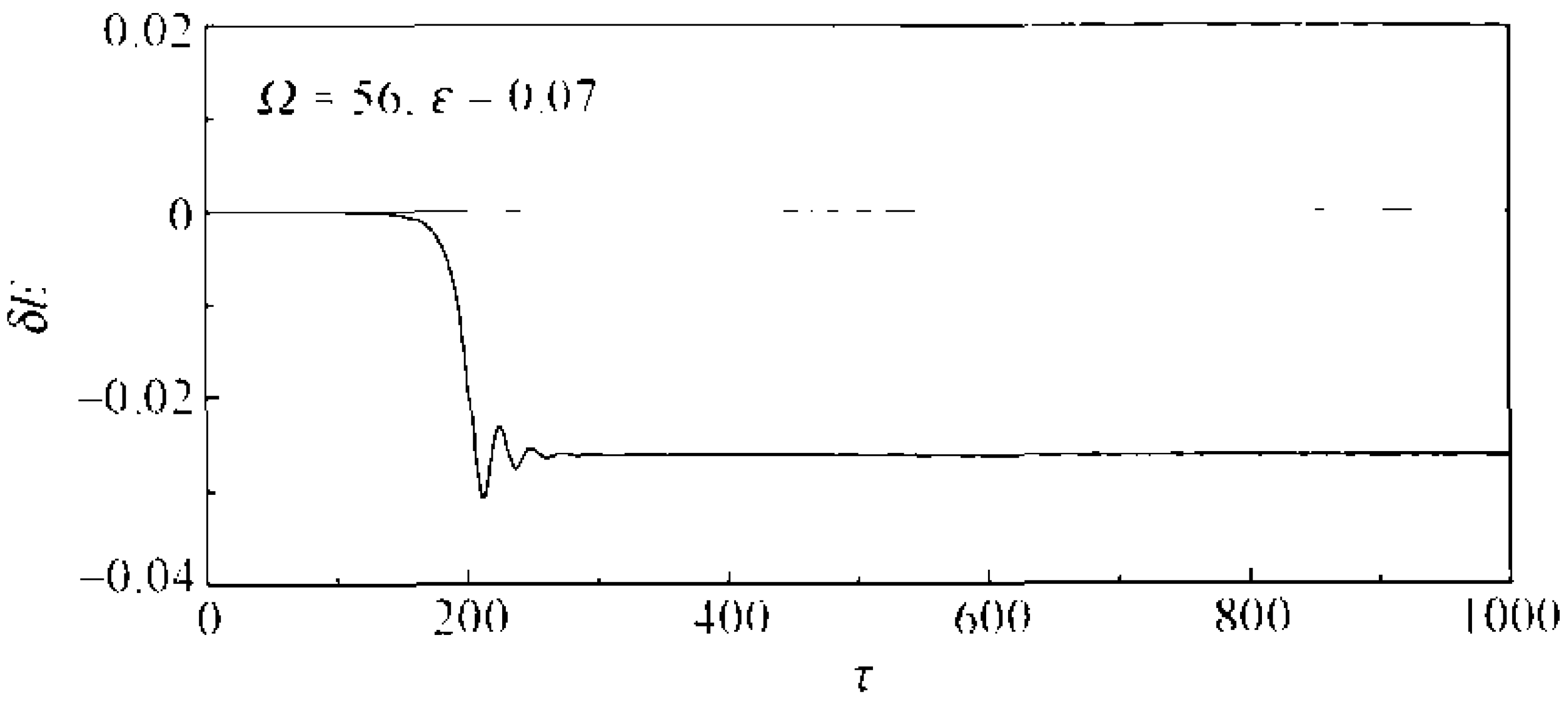
事实上,那些稳定方向振子的运动,常常会被失稳方向上振子 $\tilde{k}^*$ 的运动所支配. 稳定方向的振子在力图表现自己的本征频率 $\omega_{\tilde{k}(\tilde{k}\neq\tilde{k}^*)}$ 的同时,又受到频率 $\omega_{\tilde{k}^*}$ 的驱动,它们可能选择的运动方式是: 在自身本征频率 $\omega_{\tilde{k}(\tilde{k}\neq\tilde{k}^*)}$ 的基础上调节,尽量与失稳频率 $\omega_{\tilde{k}^*}$ 实现和谐的运动. 最佳的协调结果是与之锁频,在一定意义上这就像图 5-10 中振子在外周期驱动下的运动,那里每个谐波振子都有从其本征频率伸出的 Arnol'd 舌头,振子通过调节其幅角的运动,在舌区找到了与驱动频率相锁频的运动频率. 回到我们的情况,如果所有振子 $\tilde{k}(\tilde{k}\neq\tilde{k}^*)$都实现了与失稳方向 $\tilde{k}^*$ 上的振子锁频,系统最终表现出来的就只有一个独立频率,就像图 9-2 中定态波不动点在 Hopf 失稳后发展成极限环的情形那样. 当然,这里的情形比图 5-10 要复杂些,因失稳方向 $\tilde{k}^*$ 上的运动也同时受到其他稳定方向运动的影响,在极限环上运动的频率一般会从失稳的本征频率 $\omega_{\tilde{k}^*}$ 略有偏移. 在更一般的情形下,如果各稳定方向上的运动不能与 Hopf 失稳方向上的运动协调到锁频的极限环,它们将转而寻找其他的协调方式.如进一步分岔至二维乃至高维环等,这些现象我们在第九章已经介绍过了.

### 10.3.2　在鞍型定态波势阱中扰动波的相干结构

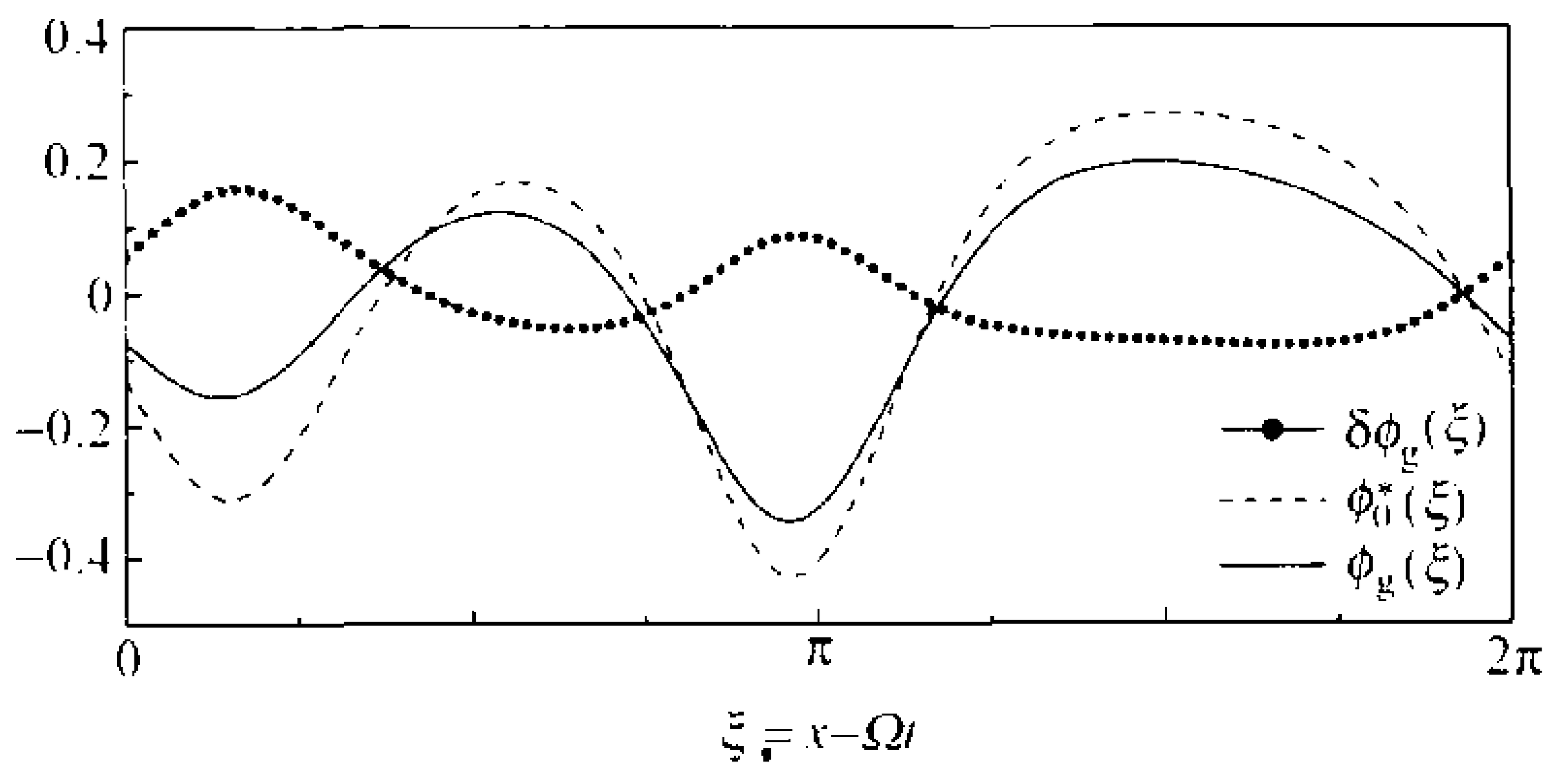
在鞍型不稳定定态波解 $\phi_0^*(\xi)$的情形下,失稳的本征频率为 0,随着失稳振子的幅度增长,它也企图支配其他稳定方向振子的运动,可是那些振子都拥有有限大小的本征频率,由这些本征频率伸出的 Arnol'd 舌头中的频率也是非零的,它们找

不到与失稳的零频率实现锁频或其他可协调的运动方式，运动轨道只能落到相空间中与鞍型定态波解共存的其他可实现的状态上去．这与前面讨论的 Hopf 不稳定的不动点形成对照，在 Hopf 不稳定的定态波解的无穷小紧邻，总可以找到由失稳频率支配的极限环运动．在这个意义上我们说，鞍型定态波解是绝对不稳定的．

图 10-7 是 $\Omega=0.56$，$\varepsilon=0.07$ 时，耦合振子方程组(9-11)的一个计算结果[239]，定态波解选为在该参数下滞后曲线负斜率分支上的鞍型波解 $\phi_0^*(\xi)$，初始扰动 $\{b_k(0)\}$ 非常小，轨道在相空间中的出发点十分靠近鞍点．图 10-7(a)是扰动波能量 $\delta E(\tau)$，由图可见，开始时 $\delta E(\tau)$ 几乎单调地指数发展，这是沿鞍点的不稳定轨道演化的阶段；当扰动波的自非线性项与方程中的其他项可比时，$\delta E(\tau)$ 偏离指数行为，最后稳定在一个非零常数，$\delta E(\tau)\to\delta E_g$，表明终态是有别于鞍点的一个不动点．




(a) 扰动波能量 $\delta E(\tau)$

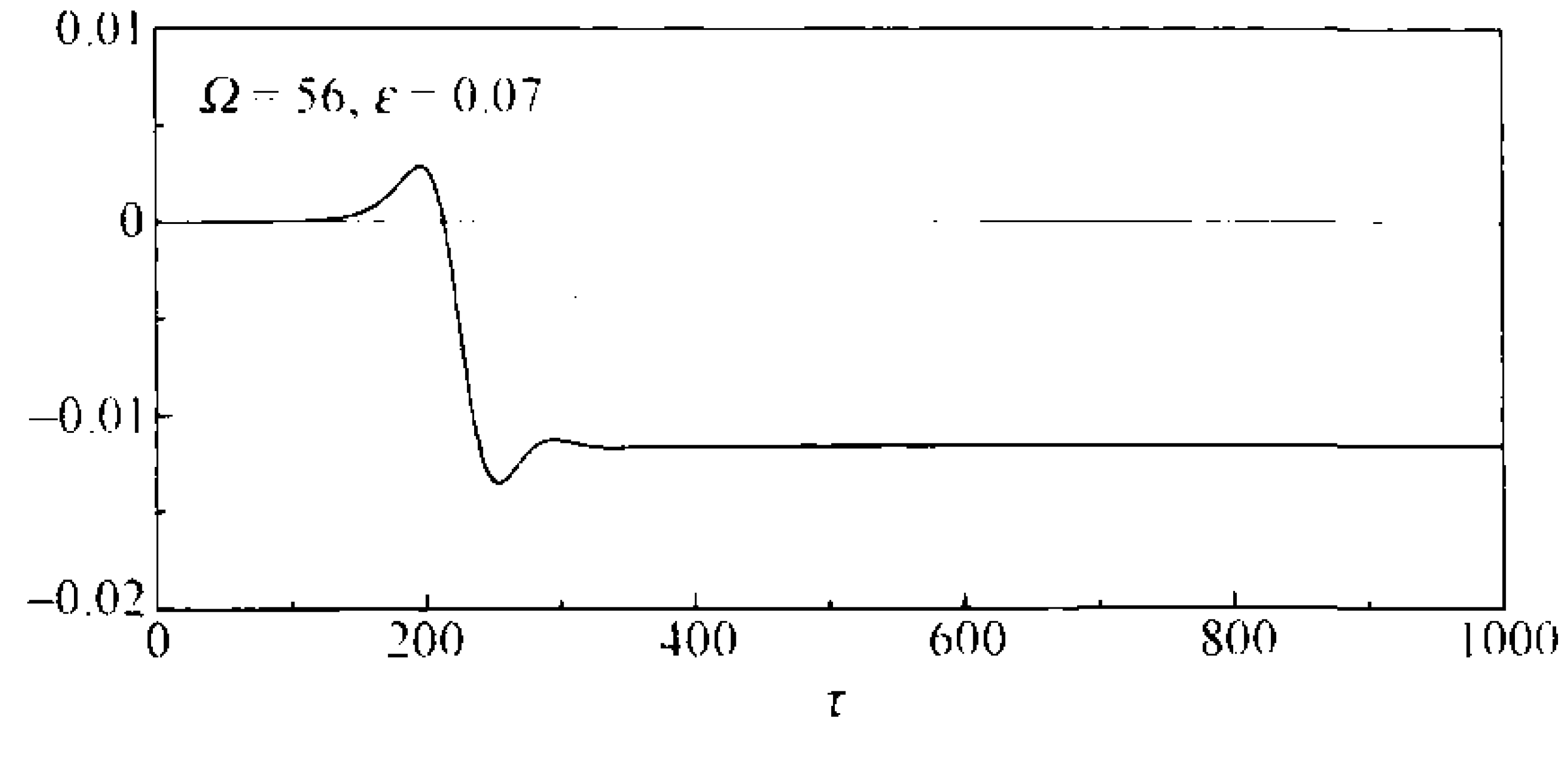



(b) 扰动波的渐近结构 $\delta\phi_g(\xi)$，鞍型定态波解 $\phi_0^*(\xi)$ 和实现了的稳定定态波解 $\phi_g(\xi)$

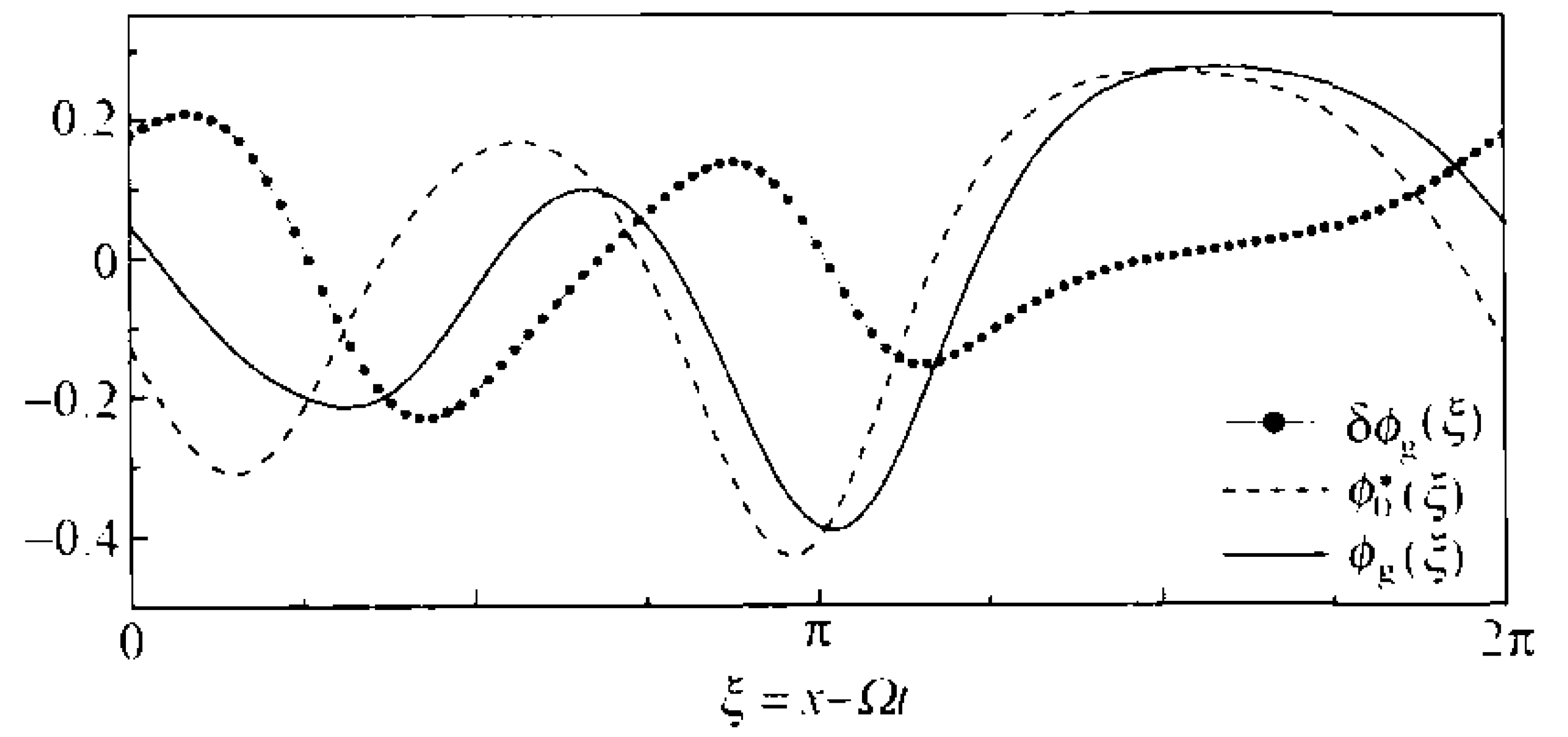
图 10-7　在鞍型定态波解 $\phi_0^*(\xi)$ 上扰动的演化($\Omega=0.56$，$\varepsilon=0.07$)

在图 10-7(a)的渐近定态下，各扰动波振子在鞍型波解 $\phi_0^*(\xi)$ 中架构成一个不随时间改变的相干结构，记做 $\delta\phi_g(\xi)$，如图 10-7(b)所示．实现了的波动解则是 $\phi_g(\xi)=\phi_0^*(\xi)+\delta\phi_g(\xi)$，图中 $\phi_0^*(\xi)$，$\delta\phi_g(\xi)$ 和 $\phi_g(\xi)$ 分别用虚线、圆点线和实线表示，在随波坐标系中 $\phi_g(\xi)$ 也是一个不变的结构．在这个例子中，鞍型波解 $\phi_0^*(\xi)$ 看起来十分像一个势函数，它将 $\delta\phi_g(\xi)$ 的两个峰分别约束在其两个阱之中．尽管 $\phi_0^*(\xi)$ 不是一个物理上实现了的状态，这个虚波动解却对真实世界中的运动起到了举足轻重的作用．

图 10-8 与图 10-7 有相同参数($\Omega,\varepsilon$)，只是初始扰动 $\delta\phi(\xi,0)$取值不同，结果扰动波有不同的能量演化曲线 $\delta E(\tau)$[参见图 10-8(a)]和渐近波形 $\delta\phi_g(\xi)$[参见图 10-8(b)]，后者对应另一个定态波解 $\phi_g(\xi)$，在图 10-8(b)中 $\phi_0^*(\xi)$作为势阱约束扰动波渐近相干结构 $\delta\phi_g(\xi)$的作用同样明显.




(a) 扰动波能量$\delta E(\tau)$




(b) 扰动波的渐近结构$\delta\phi_g(\xi)$，鞍型定态波解 $\phi_0^*(\xi)$和实现了的定态波解$\phi_g(\xi)$

图 10-8　在鞍型定态波解 $\phi_0^*(\xi)$上扰动的演化

($\Omega=0.56$，$\varepsilon=0.07$；初始扰动与图 10-7 不同；各符号与图 10-7 的相同)

在图 10-7 和图 10-8 中扰动波振子在鞍型波势阱 $\phi_0^*(\xi)$中架构起形状颇似孤立子的结构 $\delta\phi_g(\xi)$，在一定意义上，这与第七章提到的间隙孤子现象非常相似. 间隙孤子的出现需要有周期势和非线性这两个条件[14][187]，就像光波在超晶格中传播形成的间隙孤子，超晶格为系统提供了一个周期势，介电常数依赖于局域光强这一假设表明光传播经历的是非线性过程. 在扰动波的演化方程(9-8)以及它的模式方程(9-11)中，鞍型定态波解 $\phi_0^*(\xi)$起到了周期势的作用，同时方程又包含扰动波的自非线性，在它们的共同作用下扰动波才形成了孤子样的相干结构 $\delta\phi_g(\xi)$.

关于孤立子的理论告诉我们，稳定孤立子的出现是系统的色散与非线性效应达到平衡的结果. 这里的情形也类似，制约扰动波 $\delta\phi(\xi,\tau)$运动的方程(9-8)中包含色散项和 $\delta\phi(\xi,\tau)$的自非线性项，当它们达到平衡时就形成了稳定的相干结构 $\delta\phi_g(\xi)$. 与普通独立存在的孤立子不同的是，由于 $\phi_0^*(\xi)$的散射，方程(9-8)中扰动波的色散行为已发生了非线性改变. 在这个意义上，可以说 $\delta\phi_g(\xi)$是一个非线性的

孤子结构. 当然这个结构不能独立存在，它与鞍型定态波迭加，形成了可观察的稳定定态波 $\phi_g(\xi)$，对应于相空间中与鞍点共存的另一个不动点. 从同一个鞍型波解 $\phi_0^*(\xi)$出发，可以分别找到像图 10-7(b) 和图 10-8(b) 这样两个稳定定态波解 $\phi_g(\xi)$，它们各有自己的吸引盆.

这里需要说明的是，在计算图 10-7 和图 10-8 时，我们将扰动波 $\delta\phi(\xi,\tau)$展开为共轭复振子之和[239]，即

$$\delta\phi(\xi,\tau) = \sum_{k=1}^{N} b_k(\tau)\left(e^{i[k\xi-\alpha_k(\tau)]} + e^{-i[k\xi-\alpha_k(\tau)]}\right), \tag{10-9}$$

与用实振子展开式(9-9)得到的振子方程(9-11)比较，其中的自非线性项相差了两倍因子，得到的振子振幅 $b_k(\tau)$也差两倍因子，除此之外用两个展开式得到的振子时间行为完全相同. 振子振幅这一因子上的差别对后面讨论向强湍激变的机制以及强湍的动力学行为没有任何影响，因此除特别需要外，下面一般不再声明采用的是哪种展开式计算的. 需要说明的只有一点：按照展开式(10-9)计算的总波能 $E_g \equiv E_0^* + \delta E_g$ 位于滞后曲线的上下分支之间[239]，而后来按照展开式(9-9)计算，发现相应于图 10-7 和图 10-8，总波能 $E_g$ 分别落在了滞后曲线的下分支和上分支上. 这个差别可能是按展开式(10-9)计算时只计入了共轭复振子中一个分支能量的缘故.

共轭复振子的确是非线性波中一个令人迷惑不解的现象. 在第二章中曾经提到，如果是线性波，将振子假设为复的或实的对描写系统的运动并无影响，而非线性波的解则一般需要假设为实数，如表达式(9-9)或者(10-9)的形式. 若不加复共轭，将扰动波 $\delta\phi(\xi,\tau)$展开为

$$\delta\phi(\xi,\tau) = \sum_{k=1}^{N} b_k(\tau) e^{i[k\xi-\alpha_k(\tau)]}, \tag{10-10}$$

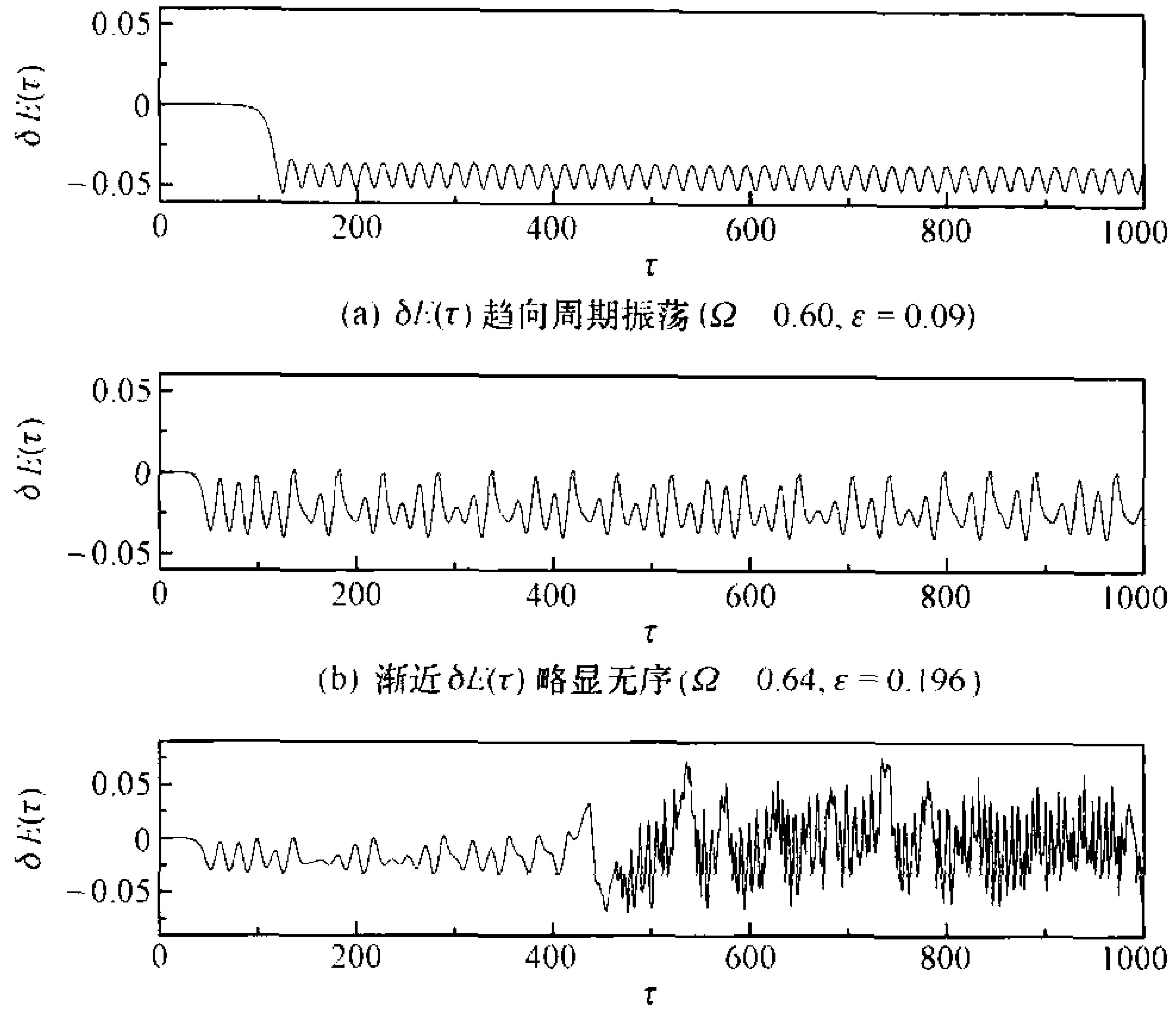
那么在方程(9-11)中的模-模耦合中将少了共轭分支的贡献，不能满意地解释数值模拟观察到的结果. 相互共轭的 2 个振子的复矢量在相空间中向相反方向旋转，除此之外，2 个振子的演化完全相同，它们纠缠在一起，连突变也同时发生. 如何解读其中的物理，发人深思，恐非“物理量必须是实的”就可以一言以蔽之的.

## 10.3.3 相空间中与鞍点共存的吸引子

参数改变时鞍型势阱 $\phi_0^*(\xi)$中的相干结构 $\delta\phi_g(\xi)$不再稳定，图 10-9 是几个不同$(\Omega,\varepsilon)$参数下 $\delta E(\tau)$的演化，轨道出发点都设在相应滞后负斜率分支上的鞍型波解 $\phi_0^*(\xi)$附近，它们的渐近行为却大不相同. 扰动波能 $\delta E(\tau)$在图(a) $\Omega=0.60$，$\varepsilon=0.09$ 时趋向简单周期振荡；图(b) $\Omega=0.64$，$\varepsilon=0.196$ 时变得有些无序；图(c) $\Omega=0.65$，$\varepsilon=0.22$ 时参数已越过激变的临界点，$\delta E(\tau)$先经过一段类似图(b)中的缓变无序轨道，然后突然大幅剧烈振荡，运动变得极其混沌[231].

对于图 10-9(c)中轨道状态突然剧变的原因，仅仅孤立地观察扰动波的演化是

不能回答的，必须同时考虑鞍点及其轨道的作用.




(a) $\delta E(\tau)$ 趋向周期振荡 ($\Omega$　0.60, $\varepsilon = 0.09$)

(b) 渐近 $\delta E(\tau)$ 略显无序 ($\Omega$　0.64, $\varepsilon = 0.196$)

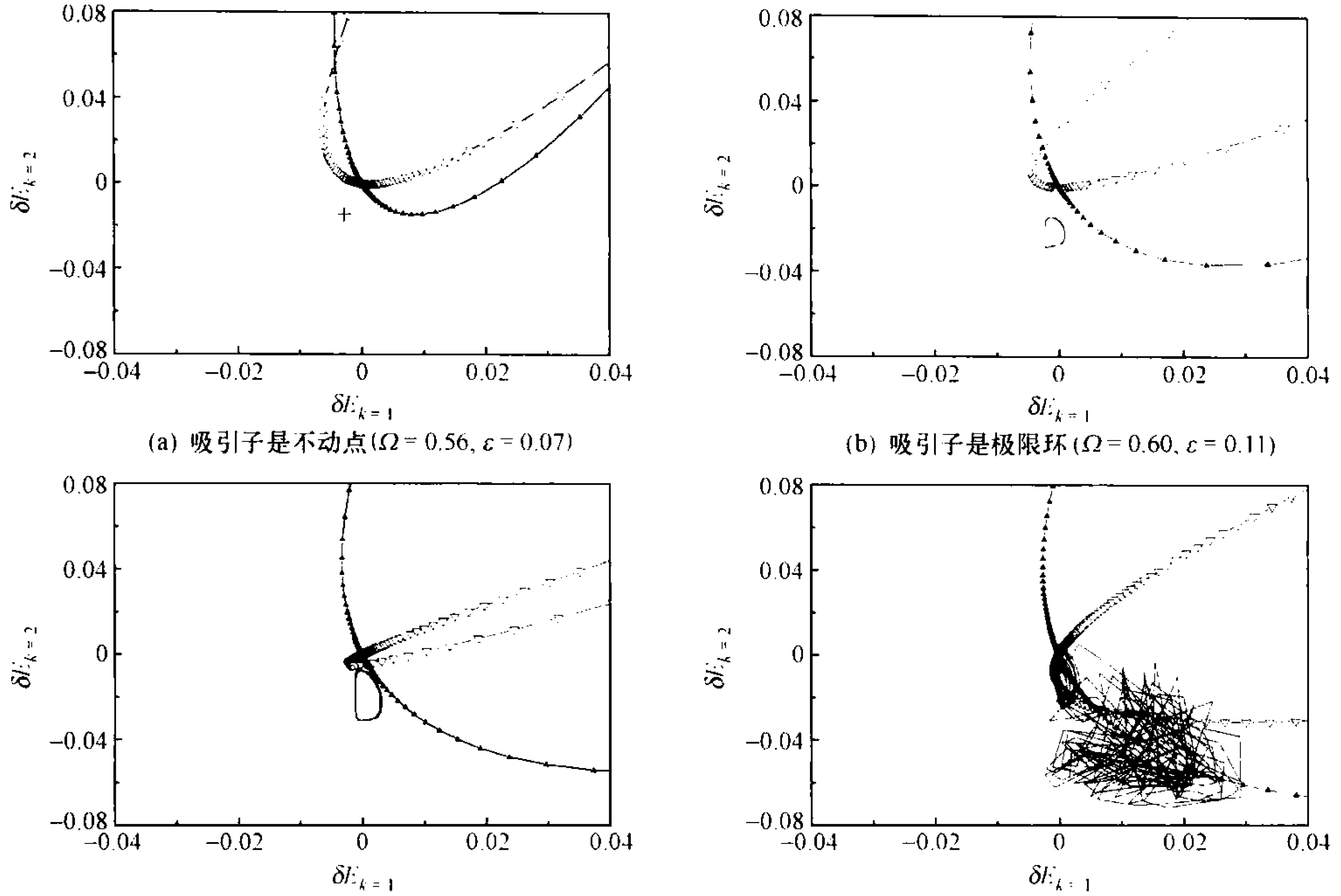
(c) $\delta E(\tau)$ 在演化过程中出现突变 ($\Omega$　0.65, $\varepsilon = 0.22$)

图 10-9　在鞍型定态波解 $\phi_0^*(\xi)$ 上扰动波能量 $\delta E$ 的演化

图 10-10(参见彩图 10-10)将扰动波 $\delta\phi(\xi,\tau)$ 的吸引子和鞍点轨道同时投影在相空间的能量截面上，图中实线是扰动分波能量 $\delta E_{k=2}(\tau)$ 作为 $\delta E_{k=1}(\tau)$ 的函数，鞍点位于原点，它的不稳定和稳定轨道分别用空心和实心三角连线表示，图(a)～(d)对应于不同参数 ($\Omega,\varepsilon$)，图(a)～(c)中只画了 $\delta\phi(\xi,\tau)$ 的渐近吸引子，图(d)中还包括了它的暂态轨道.

在图 10-10(a)中 $\Omega=0.56$，$\varepsilon=0.07$，各扰动分波的能量 $\delta E_k$ 都趋向常数，以符号“＋”标出，它对应图 10-7(b)中孤立波样的相干结构 $\delta\phi_g(\xi)$. 这样，就有 2 个不动点共存于相空间中，鞍点和稳定不动点“＋”. 随参数变化，在图(b)中 $\Omega=0.60$，$\varepsilon=0.11$，不动点“＋”经过 Hopf 分岔，形成一个极限环. 在图(c)中 $\Omega=0.625$，$\varepsilon=0.16$，极限环扩大并略显无序，它几乎与鞍点的一条稳定轨道相切. 在图(d)中 $\Omega=0.65$，$\varepsilon=0.22$，与图 10-9(c)的参数相同，轨道先在一个暂态吸引子上徘徊，然后突然离开它，转向了一个大得多的吸引子，在这个渐近吸引子上，轨道极为激烈无序地变化.

从图 10-10(a)～(d)的结果并结合第五章介绍的关于吸引子激变的理论可以建立起如下图像：随参数变化，原来稳定的不动点经过一系列 Hopf 分岔，吸引子在相空间中不断膨胀，如果吸引子与鞍点的稳定轨道相切，它的轨道就会沿着鞍点的稳定轨道趋近鞍点，然后再沿鞍点的不稳定轨道被推离原来的吸引子，最终引发了激变. 激变后吸引子急剧膨胀，它的动力学状态与激变前的截然不同，激变前图 10-10(c)中的波斑图有类似于图 10-2(a)中空间相干波动状态，激变后图 10-10(d)




(a) 吸引子是不动点($\Omega=0.56$, $\varepsilon=0.07$)　(b) 吸引子是极限环($\Omega=0.60$, $\varepsilon=0.11$)

(c) 极限环略显无序($\Omega=0.625$, $\varepsilon=0.16$)　(d) 吸引子突然膨胀($\Omega=0.65$, $\varepsilon=0.22$)

图 10-10　鞍点(位于图中原点)的不稳定(空心三角连线)和稳定(实心三角连线)轨道以及实现了的运动轨道(实线)在模式能量空间的投影(随波坐标系)

中的波斑图则具有类似于图 10-2(b)中强湍的特征.

看来这个图像合理地解释了所观察到的向强湍转变中的现象,但它仍然未能回答节 10.2 提出的问题：鞍点不过是理论上存在的一个虚波动,所谓它的不稳定和稳定轨道也只是在扰动波的线性近似下从方程(10-4)得到的结果,在扰动幅度足够大时这个解将远远偏离真实的运动,那么这些在线性理论下得到的轨道又如何能实实在在地影响真实世界中的运动呢?

唯一的可能是,在激变前的某个瞬时 $\tau^*$,扰动波的运动满足或近似满足线性轨道方程(10-4).换句话说,在这一瞬时,$\delta\phi(\xi,\tau^*)$的幅度一定变得非常小,以至它的自非线性在实际上而不是在理论上真的可以被忽略,唯有如此,真实的轨道才可能沿着理论上的线性近似轨道前进,直到扰动波的幅度增大到线性方程(10-4)不再适用.循着这个逻辑思路,我们将目光锁定在寻找一个特别的瞬态 $\tau^*$,在这个瞬态下实现了的波形 $\phi(\xi)$与鞍型定态波解 $\phi_0^*(\xi)$的形状相差无几.也许这只是一个转瞬即逝的状态,不过唯有在这样的状态下,扰动波 $\delta\phi(\xi,\tau^*)$才会真的变得很小,才能合理地解释鞍点的稳定和不稳定轨道何以能够对运动起如此关键的作用.这就引出了下一节的话题——斑图共振.

## 10.3.4　斑图共振

当给定参数越过激变的临界点，如在 $\Omega=0.65$，$\varepsilon=0.22>\varepsilon_c$ 时，可以观察到从空间相干波斑图向强湍波斑图的突然转变. 图 10-11(a)～(c)是连续时间下的 3 个时空斑图，初始时从一个低水平光滑波动出发，在一段时间内，波斑图保持类似层流的状态[图(a)]；从某一时刻开始，波幅突然迅速增高，但波形仍然光滑[图(b)前半部分]；接着短波模式开始凸显，波动变得起伏不定，渐近波斑图呈现出强湍状态[图(c)]. 我们从不同初始波形出发计算的结果都经历了类似图 10-11 的 3 个阶段，然而，何时发生突变却全无规律，出现突变的时间对初始波形 $\phi(x,t=0)$ 极端敏感，波形的任何微小改变，都显著地改变突变发生的临界时间，或推迟或提前.

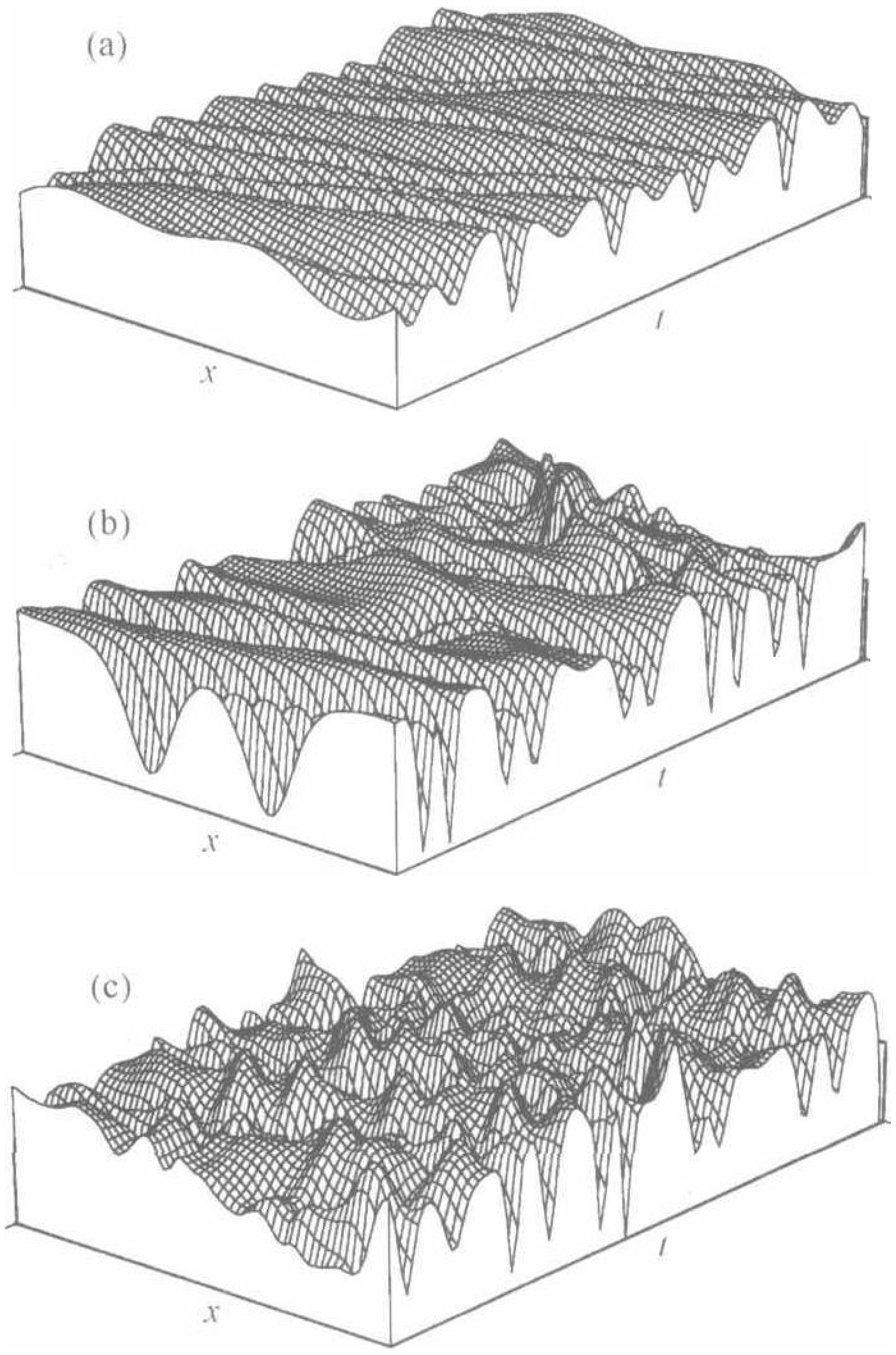



图 10-11　波动解 $\phi(x,t)$ 从空间相干态到强湍流态的突变($\Omega=0.65$，$\varepsilon=0.22$)

突变出现的“义无返顾”和突变临界时间的“敏感多变”，对比鲜明的两个特点共处一身，这个现象给我们什么启示呢？ 显然，系统中一定存在着引起突变的必然诱因，而这个因素必定十分精巧，惟其精巧才会敏感. 从上一节的分析，我们已经知道了这个必然诱因，它就是鞍点——一个鞍型定态波解 $\phi_0^*(\xi)$，可以预料，这个对初始波形敏感的、极为精巧的因素一定也与鞍型波动解有关. 参考有关激变的理论，不难猜测，一定是在某个瞬时 $\tau^*$，实现了的波形 $\phi(\xi,\tau^*)$ 与鞍型定态波解 $\phi_0^*(\xi)$ 的形状变得十分相似，因此在这一刻扰动波 $\delta\phi(\xi,\tau^*)$ 的幅度非常小，以致在

一段时间内它真的沿着线性演化方程(10-4)所预言的轨道运动，并最终触发了波斑图突变.

对上述猜想，要用不同参数、不同初始条件多方求证，包括在相同参数下用不同数学方法作交叉检验，例如采用在实验室坐标系$(x,t)$中直接求解偏微分方程(7-47)和在随波坐标系$(\xi,\tau)$中联立求解代数方程组(7-52)与常微分方程组(9-11)这两种方法. 下面我们将不特别指明计算所采用的具体方法，重要的是，所有结果都指向同一事实：在某个临界时刻$\tau=\tau^*$前后的一个极为短暂的时间内，实现了的波形$\phi(\xi,\tau^*)$变得与鞍型虚波动$\phi_0^*(\xi)$的形状非常接近，紧随其后就发生了波动$\phi(\xi,\tau)$的状态突变. 数值模拟中观察到的这个现象与预测完全相同，可称为斑图共振[235].

图 10-12 是斑图共振的一个实例，参数为$\Omega=0.65$，$\varepsilon=0.22$，图中实线是数值

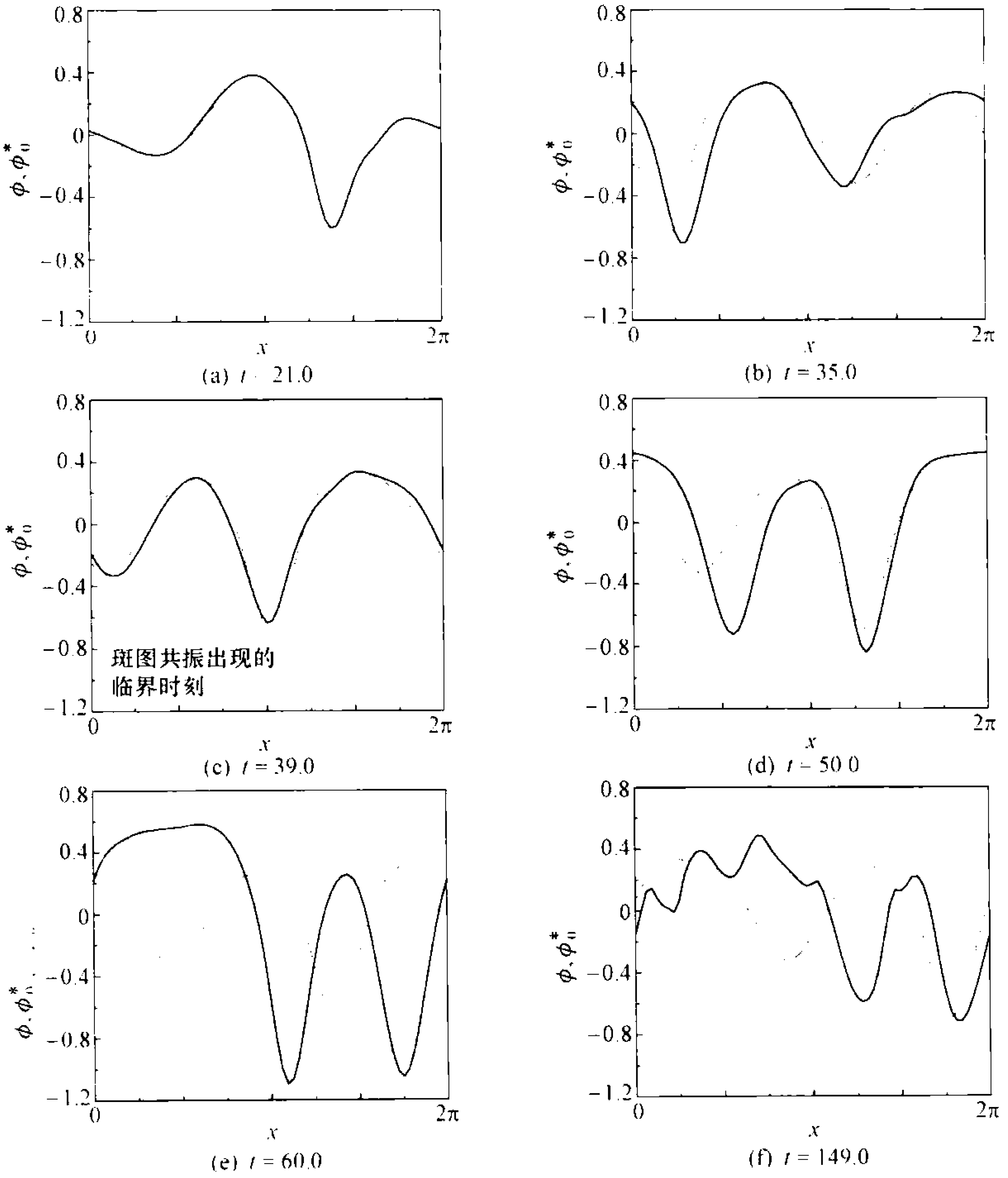



图 10-12　突变前后几个不同时刻下实现了的波动解$\phi(x,t)$的波形(实线)和鞍型定态波解$\phi_0^*(x-\Omega t)$的虚波形(虚线)

$(\Omega=0.65, \varepsilon=0.22)$

模拟方程(7-47)得到的波动解 $\phi(x,t)$，它是实现了的波动状态，虚线是鞍型波解 $\phi_0^*(x-\Omega t)$[即在随波坐标系中的 $\phi_0^*(\xi)$]，这是一个理论上存在而实际上观察不到的波动解，为得到这个解，需要先在随波坐标系中求解定态波模式方程(7-52)，再将结果转换到实验室坐标系. 图 10-12(a) $t=21.0$，(b) $t=35.0$ 是斑图共振发生前的状态，波形 $\phi(x,t)$ 非常光滑，它们对应于图 10-10(d)中激变前暂态吸引子上的轨道；图(c) $t=39.0$ 是斑图共振出现时的瞬态($t=t^*$)，可以看到，这时波动解 $\phi(x,t)$ 与鞍型波解 $\phi_0^*(x-\Omega t)$ 几乎重合，形状仅略有差别，可以说，在这一瞬间，鞍型波解 $\phi_0^*(x-\Omega t)$ 近似得到了实现；图 10-12(d) $t=50.0$，(e) $t=60.0$ 是共振刚刚过后、沿鞍点不稳定轨道运动的阶段，这时 $\phi(x,t)$ 的幅度已远高过鞍型波解 $\phi_0^*(x-\Omega t)$，但波形仍十分光滑，说明高波数模式尚未被激发，在这一阶段 $\phi(x,t)$ 波形明显有双峰结构，结合第八章定态波的稳定性分析可知，这是因为在相应参数下 $\phi_0^*(\xi)$ 失稳的准模是 $\tilde{k}=2$，它在傅里叶模式上的投影以 $k=2$ 占优的缘故；随着失稳方向的能量逐渐向其他方向转移，短波模式被强烈激发，图 10-12(f) $t=149.0$ 给出激变后渐近波动的典型波形，它对应于图 10-11(c)和图 10-10(d)中膨胀了的吸引子上的强湍状态.

定义

$$\Delta(x,t) \equiv \phi(x,t) - \phi_0^*(x-\Omega t) \tag{10-11}$$

表示实现了的波动 $\phi(x,t)$ 相对于鞍型波解 $\phi_0^*(x-\Omega t)$ 的时空偏离程度. 图 10-13

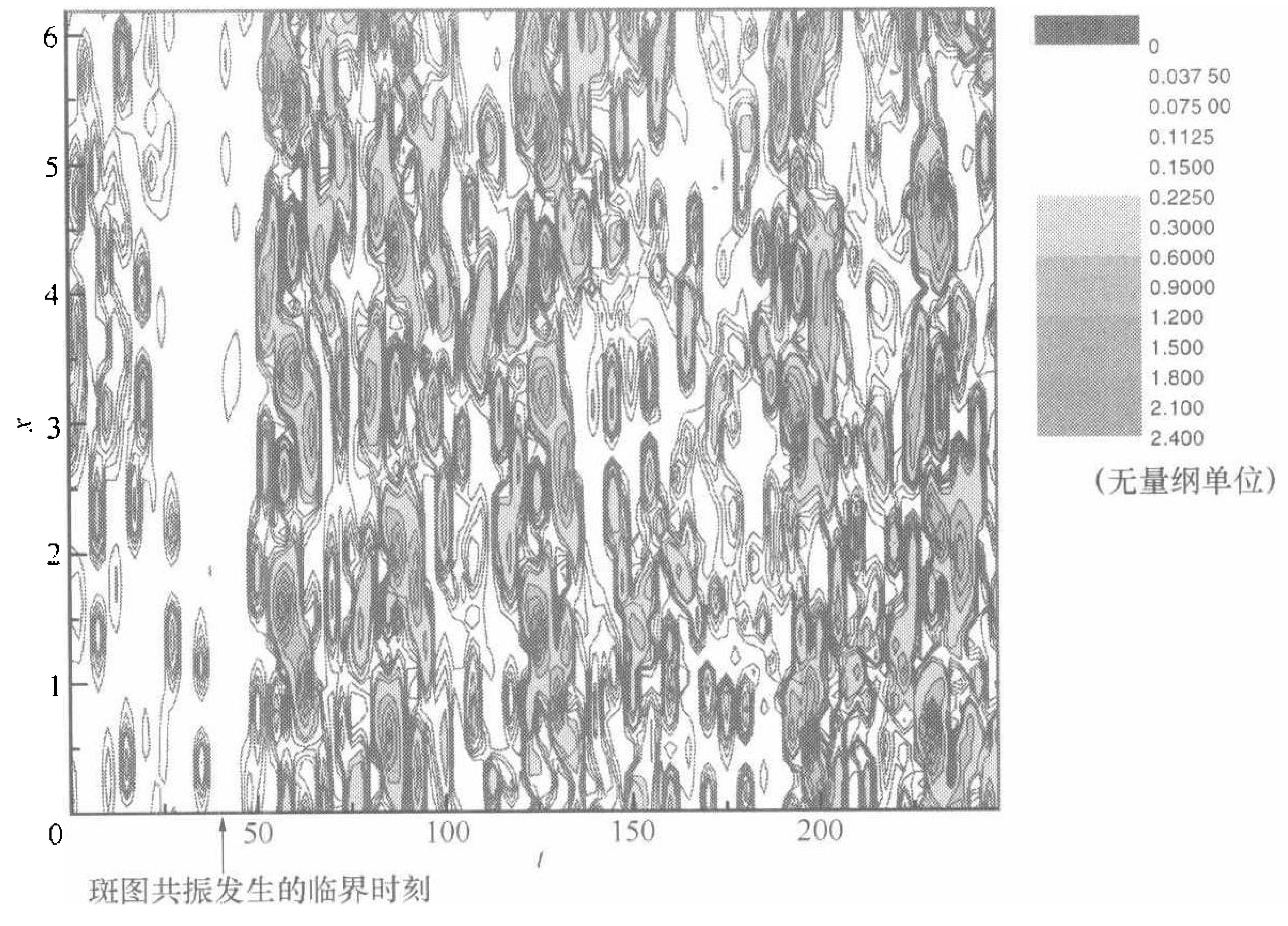



图 10-13　实现了的波动解 $\phi(x,t)$ 与鞍型定态波解 $\phi_0^*(x-\Omega t)$ 的时空偏离 $\Delta^2(x,t)$ 等高图
($\Omega=0.65$，$\varepsilon=0.22$)

(参见彩图 10-13)是 $\Delta^2(x,t)$的等高图，在激变发生的临界时刻 $t=t^*$ 附近可以看到一个白色的带状区域(横轴下箭头所指)，那里实现了的波动 $\phi(x,t)$相对于鞍型波解的偏离最小，它的左边是激变前的状态，偏离一般较白色区域略大，右边是激变后的状态，$\Delta^2(x,t)$的值随时间和空间大幅度剧烈变化. 这个图再一次说明，在激变发生前的短暂时刻，发生过斑图共振.

图 10-14 表述的是 $\phi(x,t)$与 $\phi_0^*(x-\Omega t)$两个波形之间距离$|\Delta|$随时间的演化，由图可见，在暂态吸引子上$|\Delta|(t)$低水平缓慢变化，在终态的强湍吸引子上$|\Delta|(t)$高水平大幅振荡，在二者之间的某个时刻(见横轴下面的左箭头)，可以看到$|\Delta|(t)$突然出现向下的尖峰，在尖点处实现了的波动解 $\phi(x,t)$与鞍型波解 $\phi_0^*(x-\Omega t)$的距离达到极小，它对应斑图共振发生的临界时刻，在这一瞬时相空间中的运动轨道十分接近鞍点. 这样的下尖峰曲线说明，运动轨道先是(沿鞍点的稳定轨道)被导向鞍点，在临近鞍点处又迅速(沿鞍点的不稳定轨道)远离鞍点，这才引发了向强湍的激变.

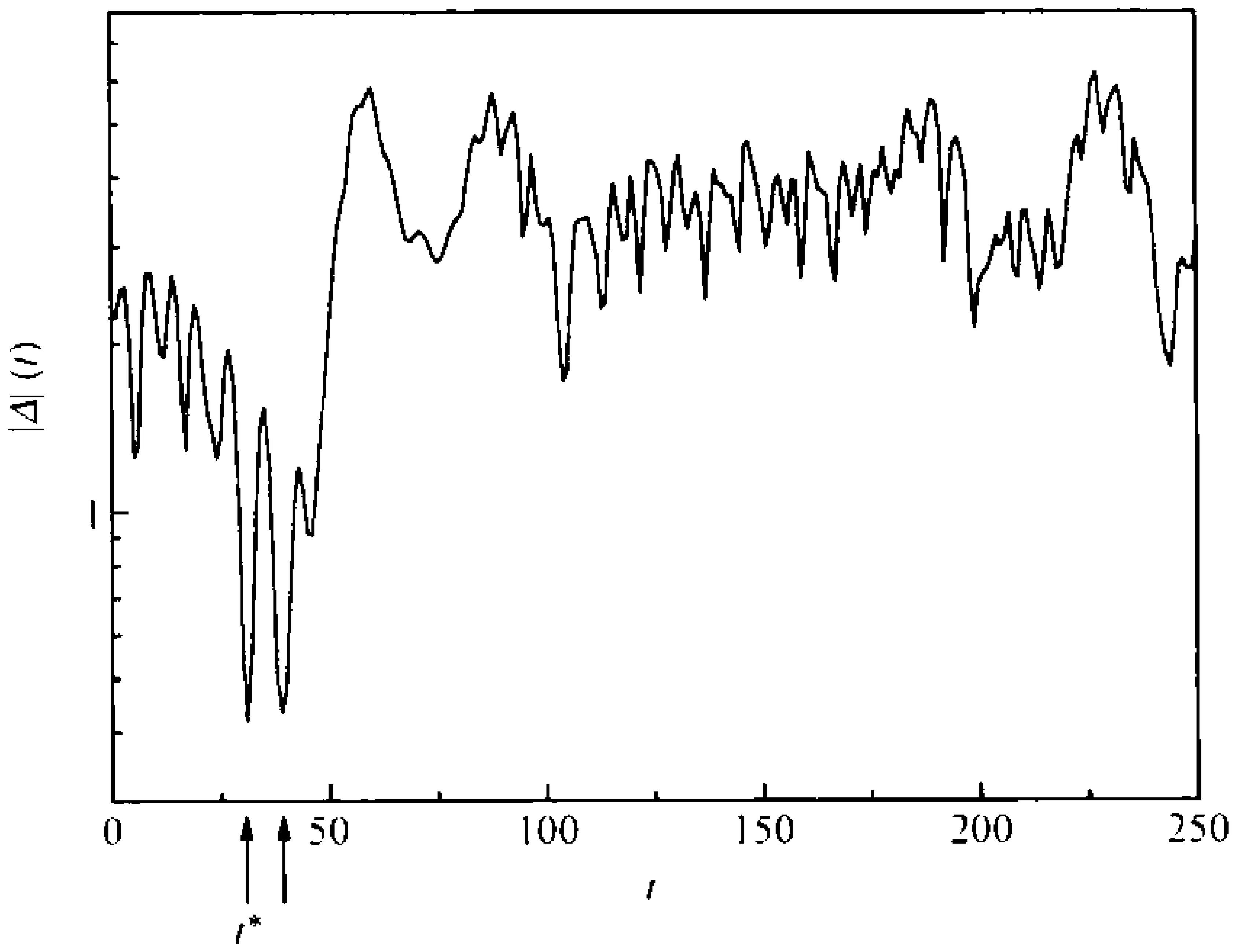



图 10-14　实现了的波动解 $\phi(x,t)$与鞍型定态波解 $\phi_0^*(x-\Omega t)$波形的距离$|\Delta|(t)$
($\Omega=0.65$,$\varepsilon=0.22$,左箭头指示的是“斑图共振”发生的临界时刻 $t^*$，右箭头指示的是另一个临界动力学事件(参考节 10.4.1)出现的时刻)

从不同初始条件得到的结果大同小异，如曲线$|\Delta|(t)$都像图 10-14 那样在激变前出现向下的尖峰，只是尖峰出现的早晚和和极小值的大小不尽相同而已. 不过有一个现象值得注意，这就是所有$|\Delta|(t)$的计算样本无一例外都显示了 2 个向下的尖峰，前一个有更小的极小值，在极值处轨道离鞍点更近，后一个紧随其后出现，极值处离鞍点略远；仔细观察等高图 10-13，可注意到 $\Delta^2(x,t)$中白色带状区实际上也有 2 个，它们与图 10-14 中 2 个尖峰分别对应. 如果说图 10-14 中第一个尖峰对应斑图共振，那么第二个尖峰的出现说明斑图共振并没有立即引起吸引子剧烈

膨胀，只是在轨道又一次经过鞍点附近后吸引子才突然膨胀．研究表明，这第二个尖峰对应的是斑图共振引发的另一个临界动力学事件，我们将在节 10.4.1 中对其进行分析．

斑图共振是一个崭新的物理现象，它告诉我们，嵌在物理世界中可观察到的千姿百态的波动下面，还可能存在某种虚波动解，因其绝对不稳定，寻常观察不到，但它们却有机会对可观察到的波动状态产生巨大影响．在一定的外部条件下，这些虚波动解的形状注定地要在某一瞬时被实现，虽然实现的时刻难以预料，实现的波形不甚精确，维持的时间也极为短暂，却因此会把系统带到一个完全不同的运动状态．如在上面的一些例子中，原来近似层流的状态消失了，代之以在时间和空间上都激烈变化的强湍流状态．

非线性动力学将解的稳定性问题在学科共通的意义上提到前所未有的高度，根据这一理论，不稳定解的重要作用不仅仅在于它们中的一些会通过一系列局域分岔逐渐使运动状态变得复杂，还在于有的不稳定解本身，如鞍点解，可嵌在相空间中与实现了的吸引子共存，并在一定条件下引起吸引子状态突变．斑图共振只是鞍点作用的一个表现，它告诉我们，某些特殊空间形状（鞍型波）的短暂实现会引起真实世界中的运动状态剧烈改变，这一事实给斑图共振现象多少抹上一层神秘色彩．众所周知，物理学是一门建立在实验观测基础上的学科，只有观测到的东西才被认为是物理的真实．斑图共振现象其实与以观测为基础的物理学并无矛盾，毕竟鞍型波这个虚波动解只有在其得到实现，哪怕是短暂的不精确的实现，才能引发运动状态的突变．当然它也提醒我们，在做物理观测时，除关注那些常态之外，还应该注意那些有机会在短暂时间内实现的不稳定状态，它们很可能与状态突变的发生有密切关系．

鞍型波动解的波形有什么特异之处，以致于它的实现能引起运动如此剧烈的变化？其实，波形共振只是表现，频率或相速度共振才是实质．我们已经说明，在斑图共振后的一段时间内，运动大体沿鞍点的不稳定轨道前进，此时扰动波在随波坐标系中实现的本征频率为 0；在实验室坐标系中观察，这个频率就是 $\Omega$，即外驱动波的频率，所以，所谓斑图共振本质上是一种频率共振，外驱动频率与介质的内部本征频率出现了共振．这里所说的介质的本征频率已不同于式(7-63)给出的线性本征频率，由于定态波解的散射，本征频率已发生了非线性改变，在这个意义上，可以说斑图共振是一种非线性频率共振．斑图共振刚过后在图 10-12(d)，(e)中 $\phi(x,t)$ 出现的双峰结构就是一个证明，前面已经分析，这是外驱动波与(鞍结点)失稳准模 $\tilde{k}=2$ 发生共振的一个表现．

### 10.3.5 吸引子轨道与鞍点的碰撞

根据非线性动力学理论，在与鞍点的稳定轨道相切以后，运动轨道将沿着它被引向鞍点. 事实上，在斑图共振的那一瞬间轨道与鞍点已十分接近，那么能否观察到相轨道与鞍点发生碰撞呢？这个想法很诱人，但如何观察到这一现象却颇费思量，这主要是因为在模型(7-47)的情况下吸引子与鞍点发生的不是一种精确碰撞. 假设在共振的瞬间 $t^*$，波形 $\phi(x,t^*)$ 与鞍型波解 $\phi_0^*(x-\Omega t^*)$ 形状精确相同，那么此刻相空间轨道将准确地触到鞍点，在任何庞加莱截面上都应该能观察到轨道与鞍点的碰撞，可惜情况远非如此理想. 事实是，在斑图共振发生的那一瞬间，两个波形并不完全相同，如图 10-12(c)中实现了的波形 $\phi(x,t^*)$ 相对于 $\phi_0^*(x-\Omega t^*)$ 仍有小的起伏，图 10-14 中 $|\Delta|(t)$ 的尖峰也从未探到 0，显然，在 $t^*$ 时刻，轨道并没有真正触到鞍点，没有发生过精确意义上的与鞍点碰撞. 在这种情况下，庞加莱截面上的轨道投影一般将与鞍点有明显距离，那么讨论相轨道与鞍点碰撞还有没有意义？我们能够找到合适的表象展示这一现象吗？

相轨道与鞍点最接近的状态就是在斑图共振那一刻，此时在随波坐标系中 $\phi(\xi,\tau^*)$ 和 $\phi_0^*(\xi)$ 是两个形状约略相同的空间结构，它们的幅度和空间导数大致处处相等，我们应该根据这一事实来选择展示这一碰撞现象的表象. 代替庞加莱截面，我们在随波坐标系中固定空间点 $\xi=\xi_0$ 处观察 $\phi(\xi,\tau)$ 的运动，并将其投影在横坐标为 $\phi(\xi_0,\tau)$、纵坐标为 $\partial\phi(\xi_0,\tau)/\partial\xi$ 的二维平面上. 在这个表象下，鞍型波解 $\phi_0^*(\xi)$ 的投影就是一个鞍点，斑图共振发生时，相轨道应该大体走到这一点. 这是一个粗粒化的表象，它不关心模式空间中轨道的细节，只着力突显斑图共振这一物理事实.

让我们利用这个表象从两个角度观察鞍点在向湍流激变中的作用：一是趋近参数空间临界点时终态吸引子与鞍点的碰撞，二是参数越过临界点后暂态轨道与鞍点的瞬时碰撞[236,219].

先看前者，图 10-15（参见彩图 10-15）固定 $\Omega=0.65$，另一参数 $\varepsilon$ 取值为：(a) 0.18，(b) 0.19，(c) 0.20，(d) 0.2009，这就是说，$\varepsilon$ 的值从图(a)到(d)逐渐逼近激变发生的临界值 $\varepsilon_c\approx0.201$，横纵坐标分别是 $\phi(\xi,\tau)|_{\xi=0}$ 和 $\left.\dfrac{\partial\phi(\xi,\tau)}{\partial\xi}\right|_{\xi=0}$. 图中鞍点用一个圆点表示，它的位置随 $\varepsilon$ 改变略有移动，实线是波动吸引子 $\phi(\xi,\tau)$ 的投影，暂态过程已经略去. 由图可见，随着 $\varepsilon$ 趋近 $\varepsilon_c$，吸引子与鞍点逐渐靠拢，在图(d) $\varepsilon=0.2009$ 时，吸引子的一侧与鞍点已十分接近，但还没有发生碰撞.

图 10-16(参见彩图 10-16)是 $\Omega=0.65$，$\varepsilon=0.201$ 时的情形，$\varepsilon$ 值刚刚越过临界值

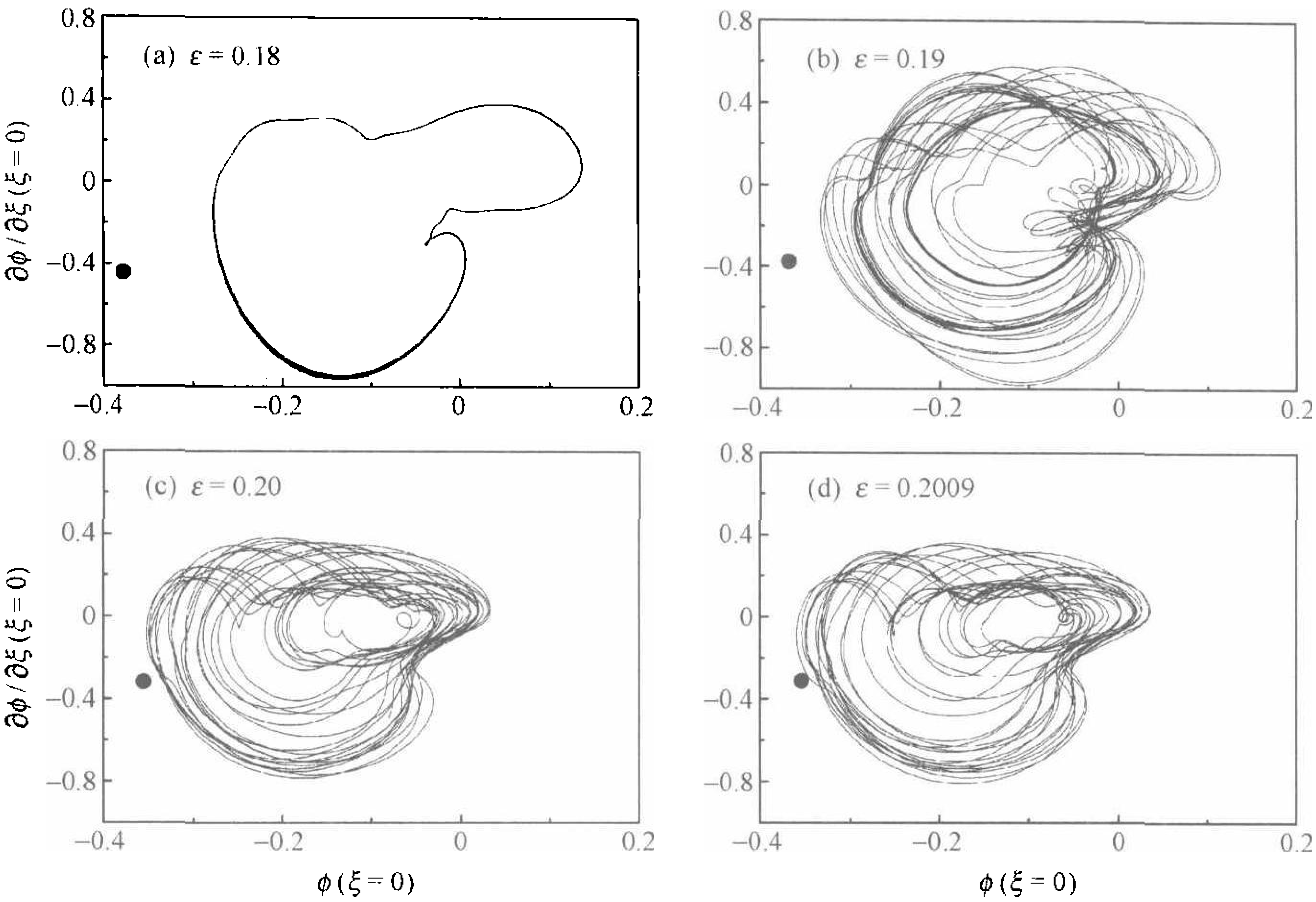



图 10-15　在参数趋近激变临界点时波动吸引子与鞍点相对位置的变化
（随波坐标系，$\Omega=0.65$）

$\varepsilon_c$，与鞍点的碰撞已经发生，图中实线所示是终态吸引子，$\left.\dfrac{\partial\phi(\xi,\tau)}{\partial\xi}\right|_{\xi=0}$作为 $\phi(\xi,\tau)|_{\xi=0}$ 的函数，鞍点用圆点表示. 与图 10-15 相比，吸引子大为膨胀，鞍点已被覆盖在其中. 吸引子上的轨道极其无规，说明波动幅度和它的空间梯度都随时间迅速变化，显示出强烈的湍性. 图 10-15 和图 10-16 的结果清楚地表明，吸引子激变正是与鞍点碰撞后发生的.

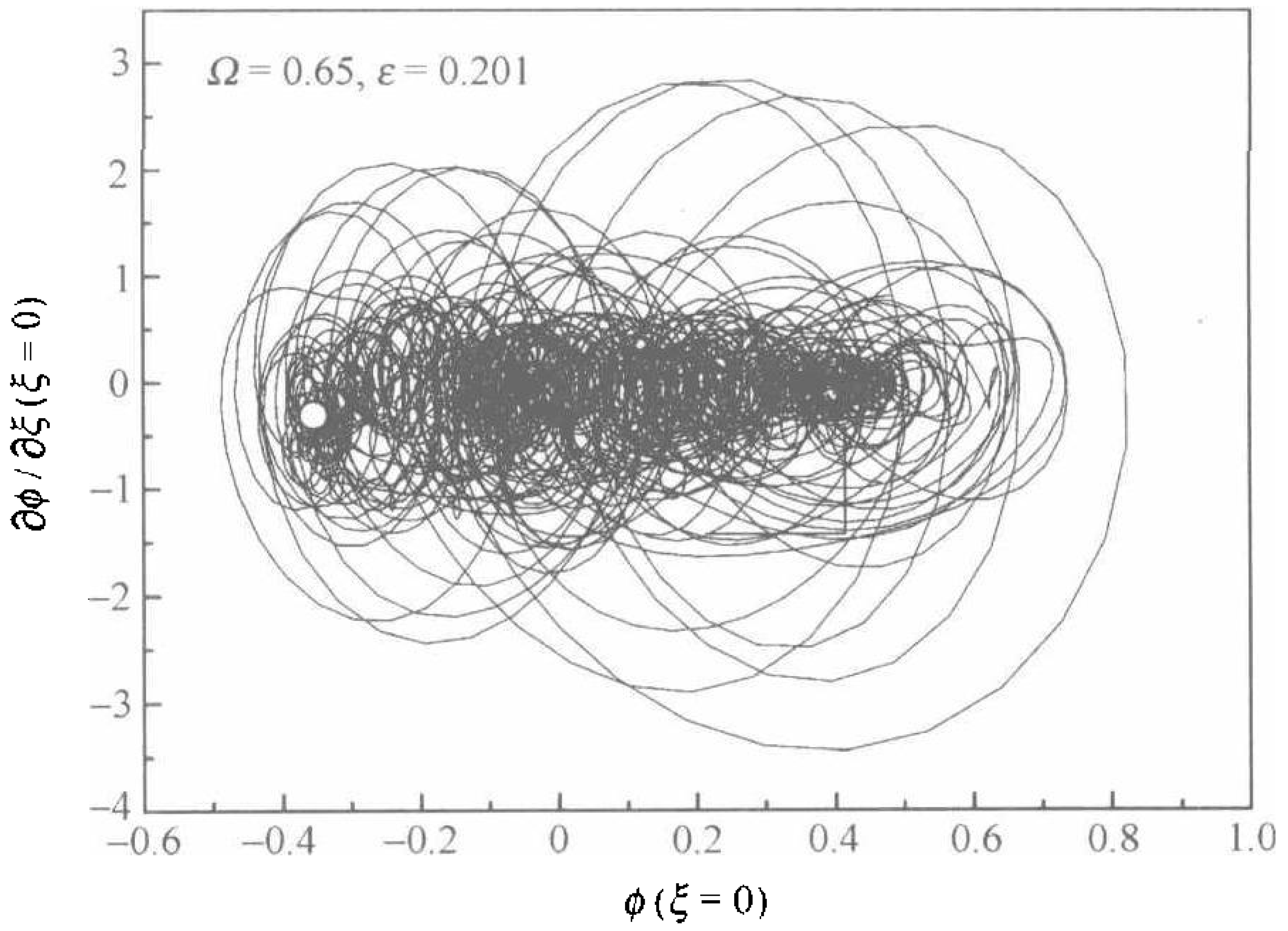



图 10-16　激变后的波动吸引子和被它覆盖的鞍点（空心圆圈）
（随波坐标系，$\Omega=0.65$，$\varepsilon=0.201>\varepsilon_c$）

其次固定 $\varepsilon>\varepsilon_c$，观察暂态轨道与鞍点的瞬时碰撞. 图 10-17 中 $\Omega=0.65$，$\varepsilon=0.22$，实线是 $\left.\frac{\partial\phi(\xi,\tau)}{\partial\xi}\right|_{\xi=0}$ 为 $\phi(\xi,\tau)|_{\xi=0}$ 的函数，仅画了吸引子膨胀前的暂态轨道，(a)～(d)分别对应不同初始扰动分布 $\delta\phi(\xi,0)$. 轨道从鞍点(图中为圆圈)附近出发，图中略去了开始的几个步长，以避免与要观察的现象混淆. 因为参数相同，(a)～(d)中鞍点位置都一样. 图中轨道都向外盘旋，在不同初始扰动下，轨道有的稀疏，有的稠密，暂态长短也不一，但令人惊异的是，这些轨道看起来无一例外地都在盘旋中经过了鞍点，此后又盘旋了大约一周后突然转向，最终发展成强湍吸引子. 尽管细查轨道坐标，其实它们并没有严格经过鞍点，但在这个粗粒化表象下，我们已有足够信心说，在激变发生之前运动轨道的确都曾与鞍点出现过碰撞，这是一种在斑图共振意义上的非精确碰撞. 与鞍点发生不太精确的碰撞就能引发向强湍激变，这一事实在物理上是完全合理的. 设想如果要求有无限精确的碰撞才能引发激变，那么无穷小的扰动就应该能够阻止碰撞和向强湍转变，经验表明情况并非如此.

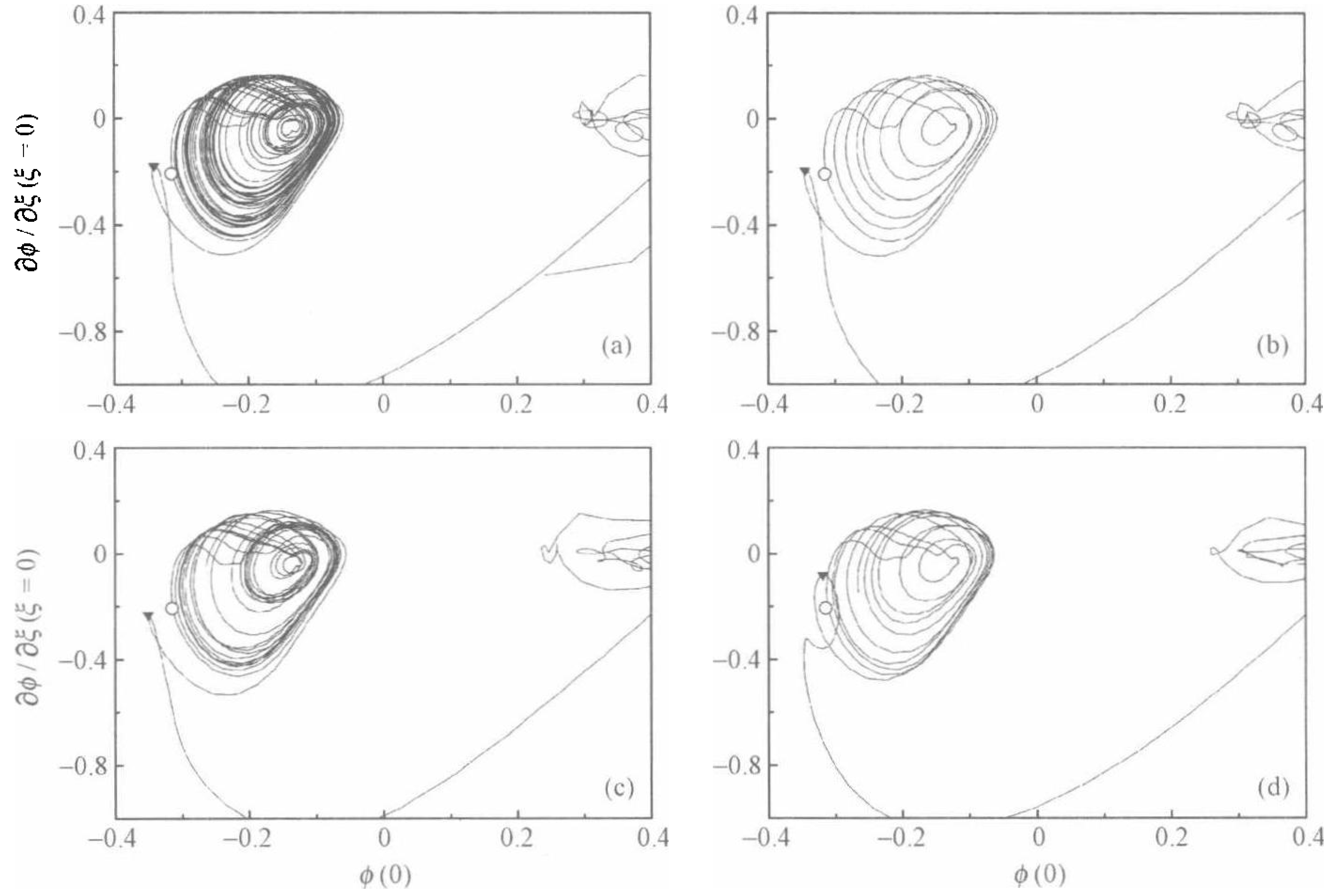



图 10-17 参数越过激变的临界点后波动的暂态轨道及其与鞍点的碰撞
(随波坐标系，$\Omega=0.65$，$\varepsilon=0.22>\varepsilon_c$，(a)～(d)对应不同初始扰动)

非线性漂移波模型(7-47)不是唯一观察到与鞍点碰撞引起吸引子激变的波动系统，在有阻尼的一维 Kuramoto-Svashinsky 方程[127]

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial u^2}{\partial x}=0 \tag{10-12}$$

中，也观察到吸引子与鞍点的碰撞以及由此引起的吸引子激变. 文中将方程的解展

开为

$$u(x,t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}b_k(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx},\tag{10-13}$$

其中模式振幅 $b_k(t)$ 满足方程

$$\frac{\mathrm{d}b_k}{\mathrm{d}t}=(k^2-\nu k^4)b_k(t)-\mathrm{i}k\sum_{m=-\infty}^{\infty}b_m(t)b_{k-m}(t),\tag{10-14}$$

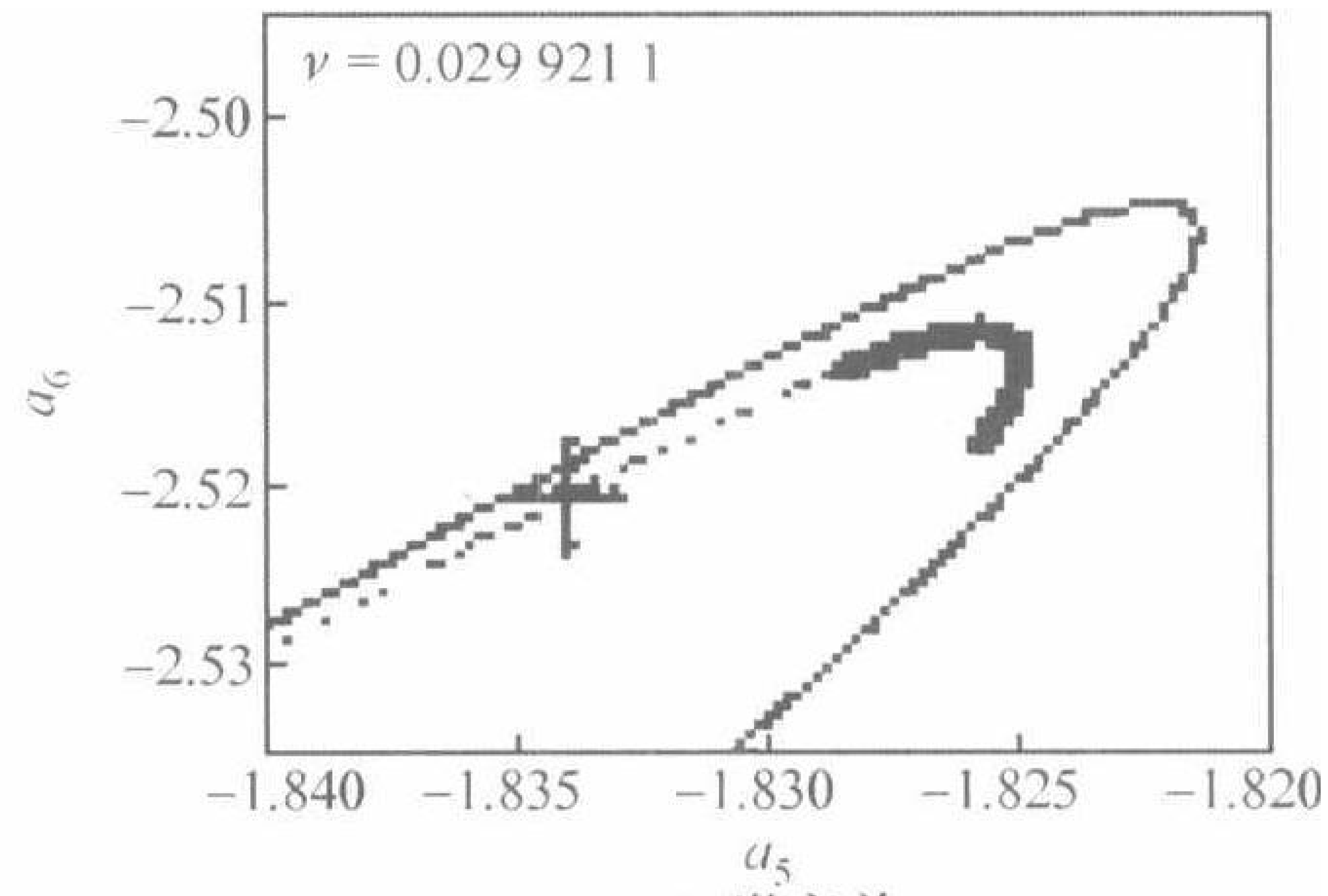
进一步假设波动解具有如下的空间对称性质

$$u(x,t)=-u(-x,t),\tag{10-15}$$

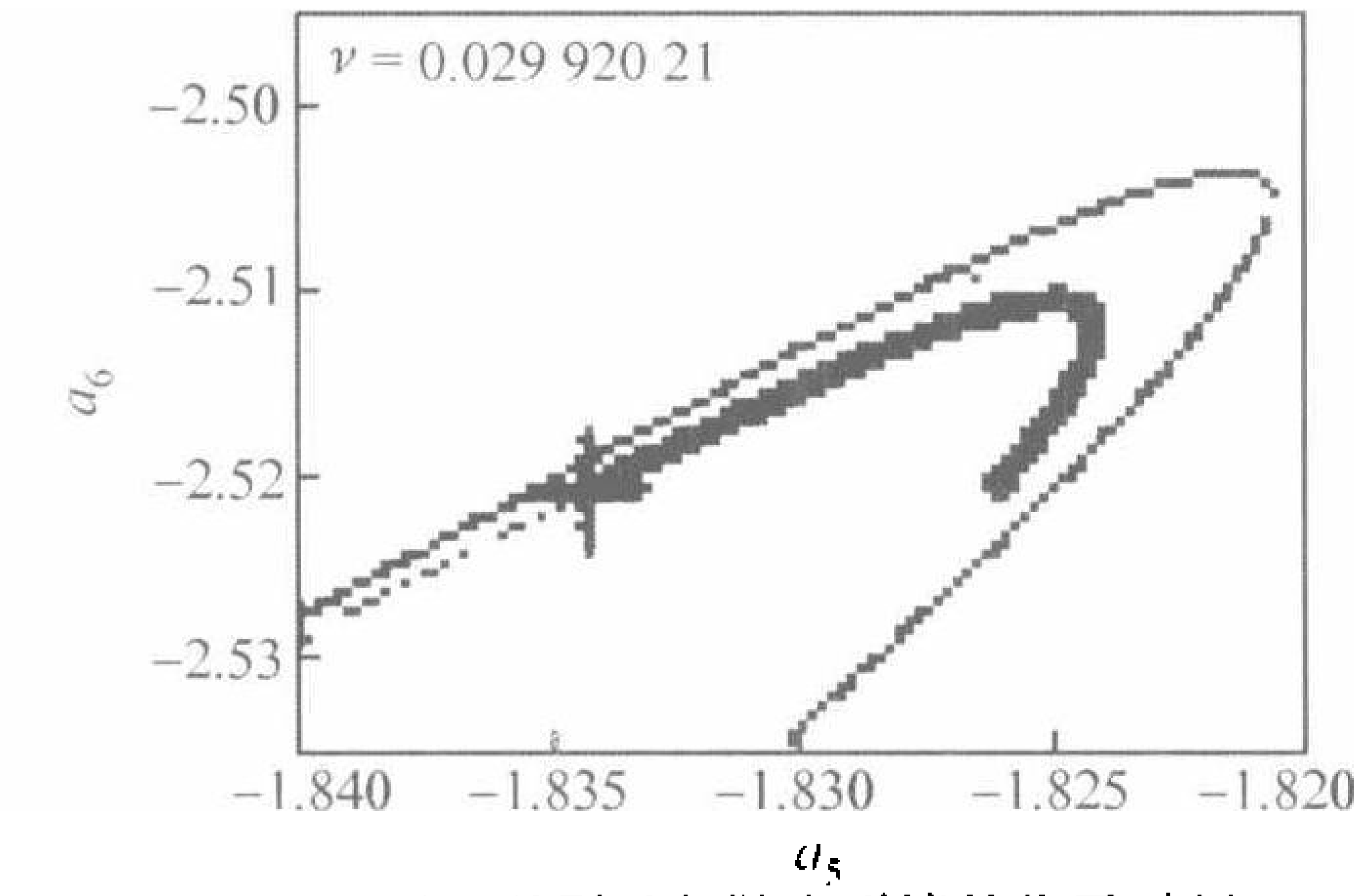
这要求 $b_k(t)$ 必须是纯虚的，$b_k(t)=-\mathrm{i}a_k(t)/2$. 在这些限定之下导出 $a_k(t)$ 满足的方程为

$$\frac{\mathrm{d}a_k}{\mathrm{d}t}=(k^2-\nu k^4)a_k(t)+\frac{k}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_m(t)a_{k-m}(t).\tag{10-16}$$

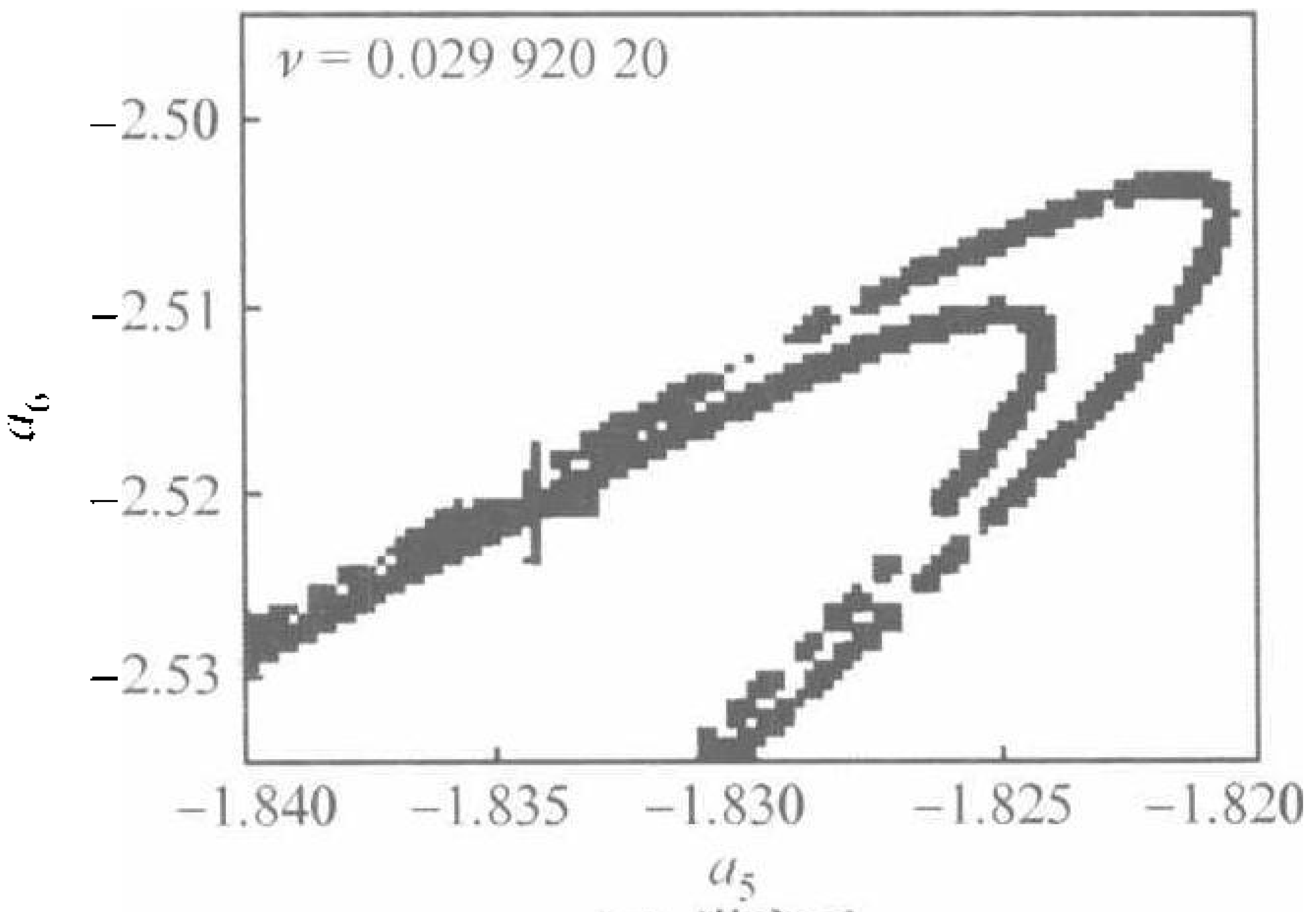
该文作者发现，在一个临界参数 $\nu$ 处，波动解 $u(x,t)$ 的吸引子与鞍点发生了碰撞，且碰撞后吸引子突然膨胀. 图 10-18 是相空间的庞加莱截面图，“+”表示鞍点，圆点组成的粗实线是轨道吸引子，图(a)是激变前的状态，图(b)是吸引子与鞍点发生对头碰时的临界状态，图(c)是激变后急剧膨胀了的吸引子，鞍点已被其覆盖. 由此看来，与鞍点碰撞引起状态激变，在非线性波动系统中可能是一个相当普遍的现象.




(a) 激变前




(b) 吸引子与鞍点碰撞的临界时刻




(c) 激变后

图 10-18　模型(10-16)中激变前后吸引子的庞加莱截面图

(引自文[127])

不过，模型(10-16)在激变后的波动状态与非线性漂移波模型(7-47)的显著不同，前者 $u(x,t)$ 的幅度虽然也大幅增长，波形却依然光滑，显然不曾发生过能量向短波的级联，而后者在激变后短波模式十分活跃，波碎已经发生. 这个差别是否源于两个模型方程不同的动力学性质，还需要作仔细分析，值得思考的是，在导出方程(10-16)时曾对未知函数 $u(x,t)$ 作过空间对称性假设(10-15)，这样的假设对波动演化起了什么作用？纯虚(或实)模式缺少一般复模式中位相这个参量，即使形式上加上位相，它也不随时间改变，这样不同模式之间不可能通过调整位相来协调它们之间的相对关系，更不可能改变其运动的对称性质，这极大地限制了波动解所能选择的斑图状态. 与此相对照，在模型(7-47)中，除周期 $2\pi$ 边界条件之外，计算中没有对它的解作任何对称性限制，模式演化有大得多的自由度. 后面将看到，在参数改变时波动模式的运动有可能改变对称性质，如向强湍流状态的突变就伴随着某种对称性质的改变.

位相是波动系统中极为活跃的因素，即便是单摆这样的简单非线性振子，其位相运动也可取两个不同的状态，在相空间中由分界线截然分开. 一般来说，非线性振子的位相状态还不止简单的周期摆动和转动，文[240]中就列举了若干可能的位相运动状态，如混沌的摆动态等. 我们在下一节中将指出，系统(7-47)中波动模式的位相还可以采取混沌摆动和转动交替出现的一种十分无序的状态，位相状态的突变对波斑图形态起着十分关键的作用.

## § 10.4　激变前后的波动状态

### 10.4.1　束缚-自由转变

参考时序系统激变的例子[10]，我们曾估计相轨道在与鞍点碰撞之后，将立即沿着鞍点的不稳定轨道导向急剧膨胀了的吸引子，然而，波动模型(7-47)中的激变现象却大大出乎预料. 如图 10-17 所见，与鞍点碰撞并没有立即引发激变，相反，轨道似乎按照惯性继续盘旋，差不多在一周之后，当再次运动到鞍点附近时(见图 10-17 中标有“▼”的位置)，才似乎受到一个强大的推力，突然改变方向，脱离原来的盘旋运动，被拉到强湍吸引子上. 其实，这个现象在图 10-14 中已初见端倪，在 $|\Delta|(t)$ 曲线两个向下的尖峰中，前一个对应斑图共振，后一个就对应图 10-17 中轨道再次走到鞍点附近“▼”的位置. 不论直接模拟波动方程(7-47)，还是将波动系统化做定态波势阱中的耦合振子，求解方程组(9-11)，结果都一样，看来这个现象不是偶然的. 极有可能，与鞍点碰撞不过起到了触发激变的作用，它并不是向强湍激变中唯一的动力学事件，当轨道再次经过鞍点附近时，必定还发生了另一个事件，后一个事件才直接导致轨道转向，并最终破坏了波动的空间相干性. 那么，在轨道第

二次经过鞍点附近时，究竟是什么力量使之不可抗拒地离开原来的吸引子，突变后的吸引子又为什么会失去空间相干性呢？

在试图回答这个问题时我们又遇到了支配原理. 前面提到的都是运动时间行为中的支配原理，如不稳定模式支配稳定模式、慢变量支配快变量等，对于波动系统来说，还有一个空间行为问题. 以空间周期 $L$ 的波动系统为例，它有不同尺度的傅里叶谐波，$\lambda_k = L/k(k=1,2,\cdots,N)$，有迹象表明，最长波的主模式（这里 $k=1$）与其他模式不可等量齐观，它在运动中表现出某种特殊地位，甚至有可能支配其他模式的运动.

图 10-19 给出在随波坐标系中扰动波主振子 $k=1$ 暂态的相图，$b_{k-1}(\tau)$ 作为 $\alpha_{k=1}(\tau)$ 的函数，$\Omega=0.65$，$\varepsilon=0.22$，其中(a)～(d)的条件与图 10-17(a)～(d)的分别完全相同，符号“▼”也分别对应同一时刻. 几张图中的共同现象是，当图 10-17(a)～(d)中的轨道分别运动到拐点“▼”时，在图 10-19(a)～(d)中这些轨道恰好分别达到一个驼峰的顶端；在这个临界时间之前，振子 $k=1$ 的幅角 $\alpha_{k=1}(\tau)$ 在$[-\pi,\pi]$范围内混沌地摆动，有点像单摆的摆动相，当越过驼峰顶点以后，随着振子振幅 $b_{k=1}(\tau)$ 突然增加，幅角 $\alpha_{k-1}(\tau)$ 的变化不再被约束在 $2\pi$ 范围内（图中已取$[-\pi,\pi]$的主值），并且在此后的运动中 $\alpha_{k=1}(\tau)$ 的变化也不时超过 $2\pi$. 由此可见，图 10-17 中轨道突然转向与幅角 $\alpha_{k=1}(\tau)$ 运动状态出现突变有密切关系.

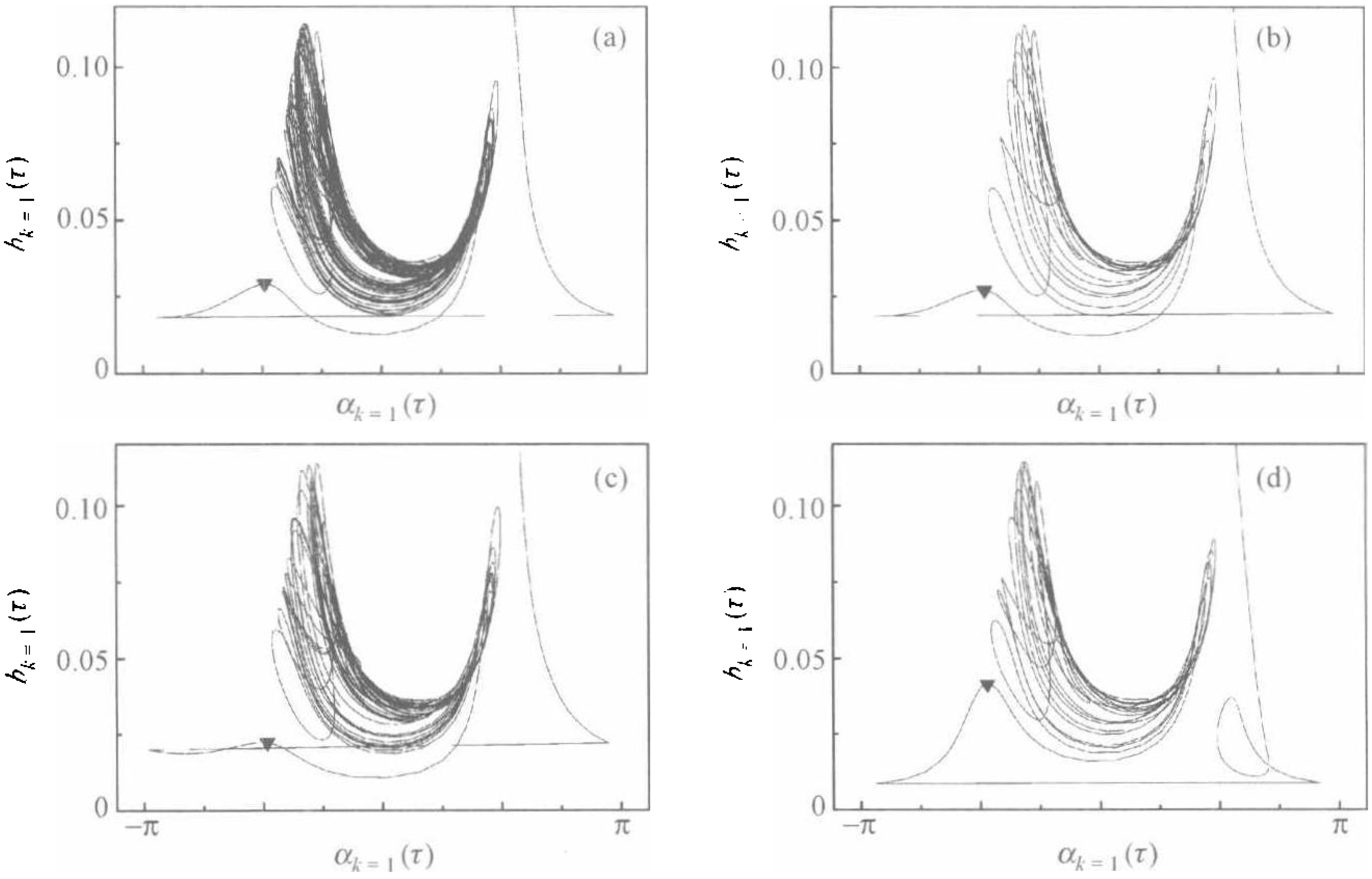
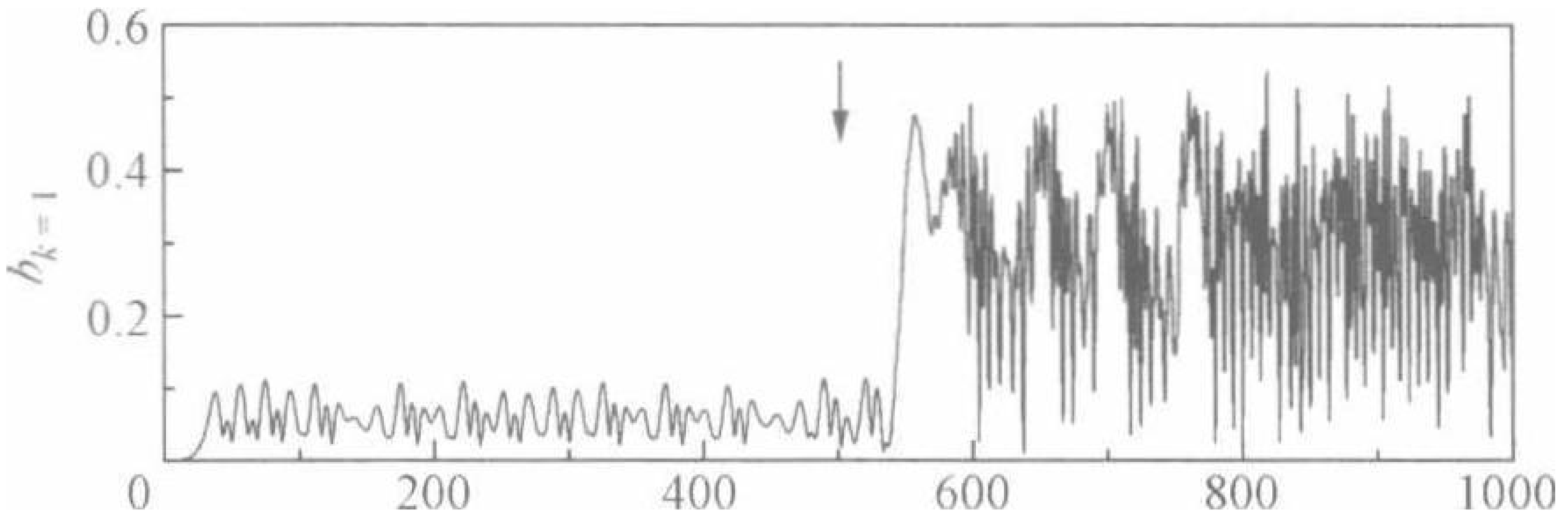



图 10-19　激变发生前后 $k=1$ 主振子运动的相图
（随波坐标系，$\Omega=0.65$，$\varepsilon=0.22>\varepsilon_c$）

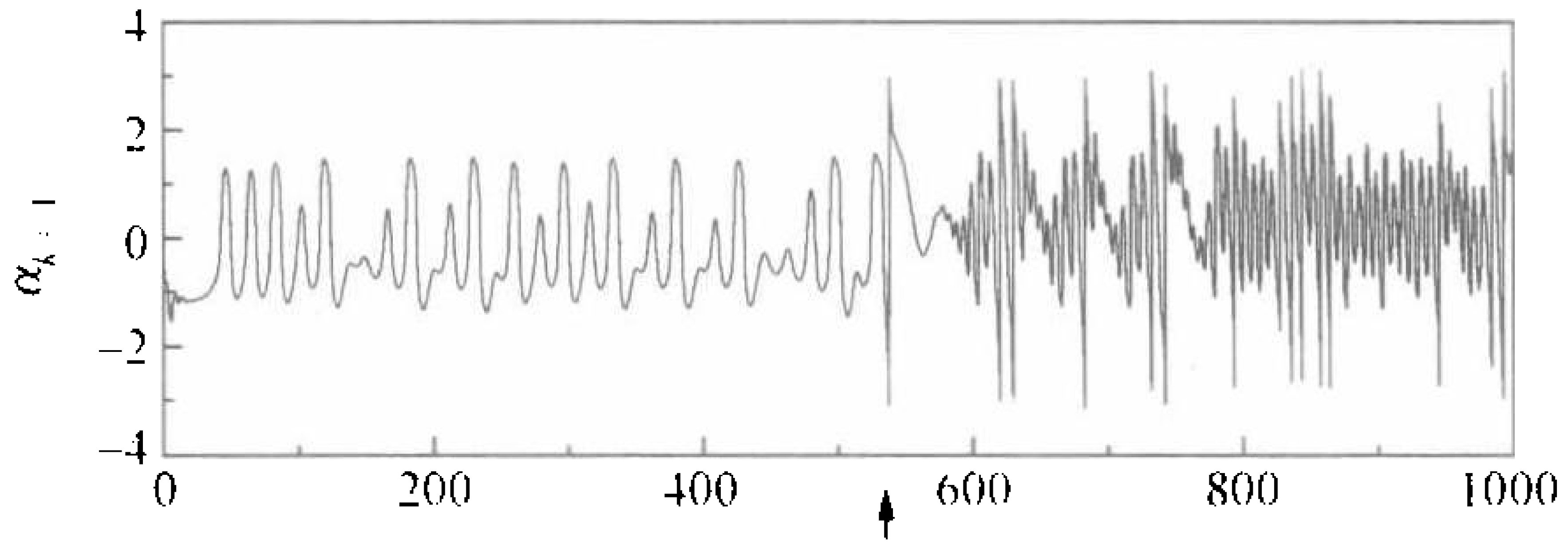
上述现象多少有点像单摆位相运动的状态突变，在临界值 $\pm\pi$ 处，单摆幅角的

摆动相突变为转动相. 对比图 10-19 中(a)～(d)这几张图,一个重要现象是,驼峰顶点"▼"处的幅角 $\alpha_{k=1}$ 几乎相等,对 20 个不同初始条件的样本计算得到的平均值为$-1.539\approx-\pi/2$,相对误差仅 3.9%.这个结果有力地支持下述猜想:这些驼峰顶点对应主振子 $k=1$ 幅角运动的一个临界值 $\alpha_c$,在 $|\alpha_{k-1}(\tau)|<|\alpha_c|$ 时,幅角作混沌摆动,一旦越过这个临界值,幅角运动就会发生状态突变.

图 10-20 是主振子 $k=1$ 随时间的演化,$\Omega=0.65$,$\varepsilon=0.22$,图(a)是振幅 $b_{k-1}(\tau)$,图(b)是位相 $\alpha_{k-1}(\tau)$,已取$[-\pi,\pi]$范围内的主值. 初始时轨道仍从鞍点附近出发,图中两个箭头分别指示激变中两个动力学事件——与鞍点碰撞和位相 $\alpha_{k-1}(\tau)$的状态突变——发生的临界时刻. 由图可见,激变前振子振幅 $b_{k-1}(\tau)$小幅地缓慢变化,激变后突然变为大幅度剧烈振荡;更重要的是,在第二个事件发生以后,$\alpha_{k=1}(\tau)$的变化常常穿越 $2\pi$,表现为无规摆动和旋转的一种混合运动状态;与之相对照,在这个临界时刻之前,主振子的位相 $\alpha_{k-1}(\tau)$小幅度缓慢变化. 这样,我们有理由说,在轨道与鞍点碰撞后,运动的确又经历了另一个临界动力学事件,它以扰动波主振子的幅角 $\alpha_{k=1}$ 运动状态突变为标志[243].




(a) 振幅 $b_{k=1}(\tau)$




(b) 位相 $\alpha_{k=1}(\tau)$

图 10-20 激变发生前后扰动波主振子的振幅和位相随时间的演化
(随波坐标系,$\Omega=0.65$,$\varepsilon=0.22>\varepsilon_c$,图中用箭头分别指示了在激变过程中两个动力学事件发生的临界时刻)

这些结果充分说明,弱湍吸引子轨道与鞍点碰撞起到了触发激变的作用,但它没有直接破坏波动的空间相干性,却引发了另一个临界动力学事件,在这一继发事件中主振子位相的运动状态发生了突变. 下面将进一步说明,正是这第二个临界事件直接导致了空间相干性的破坏,引起运动出现强湍特征.

我们将这个现象归结为支配原理的一个表现有充足的理由吗? 空间大尺度模

式是否真的支配着小尺度模式的运动? 一些迹象表明,回答应该是肯定的. 事实上,在参数变化过程中,其他振子并非没有发生过位相状态的改变,如在激变前有的 $k\neq 1$ 振子的幅角就已从摆动变为转动(参考图 9-18),然而整个波动状态并未因此有什么大的不同,相轨道依然循规蹈矩地在高维环上周而复始地旋转,波斑图空间相干性也没有因此受到破坏,看不出这些振子的幅角从摆动到转动对波斑图有什么特别的影响,而主振子 $k=1$ 却不同,位相状态刚一改变,立刻掀起波澜.

位相 $\alpha_{k=1}(\tau)$状态的改变何以如此关键? 它为什么会造成空间相干性的破坏? 分析不同空间尺度分波的运动可以给我们以启发. 这里鞍型波动解 $\phi_0^*(\xi)$的第 $k$ 个分波为

$$\phi_{0,k}^*(\xi) \equiv A_k\cos(k\xi+\theta_k), \tag{10-17}$$

扰动波 $\delta\phi(\xi,\tau)$的第 $k$ 个分波为

$$\delta\phi_k(\xi,\tau) \equiv b_k(\tau)\cos[k\xi+\alpha_k(\tau)]. \tag{10-18}$$

图 10-21 为给定 $\Omega=0.65$,$\varepsilon=0.22$ 时在随波坐标系中 $k=1$ 分波的运动[计算本图和图 10-22 时 $\delta\phi(\xi,\tau)$是按式(10-9)展开的],其中鞍型分波解 $\phi_{0,k=1}^*(\xi)$用"▽"连线表示,几个分立时刻 $\tau$ 的扰动分波 $\delta\phi_{k=1}(\xi,\tau)$用圆点线表示,图(a)为激变尚未发生时的暂态,此时 $\delta\phi_{k=1}(\xi,\tau)$的峰被束缚在 $\phi_{0,k=1}^*(\xi)$的势阱之中,幅度变化很小,波峰位置移动也不大,平均而言,$\delta\phi_{k=1}(\xi)$的位相与 $\phi_{0,k=1}^*(\xi)$的相反;图(b)是激变后的渐近态,$\delta\phi_{k=1}(\xi,\tau)$的峰值已可大大超过 $\phi_{0,k=1}^*(\xi)$的势垒高度,且平均来说它们有同位相,尤为重要的是,$\delta\phi_{k=1}(\xi,\tau)$的波峰和位相常可扫过整个 $2\pi$ 周期.

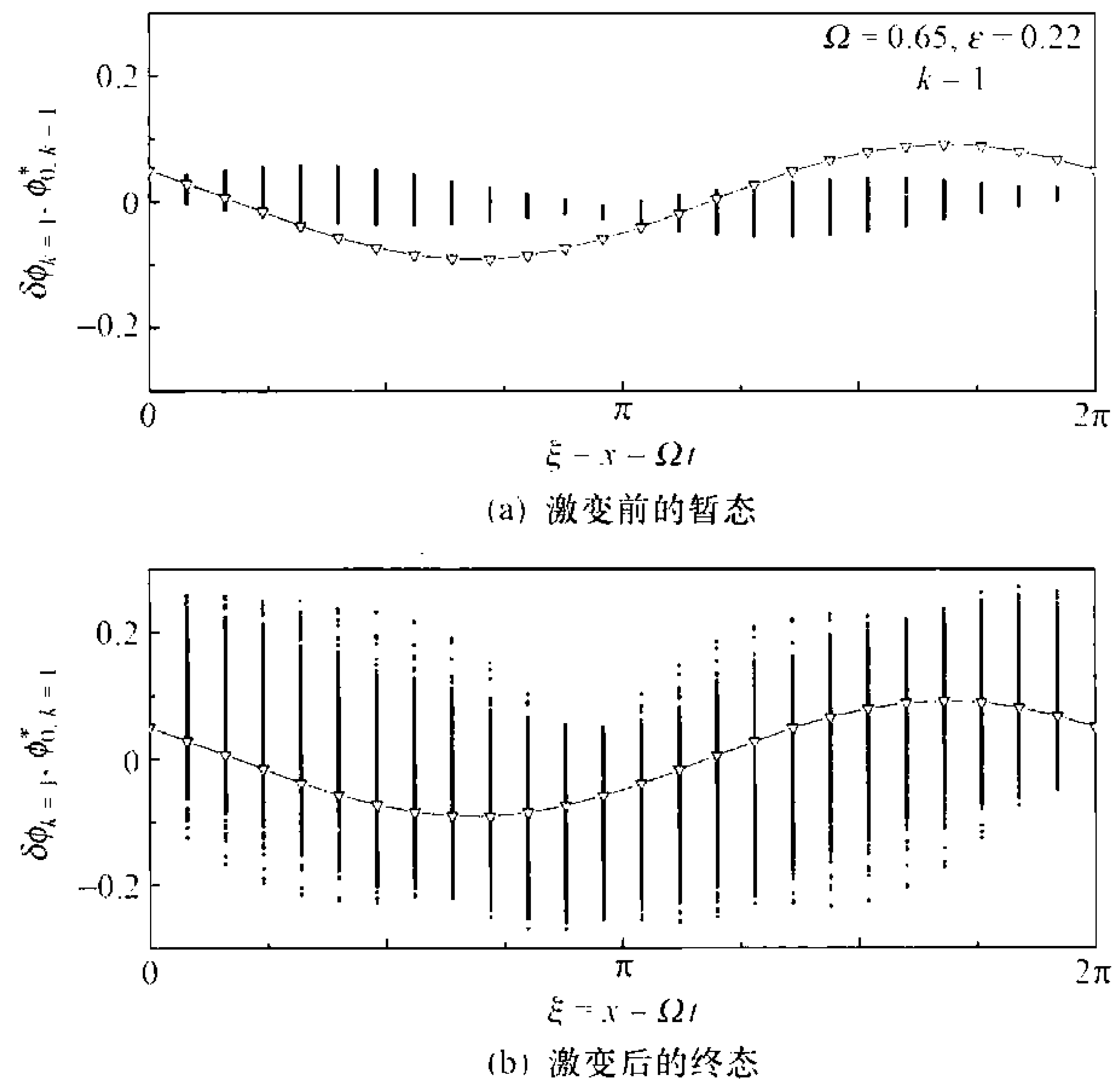
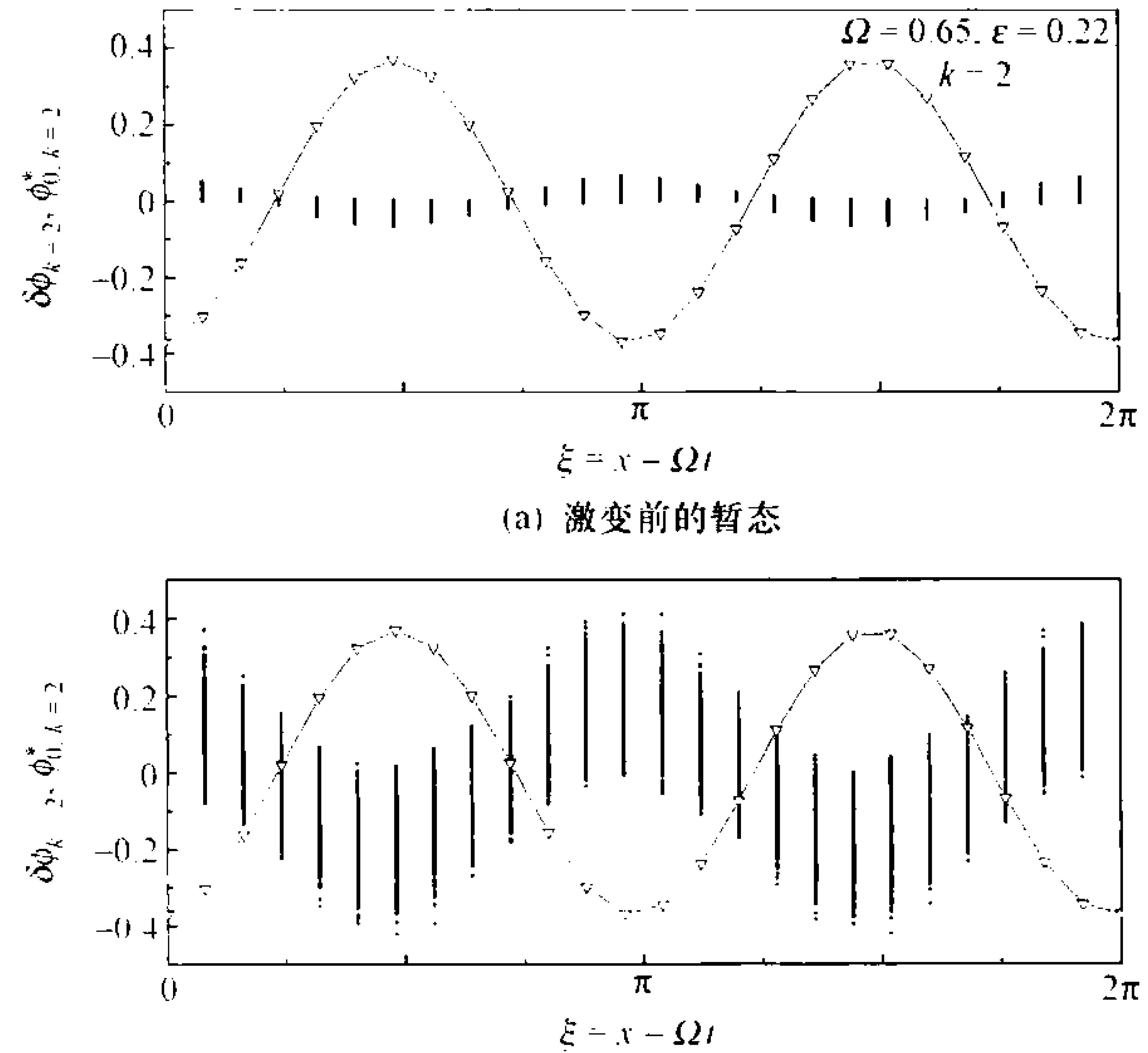



图 10-21 激变发生前后 $k=1$ 扰动分波的束缚-自由转变
($\Omega=0.65$,$\varepsilon=0.22>\varepsilon_c$)

让我们将扰动分波类比为一个粒子，重心在波峰处. 对 $k=1$ 分波来说，激变发生前，粒子被束缚在势阱中作小幅往返运动[在图 10-7(b)和图 10-8(b)的情形下甚至处于静止状态]；激变发生之后最显著变化是，粒子相对于势阱变得自由，它可以越过势垒，穿行于鞍型分波波列之间. 在这个意义上可以说，激变中第二个动力学事件是 $k=1$ 扰动分波相对于鞍型波势阱出现了"束缚-自由"转变[237].

其他 $k\neq1$ 的分波没有发生束缚状态的改变，图 10-22 分别给出 $k=2$ 扰动分波 $\delta\phi_{k=2}(\xi,\tau)$ 和鞍型分波解 $\phi^*_{0,k=2}(\xi,\tau)$ 在激变前后的状态，参数与图 10-21 相同. 从图上可以看到，无论激变前[图(a)]还是激变后[图(b)]，$\delta\phi_{k=2}(\xi,\tau)$ 的两个波峰都分别被限制在 $\phi^*_{0,k=2}(\xi,\tau)$ 的两个阱中，虽然在激变后 $\delta\phi_{k=2}(\xi,\tau)$ 的峰高已与势垒可比，峰的位置却很少移动. 另外几个长波振子的行为也类似于图 10-22，它们在空间中都被高度局域化，看来激变中出现"束缚-自由"转变的只有主振子 $k=1$.




(a) 激变前的暂态

(b) 激变后的终态

图 10-22 激变发生前后 $k=2$ 扰动分波 $\delta\phi_{k=2}(\xi,\tau)$ 的运动状态

($\Omega=0.65$，$\varepsilon=0.22$，符号同图 10-21)

当 $k=1$ 的扰动分波的波峰被势阱约束在小范围内往返运动时，它与其他 $k\neq1$ 的扰动分波之间的相对位相只能在很小范围内调节，这严重地限制了主振子与其他振子之间可能选择的能量交换状态，结果就像在图 10-4 中激变前相干波动的情形那样，能量交换主要发生在少数几个长波振子之间；在主振子出现"束缚-自由"转变之后，其波峰常常可横扫整个 $2\pi$ 周期，这最大限度地拓展了主振子分波与其他分波相对位相的可调范围，大大增加了它们之间发生能量交换的机会. 由此可以理解为什么在激变后的强湍状态下，短波模式的运动变得如此活跃，如图 10-4 显

示的激变后强湍波动的情形那样，在很宽的尺度范围内出现了正向和逆向级联的能流，并形成如图 10-3(b)中强湍特有的幂律波谱.

### 10.4.2　对称性突变

在双阱势中运动的粒子有对称性质不同的两个状态，约束在左边的势阱中，或约束在右边的势阱中. 如果粒子在两个势阱之间来回跳跃，从统计上说，粒子的运动也存在对称性不同的两个状态，它取决于粒子进入两个势阱概率的高低. 在波动模型(7-47)中，与对称性相关的因素，首先是外驱动波 $\varepsilon\sin(x-\Omega t)$，在实验室坐标系中它规定了一个优先方向，讨论动力学问题需要沿着这个方向相对于定态波进行；其次是非线性因素更带来一些新的对称性问题，如在第八章中曾说明，当扰动准模 $\tilde{k}$ 有复共轭本征值时，根据两个分支本征矢量的相对强度，可区分出正能态和负能态，这反映了线性扰动波的准模可拥有对称性不同的两个状态. 无论是鞍结点分岔还是 Hopf 分岔，在它们的发展过程中都经历过特征准模的能态改变，显示不动点的分岔与准模对称性质的改变如影随形.

作为一种全局分岔现象，激变是否也伴随着对称性质的改变？ 如果答案是肯定的，它将采取什么样的形式？ 全局分岔与局域分岔的主要区别在于它涉及整个吸引子状态的改变，如果也有对称性问题，它一定与吸引子上轨道运动的整体行为有关. 从上一节讨论已经知道，激变后吸引子突然膨胀是扰动波主振子在势阱中的运动从束缚变为自由引起的，若激变果真伴随着对称性的改变，最大的可能是发生在主振子 $k=1$ 上.

在讨论复模式运动时，如不关心振幅和位相等细节，可采用模式能量这个参量，在随波坐标系中因有 $\phi(\xi,\tau)=\phi_0(\xi)+\delta\phi(\xi,\tau)$，波动模式 $k$ 的能量 $E_k(\tau)$包括了 3 个部分[241]：

(1) 定态波解 $\phi_0(\xi)$的模式自能

$$E_{0,k} = (1-ak^2)A_k^2/4; \tag{10-19}$$

(2) 扰动波 $\delta\phi(\xi,\tau)$的振子与定态波解 $\phi_0(\xi)$的模式相互作用的能量

$$\delta E_k^{\mathrm{I}}(\tau) = (1-ak^2)A_k b_k(\tau)\cos[\theta_k-\alpha_k(\tau)]/2; \tag{10-20}$$

(3) 扰动波 $\delta\phi(\xi,\tau)$的振子自能

$$\delta E_k^{\mathrm{S}}(\tau) = (1-ak^2)b_k^2(\tau)/4. \tag{10-21}$$

在这三部分能量中，$E_{0,k}$是常数，不随时间改变. 与扰动振子运动有关的能量包括两部分，其中自能 $\delta E_k^{\mathrm{S}}(\tau)$是正定的，而相互作用能 $\delta E_k^{\mathrm{I}}(\tau)$则可正可负，依赖于位相差 $\theta_k-\alpha_k(\tau)$的值，预料这个量可以提供关于扰动波在势阱中运动对称性质的信息.

图 10-23 是激变前主振子 $\delta\phi_{k=1}(\xi,\tau)$在渐近状态下的相图，$\Omega=0.65$，$\varepsilon$ 的值分别为图(a) 0.18，图(b) 0.19，图(c) 0.20，横坐标是相互作用能 $\delta E_{k=1}^{\mathrm{I}}(\tau)$，纵坐标是自能 $\delta E_{k=1}^{\mathrm{S}}(\tau)$，实线表示扰动振子 $k=1$ 的运动轨道，鞍点位于原点，它的稳定和

不稳定轨道分别用小圆圈连线和虚线表示. 一个非常明显的现象是，$\delta\phi_{k=1}(\xi,\tau)$的运动在左右两边是不对称的，平均而言，当轨道运行到$\delta E^{\mathrm{I}}_{k-1}(\tau)<0$的左边时振子有更大的自能$\delta E^{\mathrm{S}}_{k-1}(\tau)$和相互作用能$|\delta E^{\mathrm{I}}_{k=1}(\tau)|$. 有趣的是，随着参数逐渐趋近激变的临界点$\varepsilon=\varepsilon_c$，从图(a)到(c)轨道运动在统计意义上变得越来越对称，振子能量在左边不再占有明显优势.

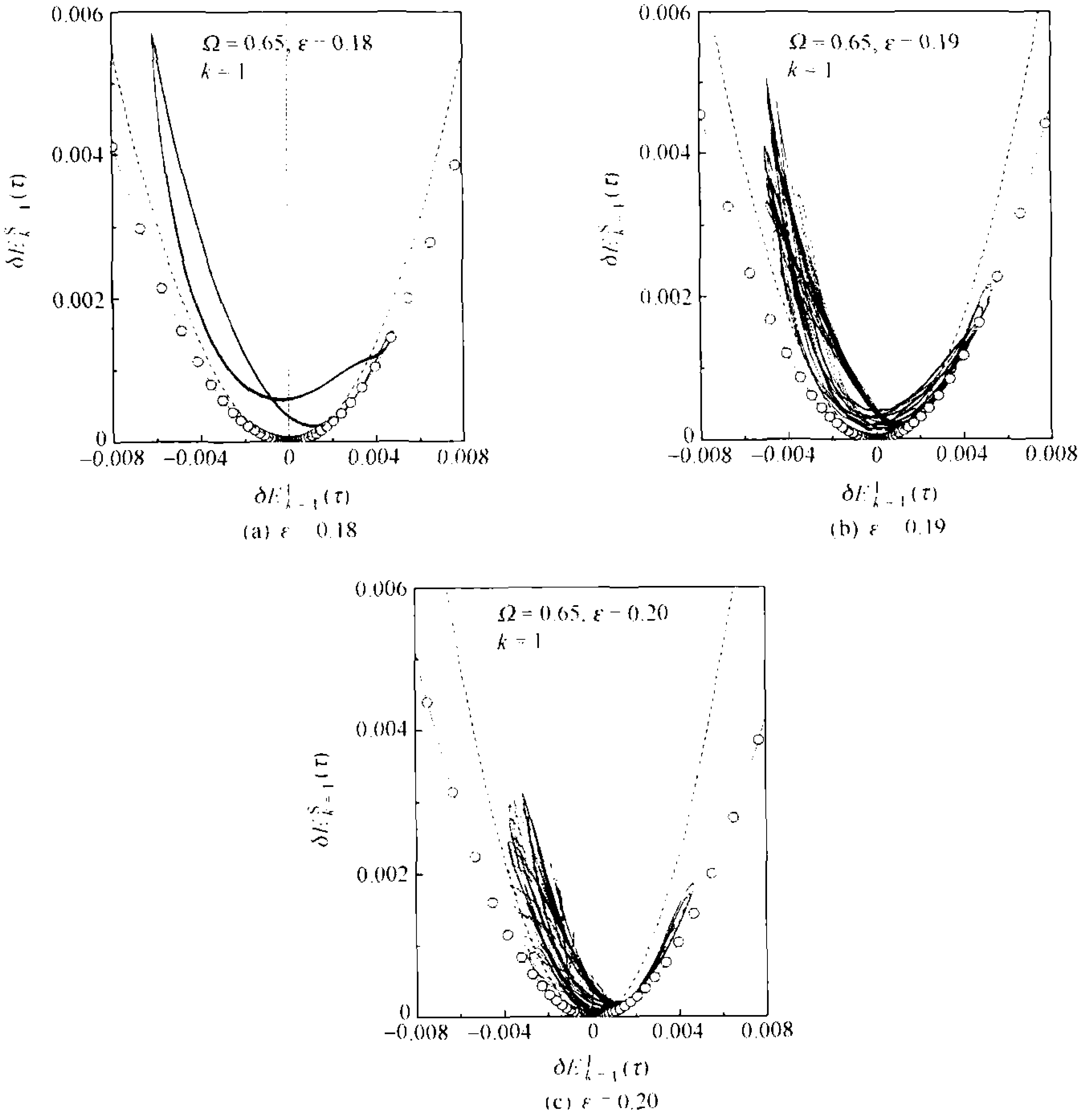
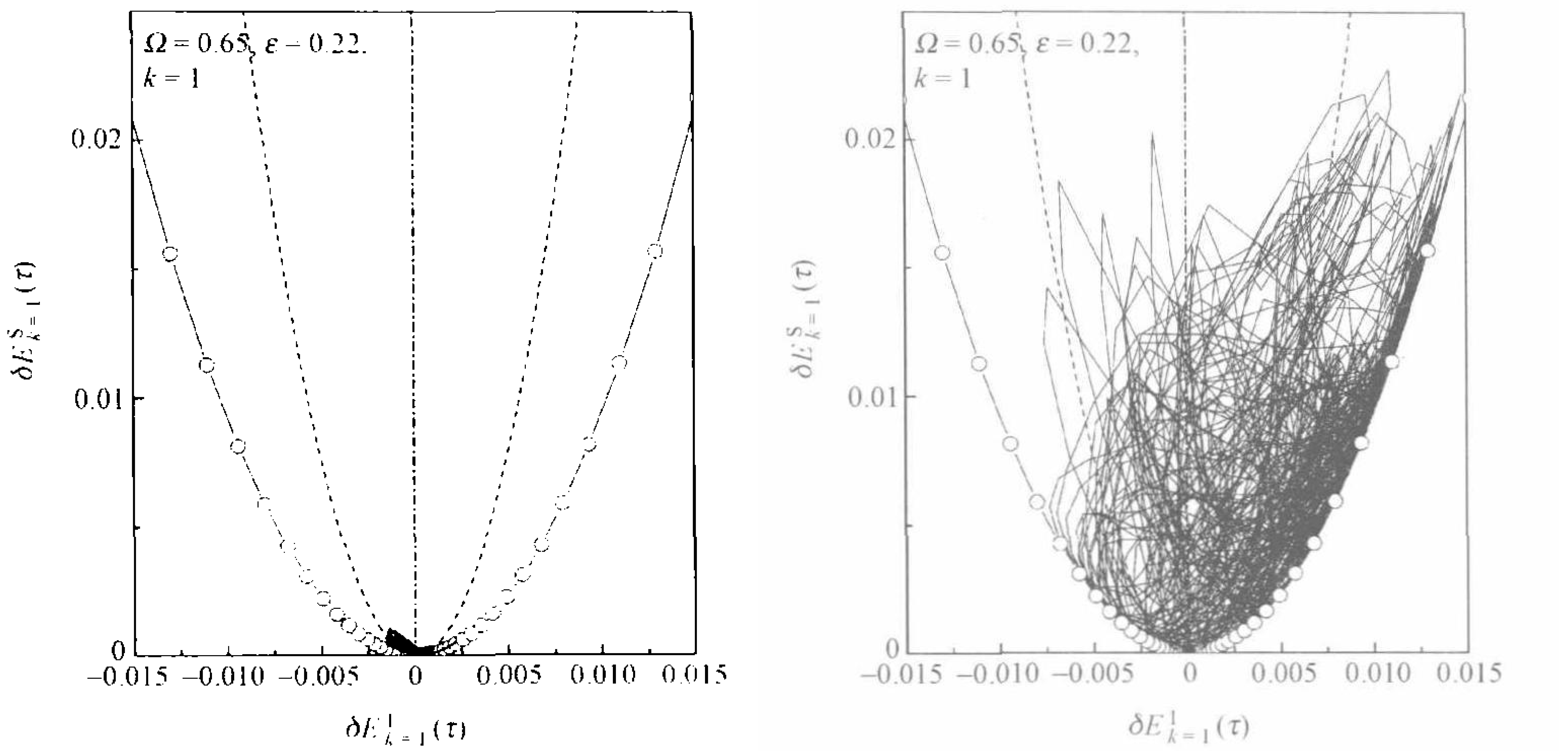



图 10-23　参数$\varepsilon$趋近激变的临界点$\varepsilon_c$时扰动波$k=1$主振子渐近运动对称性的变化（随波坐标系，$\Omega=0.65$）.

图 10-24 中$\Omega=0.65$，$\varepsilon=0.22>\varepsilon_c$，已越过激变发生的临界参数值，实线表示主振子$\delta\phi_{k=1}(\xi,\tau)$的暂态[图(a)]，终态轨道[图(b)]，其他符号同图 10-23. 由图可见，在暂态中轨道徘徊在鞍点附近，左右两边强度可比，而在激变过后的终态中，轨道运动变得异常失衡，平均而言，在$\delta E^{\mathrm{I}}_{k=1}(\tau)>0$的右半边，振子自能$\delta E^{\mathrm{S}}_{k=1}(\tau)$和相互作用能$\delta E^{\mathrm{I}}_{k-1}(\tau)$比在左边时大得多. 鞍点的稳定轨道（小圆圈连线）就好像一

个无限高的势垒将吸引子轨道束缚在其中，十分醒目. 其实，笔者在做图 10-23 和 10-24 时，原本并没有画出鞍点轨道，后注意到吸引子轨道似乎总是被一条抛物线反弹，像是粒子在无限深势阱中运动，遂试探将鞍点的稳定和不稳定轨道绘出，才发现正是鞍点的两条稳定轨道提供了约束扰动振子运动的势垒.




$\delta E^{\mathrm{I}}_{k=1}(\tau)$　　　　$\delta E^{\mathrm{I}}_{k=1}(\tau)$

(a) 暂态轨道　　　　(b) 终态轨道

图 10-24　参数 ε 越过激变临界点 $\varepsilon_c$ 后扰动波 $k=1$ 主振子运动对称性的突变
（随波坐标系，$\Omega=0.65$，$\varepsilon=0.22>\varepsilon_c$）.

从图 10-23 和 10-24 可以很明显地看出，激变前后主振子运动的对称性质发生了临界改变，为进一步分析，有必要对吸引子的这一行为作一个定量刻画. 在统计物理中，常用序参量(order parameter)来描写临界现象[242]，考虑到这里运动的对称性取决于主振子的相互作用能 $\delta E^{\mathrm{I}}_{k=1}(\tau)$ 在左右两半平面运动的统计行为，可定义序参量[243]如下

$$S \equiv \langle \delta E^{\mathrm{I}}_{k=1}(\tau)\rangle^{\mathrm{P}} + \langle \delta E^{\mathrm{I}}_{k=1}(\tau)\rangle^{\mathrm{N}}. \tag{10-22}$$

式中

$$\langle \delta E^{\mathrm{I}}_{k}(\tau)\rangle^{\mathrm{P}} \equiv \frac{1}{T_{\mathrm{P}}}\sum_{\delta E^{\mathrm{I}}_{k}>0} \delta E^{\mathrm{I}}_{k}(\tau)\Delta\tau,$$

$$\langle \delta E^{\mathrm{I}}_{k}(\tau)\rangle^{\mathrm{N}} \equiv \frac{1}{T_{\mathrm{N}}}\sum_{\delta E^{\mathrm{I}}_{k}<0} \delta E^{\mathrm{I}}_{k}(\tau)\Delta\tau, \tag{10-23}$$

这里 $\Delta\tau$ 是数值计算中的时间步长，求和的下标表示仅当 $\delta E^{\mathrm{I}}_{k}(\tau)>0(<0)$时才进行，而 $T_{\mathrm{P}}(T_{\mathrm{N}})$表示轨道在 $\delta E^{\mathrm{I}}_{k}>0(<0)$区域中经过的总时间. 这样，序参量 $S<0$(或$>0$)表示主振子 $k=1$ 的扰动分波与定态分波势阱之间有更强的负(或正)相互作用能.

图 10-25(a)是序参量 $S$ 随 ε 的变化，在激变的临界参数($\varepsilon_c\approx0.20$)前，$S$ 从负

方向单调地趋于 0，而在越过临界参数 $\varepsilon_c$ 后，$S$ 突然跃变到一个有限大的正值，这说明激变的确造成了扰动波主振子运动对称性的突变. 注意在 $\varepsilon \to \varepsilon_c$ 时 $\delta\phi_{k=1}(\xi,\tau)$ 的振动幅度并不趋于 0. 如在图 10-23(c)中 $\varepsilon$ 已经非常接近 $\varepsilon_c$，那里主振子的相互作用能 $\delta E^{\mathrm{I}}_{k=1}(\tau)$ 相对于鞍点混沌地左右摆动，只是摆动能量在统计上趋于完全对称，才造成了序参量 $S \to 0$. 作为对比，在图 10-25(a)中还画出了主振子的平均自能 $\langle \delta E^{\mathrm{S}}_{k=1} \rangle$，用"◦"表示，它在临界点 $\varepsilon_c$ 处并不趋于 0，虽然在激变后这个量也出现突变.

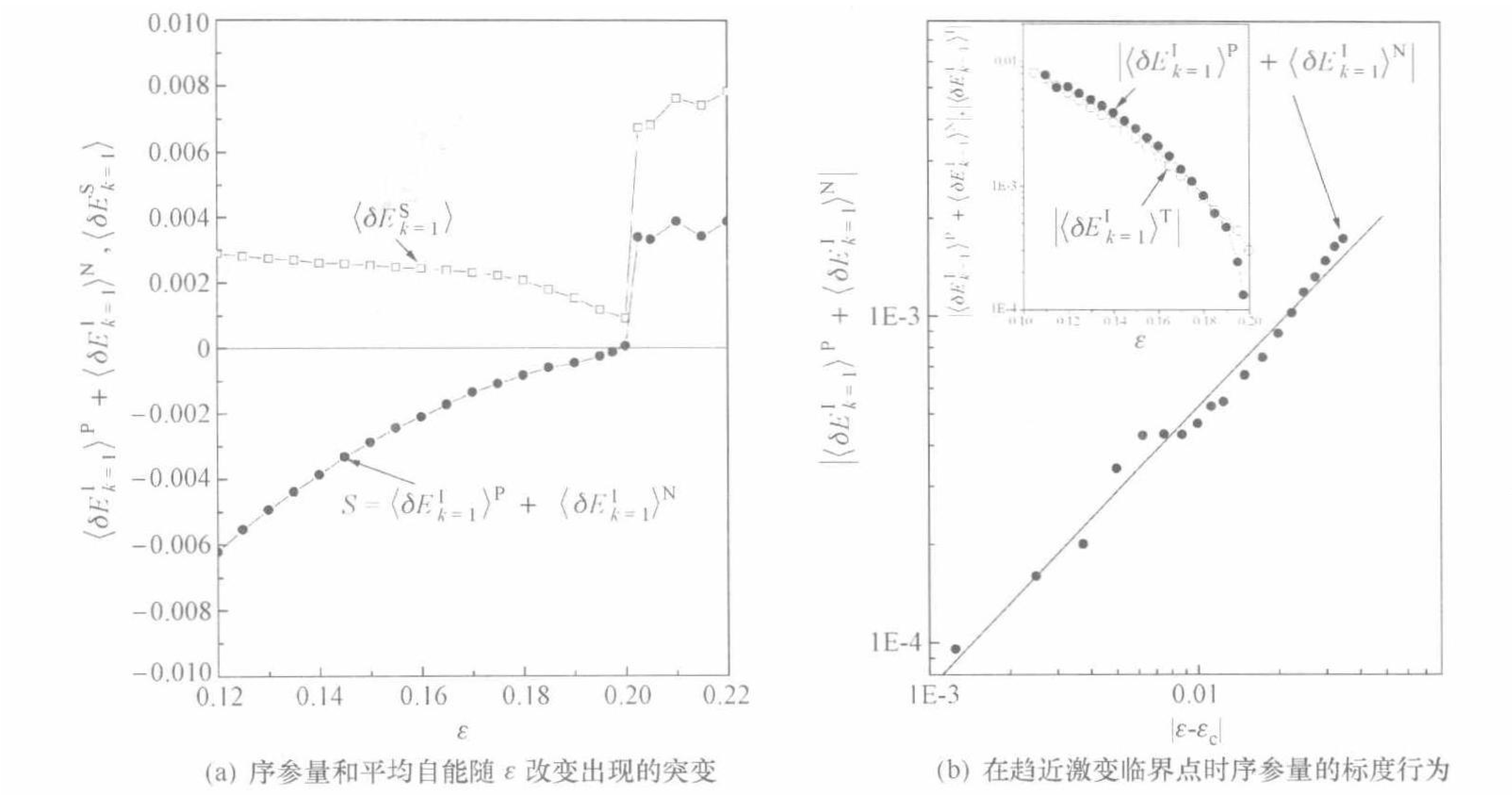



图 10-25 在激变临界点前后序参量 $S$ 的行为

($\Omega = 0.65$)

从上面结果我们看到，在向强湍激变过程中序参量 $S$ 出现了不连续改变，它有一级相变的特征. 与其他临界现象一样，$S$ 在趋近临界点 $\varepsilon_c$ 时显示了一定的标度规律，图 10-25(b)给出了 $|S|$ 随 $|\varepsilon-\varepsilon_c|$ 的变化(图中用"•"表示)，它遵循幂律 $|S| \sim |\varepsilon-\varepsilon_c|^{\eta}$. 拟合得到临界指数 $\eta$ 约为 0.85.

作为比较，还计算了扰动波主振子的相互作用能 $\delta E^{\mathrm{I}}_{k=1}(\tau)$ 沿轨道的简单平均

$$\langle \delta E^{\mathrm{I}}_{k}(\tau) \rangle^{\mathrm{T}} = \frac{1}{T}\sum \delta E^{\mathrm{I}}_{k}(\tau)\Delta\tau, \tag{10-24}$$

求和沿轨道连续进行，没有区分 $\delta E^{\mathrm{I}}_{k=1}$ 的正负值，$T$ 是轨道运行总时间. 图 10-25(b)中的小插图给出了 $|S|$ 和 $|\langle \delta E^{\mathrm{I}}_{k=1}(\tau) \rangle^{\mathrm{T}}|$ 随 $\varepsilon$ 的变化，分别用"•"和"◦"表示. 在 $\varepsilon \to \varepsilon_c$ 时，$|\langle \delta E^{I}_{k}(\tau) \rangle^{\mathrm{T}}|$ 虽然也减小，但它不像序参量 $S$ 那样有趋向 0 的趋势.

对 $k \neq 1$ 的几个振子作类似的计算，没有发现它们的对称性在激变前后出现改变. 图 10-26 是振子 $k=2$ 的结果，图(a)为激变前，图(b)为激变后，符号的意义与图 10-23 的相同，无论在激变前还是在激变后，吸引子轨道主要都集中在左半边，它们的混沌程度有所差异，对称性却没有改变.

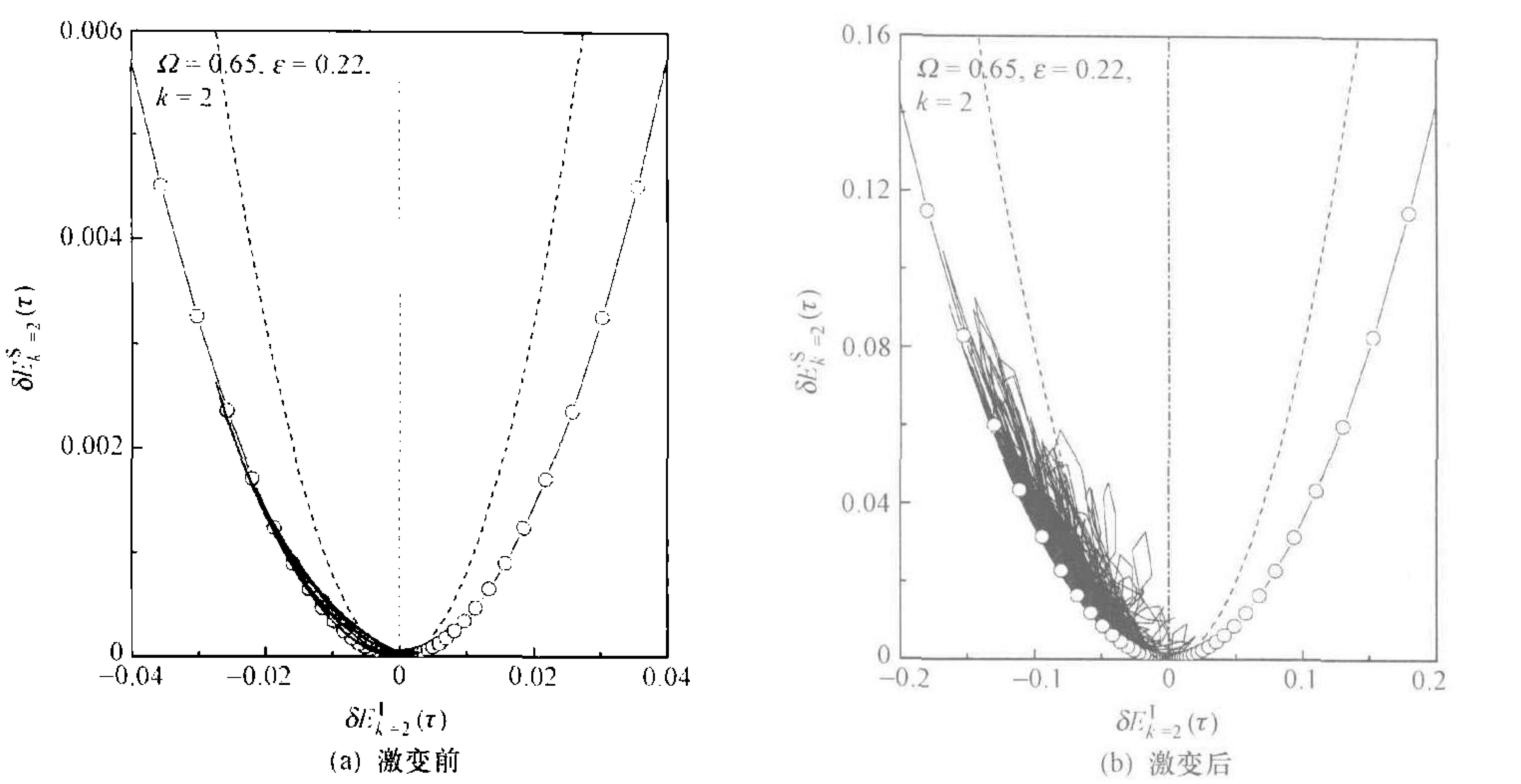



图 10-26 激变发生前后扰动波 $k=2$ 振子的运动

（随波坐标系，$\Omega=0.65$，$\varepsilon=0.22>\varepsilon_c$，符号同图 10-23）

图 10-27 是发生激变的临界点前，$\Omega=0.65$，$\varepsilon=0.19$，混沌运动的相互作用能 $\delta E_k^{\mathrm{I}}(\tau)$的概率分布，图(a)～(d)分别是振子 $k=1$～4 的结果，所有这几个振子都有更大的概率出现 $\delta E_k^{\mathrm{I}}(\tau)<0$.

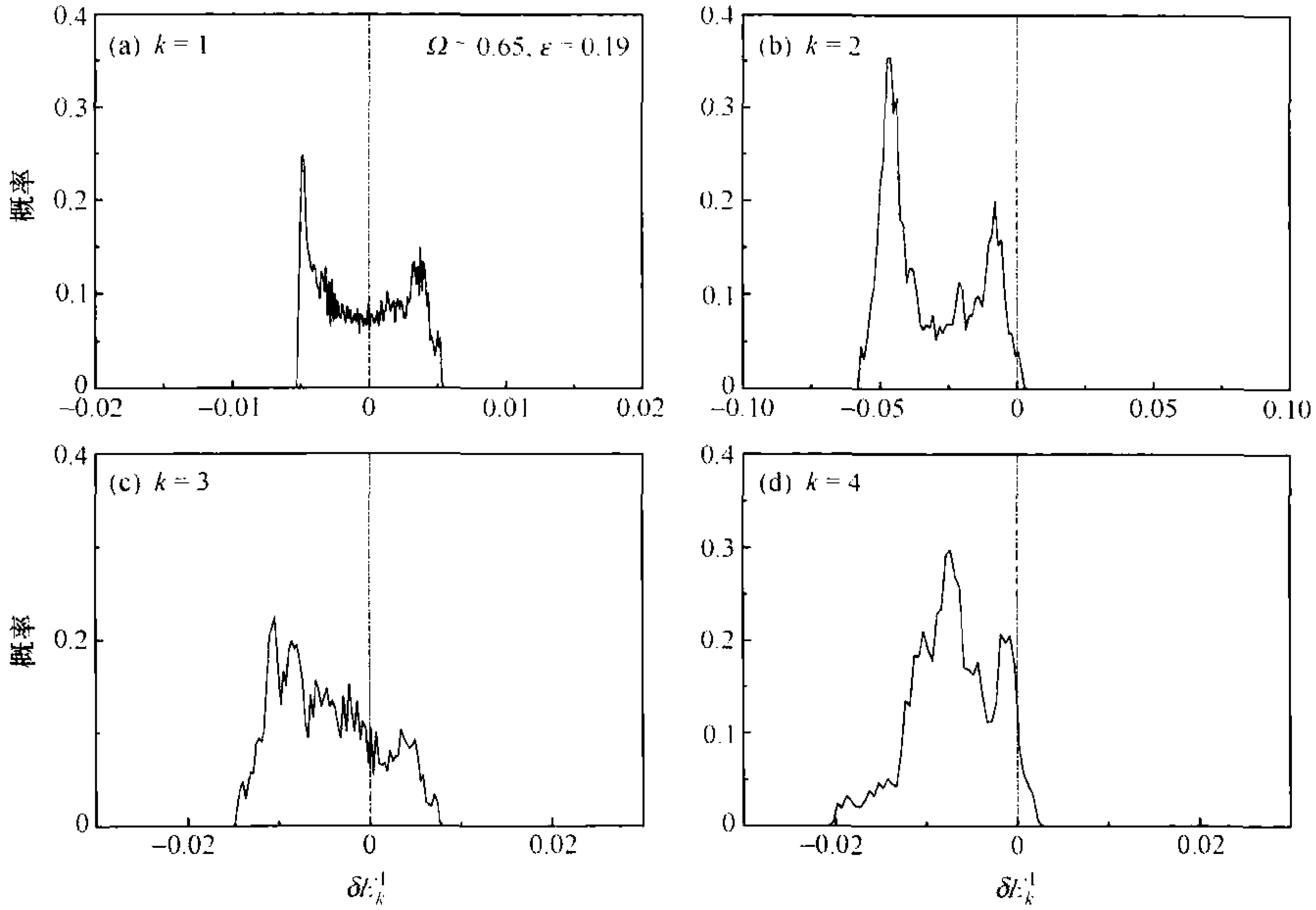



图 10-27 激变临界点前扰动振子在渐近态下相互作用能 $\delta E_k^{\mathrm{I}}(\tau)$的分布

（随波坐标系，$\Omega=0.65$，$\varepsilon=0.19<\varepsilon_c$）

图 10-28 和图 10-29 中参数已越过临界点，$\Omega=0.65$，$\varepsilon=0.22$，图(a)～(d)分别是振子 $k=1\sim4$ 的结果，情况与激变前有很大的不同. 图 10-28 是暂态：其中图(a)主振子 $k=1$ 的相互作用能的值非常小，并且在左右两边的分布比较对称；而图(b)～(d)中 $k\neq1$ 各振子仍有更大的概率取 $\delta E_k^{\mathrm{I}}(\tau)<0$ 的值.

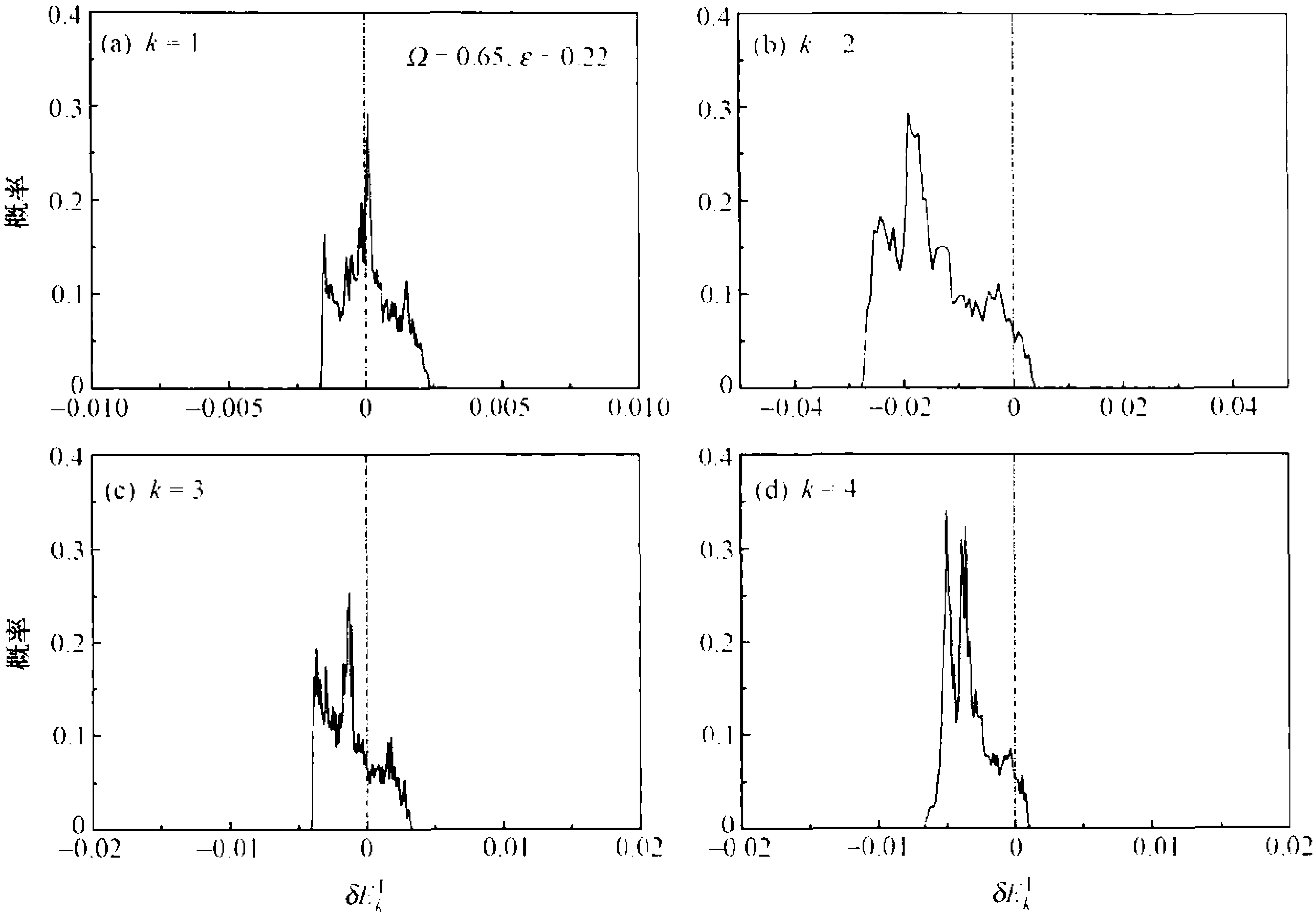



图 10-28　参数越过激变临界点 $\varepsilon_c$ 后扰动振子处于暂态时相互作用能 $\delta E_k^{\mathrm{I}}(\tau)$ 的分布（随波坐标系，$\Omega=0.65$，$\varepsilon=0.22>\varepsilon_c$）

图 10-29 是渐近态，这时所有振子的相互作用能 $\delta E_k^{\mathrm{I}}(\tau)$ 都有更宽的分布，更为不寻常的变化是，图(a)中主振子相互作用能分布的主峰移向 $\delta E_{k-1}^{\mathrm{I}}(\tau)>0$ 的右边，而其他振子的主峰仍在左边. 这些结果都说明，在激变中，只有主振子的对称性质出现了统计意义上的改变.

## 10.4.3　强湍状态下耦合振子的时空同步

在流体力学中，场量的空间相关函数是常用的一个参量，如一维流体在两个空间点 $x$，$x'$ 上场量 $\phi(x,t)$ 和 $\phi(x',t)$ 之间的相关函数定义为

$$C(x-x',t)=\langle\phi(x,t)-\phi(x',t)\rangle, \tag{10-25}$$

尖括号表示系综平均，如果有 $C(|x-x'|\to\infty)\to0$，即相距无穷远两点上的运动已不存在相关，就认为系统处于湍流状态. 不过问题是，自然界有大量实际系统有周期边界，如星球，在利用空间相关函数来描写它们的表面流体湍流时，参考点沿赤道移动，旋转一周后将回到其出发点，函数 $C(x-x')$ 变成了场量的自相关.

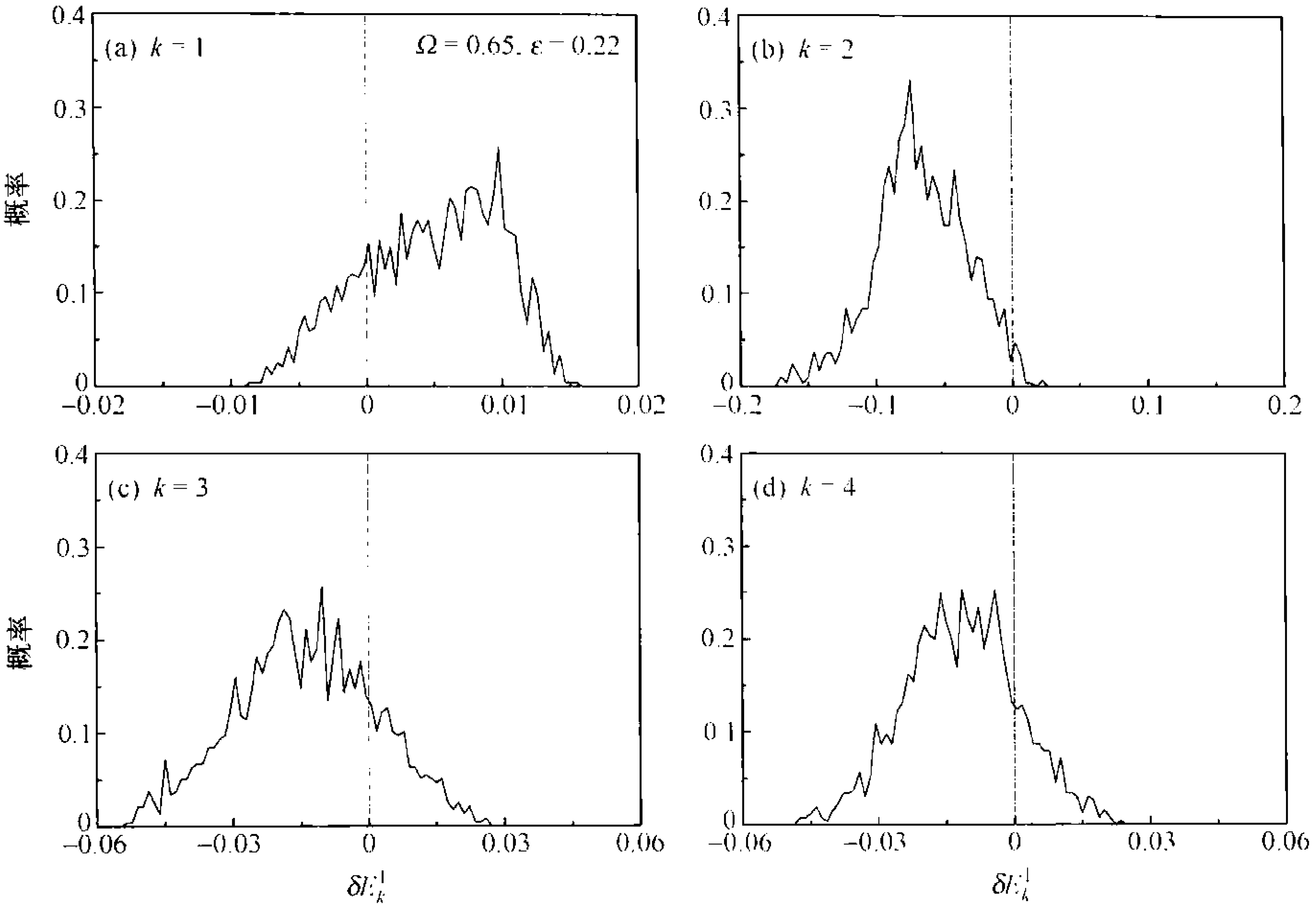
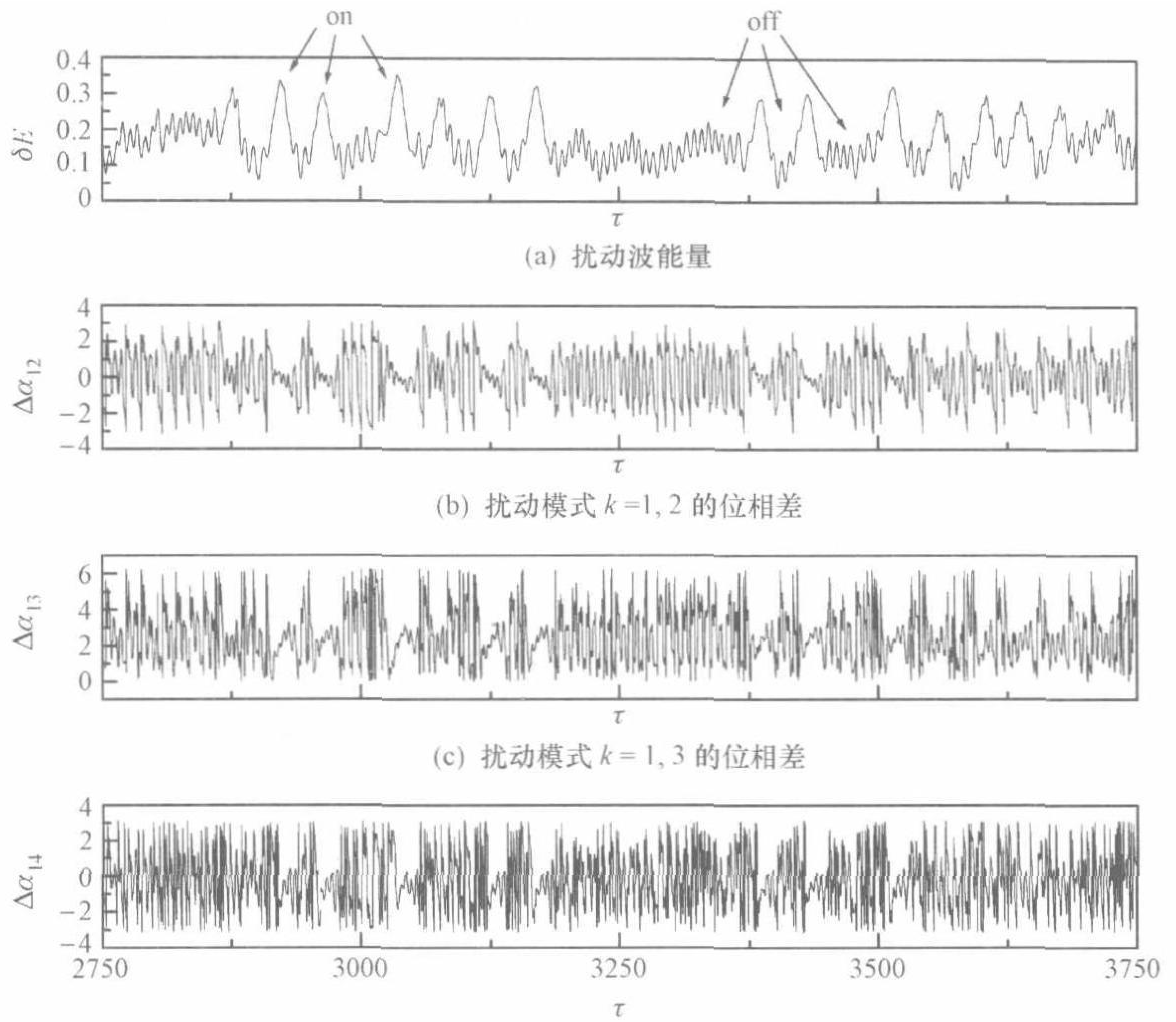



图 10-29　参数越过激变临界点 $\varepsilon_c$ 后扰动振子在渐近态下相互作用能 $\delta E_k^{\mathrm{I}}(\tau)$的分布（随波坐标系，$\Omega=0.65$，$\varepsilon=0.22>\varepsilon_c$）

采用空间相关函数(10-25)，是将流体看做由流体元组成，它们的相互作用引起流体的集体运动，这是一种物质构成的粒子观点. 另一种观点是把物质看做场，一个场量由各种尺度的谐波组成，每个谐波都是广延量，集体运动中的关联发生在不同尺度的谐波之间. 如第九章开始时在随波坐标系中将波动 $\phi(\xi,\tau)$分解为一组傅里叶分波$\{\phi_k(\tau)\}$，发现对于空间有规的波动，这些分波的轨道严格地维系在拓扑环上，实现了异常和谐完美的相同步状态；后来又将波动 $\phi(\xi,\tau)$看做是定态波势阱中的扰动波，$\phi(\xi,\tau)=\phi_0(\xi)+\delta\phi(\xi,\tau)$，无论 $\phi_0(\xi)$还是 $\delta\phi(\xi,\tau)$都包含了各种尺度的分波，扰动分波在与势阱作用的同时，相互之间还出现模-模耦合. 本章讨论向强湍的激变时采用的也是后一个分析方法，这两种方法都将波动看做是一个场. 按照场的观点，强湍流的动力学标志不在于组成它的流体元之间相关如何之弱，而在于其不同尺度的运动之间的相关方式与其他波动状态相比有何特异之处. 我们将看到，与人们的直觉相反，在强湍状态下，不同尺度的扰动振子在鞍型定态波势阱中运动时不仅可能出现相关，而且有时相关还异常强烈.

在观察强湍演化曲线时，有一个现象一直令人费解，无论是流体、等离子体湍流还是脑电波信号，无论是实验观测还是理论计算，在极其无规的演化曲线中，总会看到一些与众不同的尖峰，它们反复地出现，突兀于低幅高频振荡之间. 在漂移波模型(7-47)运动出现激变后的波能 $E(\tau)$演化曲线中，也观察到这些似乎是随机

出现的、宽而高的尖峰，如图 10-30(a)中看到的那样. 是什么原因使这样的尖峰一而再、再而三地出现呢？波能 $E(t)$是一个全空间的积分量，在某一时刻，只有波动 $\phi(x,t)$在整个空间周期都受到了较强的激发，或者说，不同尺度的分波都同时获得激发，积分量才能达到特别高的值，这是一种所谓的时空同步(spatiotemporal synchronization)现象.



(d) 扰动模式 $k=1,4$ 的位相差

图 10-30　强湍状态下扰动振子位相阵发出现的非完美相同步
(随波坐标系，$\Omega=0.65$，$\varepsilon=0.22>\varepsilon_c$，图中"on"指示非完美相同步的运动相、"off"指示位相失谐的运动相)

作为时空同步的一个直观例子，可举大脑的认知过程. 匪夷所思的是，正常人在清醒状态下的脑电波就像湍流信号那样无序，癫痫病人的脑电波反而近似周期地振荡[244]. 传统上关于大脑的认知理论把大脑看成一个拥有大量存储单元的计算机，认为识别一个事物是通过大脑中一个可辨别它的细胞来实现的，例如识别自己的祖母，就要调用储存祖母信息的细胞. 关于大脑功能的协同学理论(synergetic approach)却认为，认知是一个非定域的活动，识别事物是脑细胞网络自组织集体活动的结果，关于脑活动的这一理论类似于物理学中的场论[245]. 有比喻称，与其说大脑像一台计算机，毋宁说它更像是一支交响乐队，各种旋律相互配合才能形成一曲动听的乐曲.

大脑功能的后一理论得到了实验的支持，特别是脑磁图显示认知过程与整个大脑神经活动的时空同步有关. 实验表明，在认知过程中大脑的大片相关区域都处于兴奋状态，空间相干范围惊人地大，大部分运动皮层和感觉皮层都参与了. 若将特定时刻大脑的磁场分布分解为相互正交的模式，发现长波模式非常活跃，几个最长波空间模式在圆面上投影的明亮区看起来有球对称函数空间模式的图样，对于球谐函数，它的 $m=1,2,3,4,\cdots$ 模式(固定谐波的另一参数 $l$)投影分别显示一字形、十字形、六枝雪花形和米字形等花样，脑磁图的几个长波模式，花样也分别与之大体相同[215]. 这说明在认知过程中，几个不同空间尺度的长波模式同时获得了激发，这是典型的时空同步现象. 人们常说："脑子一亮，主意有了"，也许这就是人们对认知过程中大脑出现时空同步激发的一个直观感受.

在行波情形下，要形成时空同步，各个分波不仅要在同一时刻达到振幅高峰，而且位相要匹配得当，各分波的波峰波谷才不致于互相抵消，从而形成在整个空间上的同步激发. 下面我们将说明，在模型(7-47)的强湍状态下，不仅可以形成这样的时空同步状态，而且它反复地出现，虽然每一次时空同步经历的时间都很短暂.

为观察这样的阵发时空同步现象，仍要在随波坐标系中将非线性波看做是鞍型波 $\phi_0^*(\xi)$势阱中的一组耦合振子$\{b_k(\tau),\alpha_k(\tau)\}$，同步就出现在这些振子之间. 图 10-30 给出 $\Omega=0.65$，$\varepsilon=0.22$ 激变后强湍状态下的运动，图(a)是扰动波能量 $\delta E(\tau)$随时间的变化，它与波能 $E(\tau)$只相差一个常数，图(b)～(d)分别是扰动振子 $k=2,3,4$ 与振子 $k=1$ 的位相差 $\Delta\alpha_{1k}(\tau)\equiv\alpha_1(\tau)-\alpha_k(\tau)$的演化，已取主值，其中 $\Delta\alpha_{12}$的值移动了 $\pi$，以便于与后面图 10-32(b)对比. 在图 10-30(a)中可见，$\delta E(\tau)$的演化曲线不时出现宽而高的尖峰，在两个尖峰之间，能量在较低水平上快速振荡；将图(a)中 $\delta E(\tau)$的曲线与图(b)～(d)中位相差 $\Delta\alpha_{1k}(\tau)$曲线放在一起观察，一个显而易见的现象是，对应 $\delta E(\tau)$的每一个突兀尖峰，位相差 $\Delta\alpha_{1k}(\tau)$都在非常小的范围内调整，说明在相应时间内这几个长波振子大致同步；与此相对照，在能量处于相邻突兀尖峰之间在低水平上振荡时，$\Delta\alpha_{1k}(\tau)$的变化范围要大得多，常常超过 $2\pi$.

图 10-31 是位相差 $\Delta\alpha_{23}(\tau)$的演化，没有取主值，曲线呈阶梯状变化，显示了长短不一的平台，在每个平台上位相差 $\Delta\alpha_{23}(\tau)$有涨落，说明振子 $k=2,3$ 的位相间有同步但不尽完美；而在两个平台之间位相差大幅增加，两个振子的位相间出现了滑移. 几个长波振子间的位相差在未取主值时都有类似图 10-31 的阶梯形曲线，而且不同振子间的位相差出现平台的时间一致，对应波能图 10-30(a)中那些突兀的能量尖峰.

我们称图 10-30 或图 10-31 中的现象为开关集体非完美相同步(on-off collective imperfect phase synchronization)[236]，如图 10-31 中那些平台就处于集体相同步的开态(on)，位相滑移发生在同步的关态(off)：在关态中这些振子不断调整它

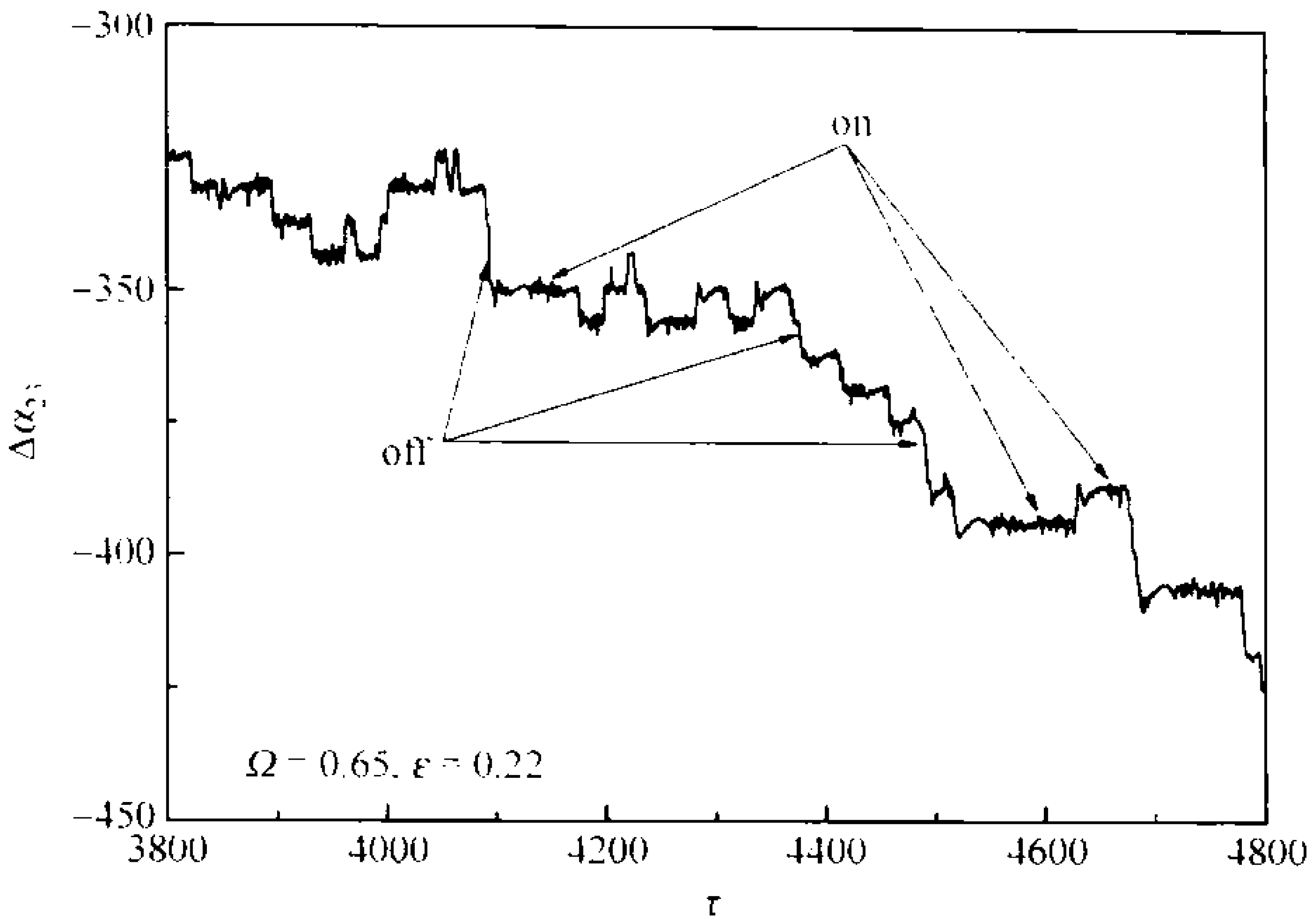



图 10-31　扰动振子 $k=2.3$ 之间的位相差 $\Delta\alpha_{23}$（没有取主值）随时间的演化（随波坐标系，$\Omega=0.65$，$\varepsilon=0.22$）

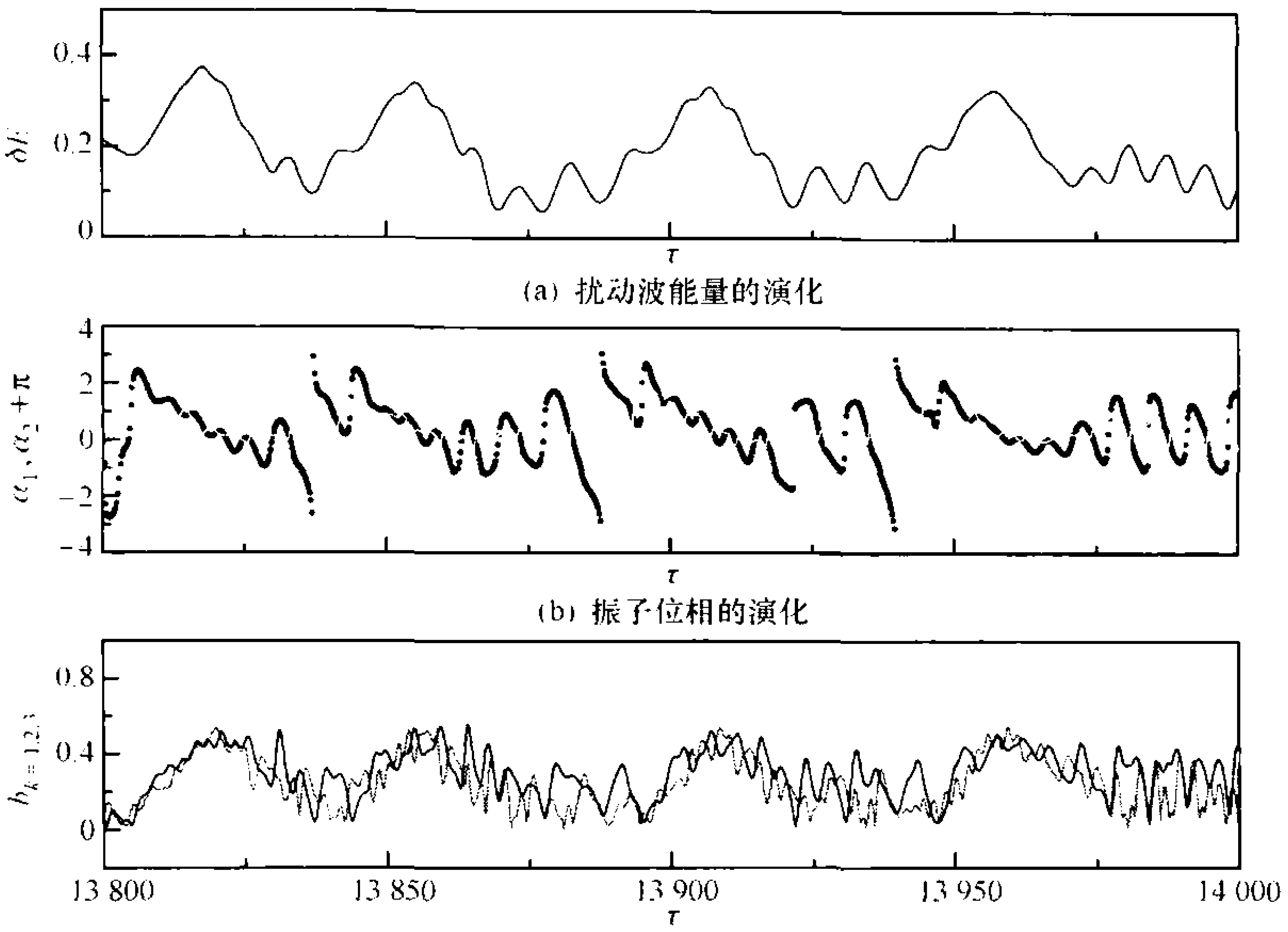
们的振幅和位相，直到下一次成功地实现非完美相同步的开态；在开态中，不仅几个扰动波振子的位相调整到了非完美的同步，它们的振幅也几乎同时达到极大.

这个现象见图 10-32（也可参见彩图 10-32），参数同图 10-30，其中图（a）为扰动波能量 $\delta E(\tau)$，图（b）扰动振子位相 $\alpha_k(\tau)(k=1,2)$ 和图（c）扰动振子振幅 $b_k(\tau)(k=1,2,3)$，其中位相已取主值. 如果单独看每一条曲线，无论是位相还是振幅，它们都显得高度无序，但放在一起观察，就会发现这些振子其实是在不断地调节它们的状态以实现瞬间的位相和振幅的同步.

第五章曾介绍了洛伦兹系统中的非完美相同步. 在图 5-18 中，两个洛伦兹振子的位相差可以在相当长的一段时间内维持在 $2\pi$ 范围内无序振荡，在突然出现位相滑移之后，很快又在新的水平上重新建立起非完美的同步. 与图 5-18 相比，在系统（7-47）中同步开态维持的时间要短得多，两次同步之间的相滑阶段却很长. 这是因为该系统有大量自由度，虽然每次实现同步的只有少数几个长波振子，却总是需要所有振子参与调节. 此外，在这个模型中，在振子位相达到同步的同时，几个振子的振幅也达到极大. 除了这些特点之外，系统（7-47）中的非完美相同步与洛伦兹系统的并无实质区别.

文[139]指出，嵌在洛伦兹吸引子中有一个鞍点，与之相关，系统有一个无穷长的特征时间尺度，这是相同步不能完美的内在动力学原因. 类比系统（7-47）的情形，嵌在强湍吸引子中也有一个鞍点，在随波坐标系中对应的本征频率等于 0. 换句话说，系统也有一个无穷长的特征时间尺度，这是造成强湍中相同步非完美的原因.

不过，鞍点的存在并不构成出现非完美相同步的充分条件，无论是洛伦兹系统




(a) 扰动波能量的演化

(b) 振子位相的演化

(c) 振子振幅的演化

图 10-32　强湍状态下扰动振子间的阵发非完美相同步
（随波坐标系，参数同图 10-30）

(5-42)还是非线性波动系统(7-47)都是如此. 在后一系统中，激变前的混沌吸引子也与鞍点共存，但此时所有振子都被束缚在相应的鞍型定态分波势阱中，如在图 10-21(a)中看到的那样，扰动分波的波峰在两个势垒之间小幅摆动，不同分波的位相差只能在很小范围内调节，在这样的条件下振子间建立起的是一种完美的泛函相同步状态；激变后相同步之所以从完美变得非完美，最长波振子由束缚变得自由这一作用不可或缺，此时它的位相 $\alpha_{k-1}(\tau)$变化可以扫过整个 $2\pi$ 范围，与其他振子间的位相差也允许在大得多的范围内调节，如此它们才有条件建立起新的集体运动方式——非完美相同步，这是几个长波模式阵发地在时间和空间上同时调整到的同步态，一种比时间上同步更高一层次的同步方式.

注意到图 10-30(b)～(d)，当其处于相同步的开态时，振子位相 $\alpha_k$ 总是处于 0 或 $\pi$ 附近，这允许我们定义函数

$$C^M(\tau) = \prod_{k=1}^{M} \cos\alpha_k(\tau) \tag{10-26}$$

来描写 $M$ 个振子位相之间的相关[236]. 图 10-33(a)是扰动波能量 $\delta E(\tau)$，图(b)和(c)是长波振子之间的位相相关$\langle |C^M(\tau)| \rangle$，尖括号表示对系统的特征周期(如驱动周期 $2\pi/\Omega$)取平均. 其中图(b)是 4 个长波振子的位相相关函数，比较图(a)和(b)可以看到，在对应 $\delta E(\tau)$那些突兀尖峰的位置上，$\langle |C^4(\tau)| \rangle$都出现了很高的峰，在

两个高峰之间，$\delta E(\tau)$曲线还出现了一些小尖峰，在相应位置上曲线$\langle|C^4(\tau)|\rangle$也有小尖峰；图(c)中是 5 个长波振子的相关函数$\langle|C^5(\tau)|\rangle$，仍可见明显的同步态尖峰，只是峰高较图(b)中的低得多，这说明非完美同步主要发生在几个长波振子之间. 一般地说，每一次同步的阵发，参与的振子数目不尽相同，当有更多振子参与时，总波能通常会冲得更高.

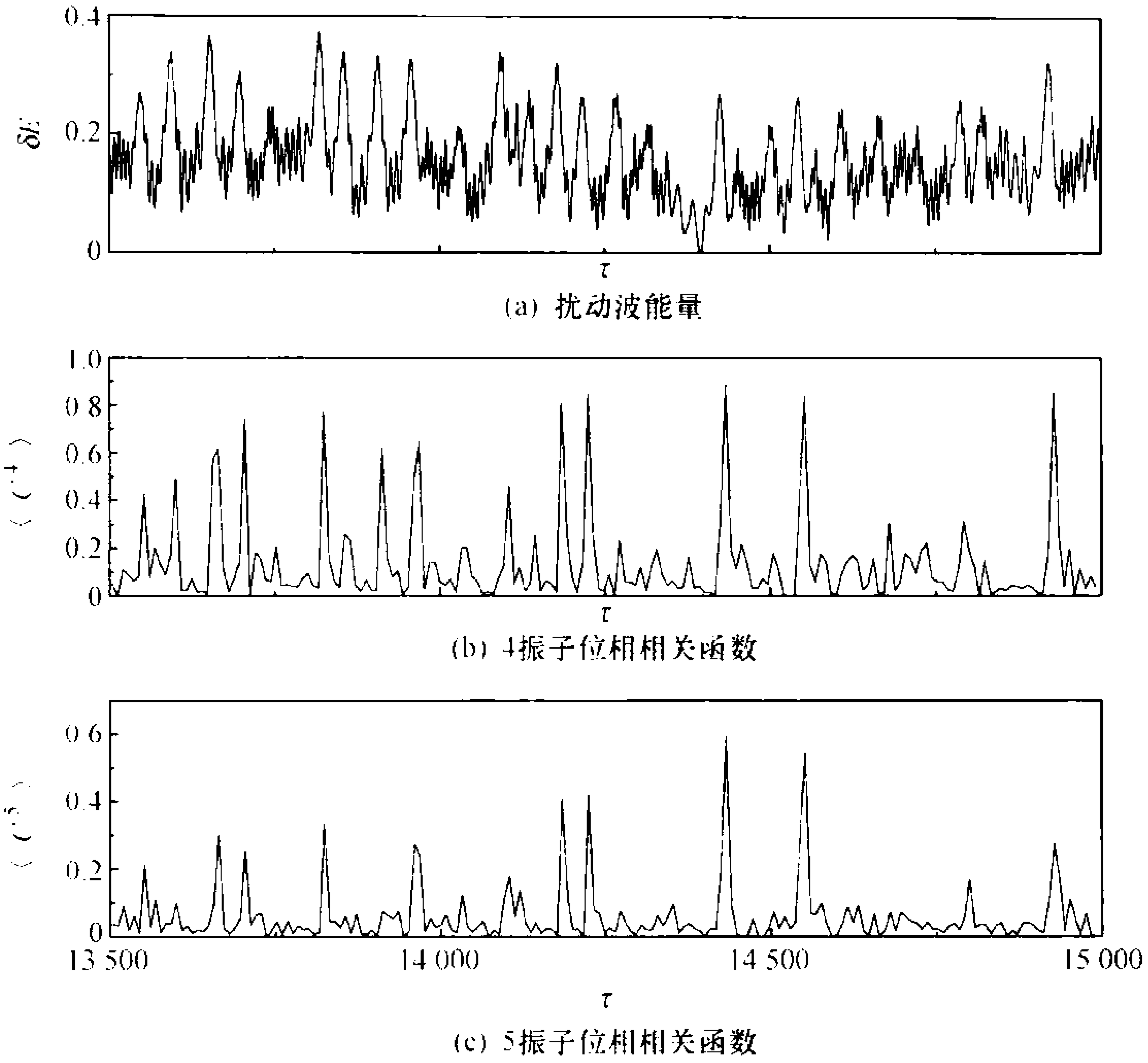



图 10-33　强湍状态下扰动波能量 $\delta E$ 和振子位相相关函数$\langle|C^M(\tau)|\rangle$随时间的演化

（随波坐标系，$\Omega=0.65$，$\varepsilon=0.22$）

激变后的阵发同步尽管不如激变前的同步态显得完美，它却能在实现位相同步的同时实现振子振幅同步地达到极大，振子的自能因此得以有效地叠加起来，如图 10-32(c)所示. 实际上，除自能 $\delta E_k^S(\tau)$外，扰动振子能量 $\delta E_k(\tau)$还包括它与定态波势阱的相互作用能 $\delta E_k^I(\tau)$，依赖于振子与定态波势阱的相对位相，相互作用能$\delta E_k^I(\tau)$的值可正可负. 如果把扰动振子看做是在势阱中运动的粒子，$\delta E_k^S(\tau)$是粒子的动能，$\delta E_k^I(\tau)$是势能，在非完美相同步的开态，参与同步的振子不仅将它们的动能几乎同时调到极大，还调节各自在势阱中的位置，使得总能量尽可能达到更高，这充分显示出非线性耦合振子系统有多么非凡的自组织能力.

在强湍中波能的尖峰看似随机地出现，实则遵循一定的统计规律. 直接从波能的时间演化 $\delta E(\tau)$寻找这个规律并不容易，因为曲线涨落太大，难以设定一个恰当

的阈值来界定进出能量爆发态的时间. 所幸相关函数 $C^M(\tau)$ 各峰值的位置与能量 $\delta E(\tau)$ 的相吻合，利用它可设定一定的阈值来判断进入和离开阵发同步态的时间，这给我们提供了一个途径来计算系统在强湍状态下的某些统计行为. 图 10-34 是用这个方法计算的同步关态持续时间为 $\tau_L$ 出现的概率 $P(\tau_L)$，参数与图 10-30 的相同，阈值设定为 0.05. 在双对数图上，数据点在很宽一个范围内呈线性变化，这表明概率 $P(\tau_L)$ 随 $\tau_L$ 改变遵循幂律，$P(\tau_L)\sim\tau_L{}^{\beta}$，图中直线是拟合结果，它给出 $\beta\approx1.34$. 计算中也设定过不同的阈值，都得到了很宽的幂律区，结果的指数 $\beta$ 略有差别.

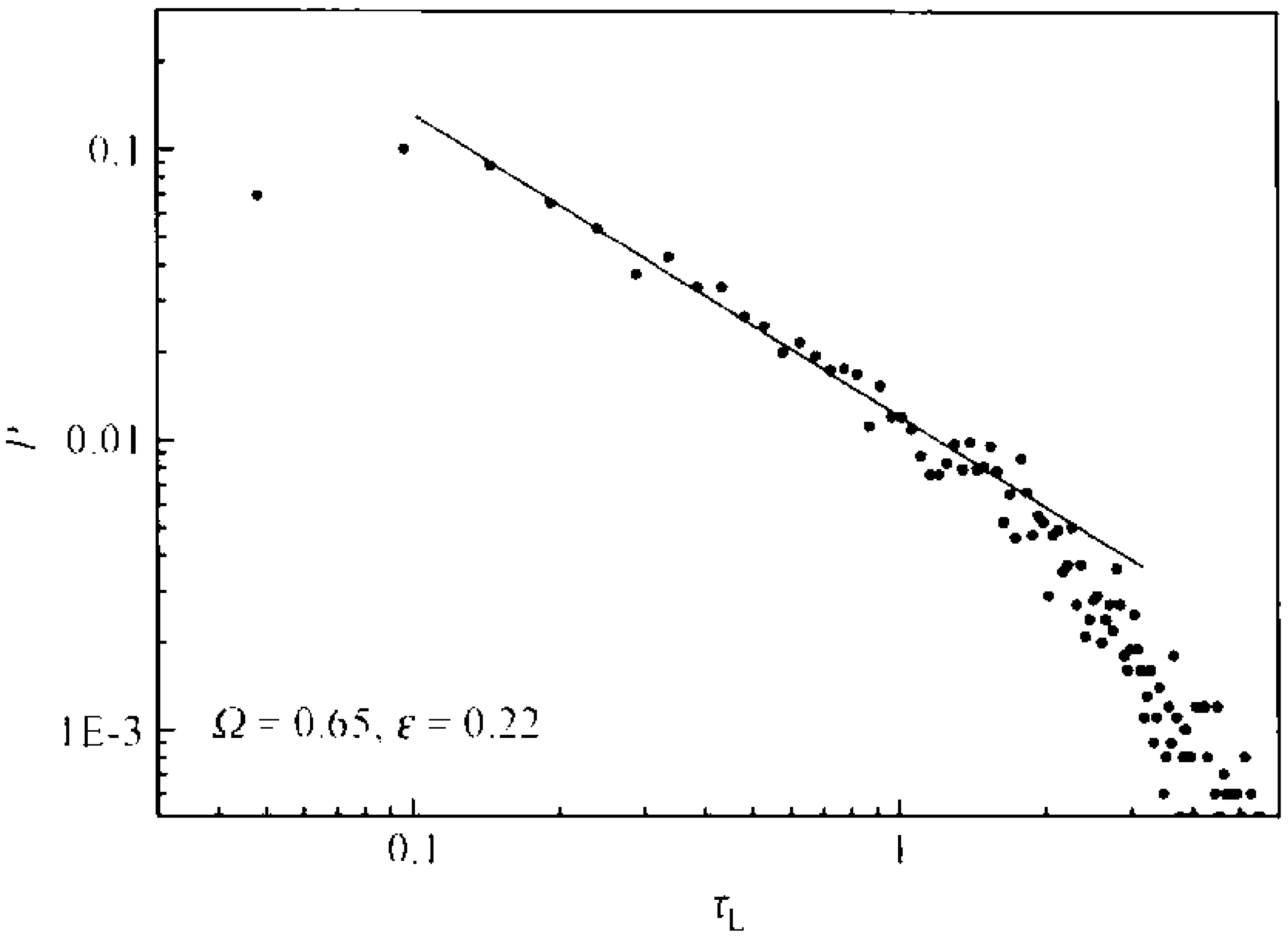



图 10-34　扰动振子非完美相同步的关态持续时间为 $\tau_L$ 出现的概率 $P(\tau_L)$
($\Omega=0.65$, $\varepsilon=0.22$)

由此可见，激变后波斑图表现出来的波碎状态，原来是一种特殊相同步态. 在激变前空间相干波动中，扰动波振子形成了泛函相同步，此时运动轨道缠绕在高维不变环上，它们的振幅一般不会同时达到极大，振子行为显得迟缓而呆滞；在激变后的强湍状态下，振子充满了活性，它们之间不时地建立起密切的合作关系，激发出其他波动状态下从未能达到的能量高度，这也许正是大自然选择湍性脑电波进行思考的原因所在吧！

## 10.4.4　鞍点轨道和混沌鞍

嵌在相空间中的鞍点，除与吸引子碰撞可引发激变外，它对常态下运动轨道的影响也不可忽视，这种影响可通过鞍点轨道实现. 节 10.2 已指出，鞍点的不稳定和稳定轨道分别对应线性扰动振子的两组常数位相值 $\{\alpha_k^{U_{1,2}}\}$ 和 $\{\alpha_k^{S_{1,2}}\}$，所以鞍点轨道对非线性波动的影响在很大程度上也与扰动波 $\delta\phi(\xi,\tau)$ 各振子在鞍型定态波势阱 $\phi_0^*(\xi)$ 中的瞬时位相 $\{\alpha_k(\tau)\}$ 有关，如果这些振子的位相恰好处于鞍点轨道对应的位相附近，同时它们的振幅又十分小，那么在这一时刻吸引子上的轨道就非常接近鞍点，它将大体上沿鞍点(稳定或不稳定)轨道运动.

图 10-35 是 $\Omega=0.65$ 激变发生的临界点前 $\varepsilon=0.17$[图(a)]和 $\varepsilon=0.19$[图(b)]时的渐近轨道，图中画的是扰动波主振子振幅的增长率 $\mathrm{d}b_{k=1}/\mathrm{d}\tau$ 随位相差 $\Delta_{k=1}\equiv\alpha_{k=1}(\tau)-\theta_{k=1}$ 的变化，图中竖直实线和虚线分别指示了位相差等于 $\alpha_{k=1}^{U_{1,2}}-\theta_{k=1}$ 和 $\alpha_{k=1}^{S_{1,2}}-\theta_{k=1}$ 的位置，即鞍点的不稳定和稳定轨道对应的位相在鞍型定态波势阱中的位置. 为方便叙述，下面我们略去"位相"二字，称实线和虚线指示的是鞍点的轨道在势阱中的位置. 由图可见，激变前振子运动被约束在两条不稳定轨道之间，吸引子的蝶形轨道正反映了鞍点的稳定和不稳定轨道的影响.

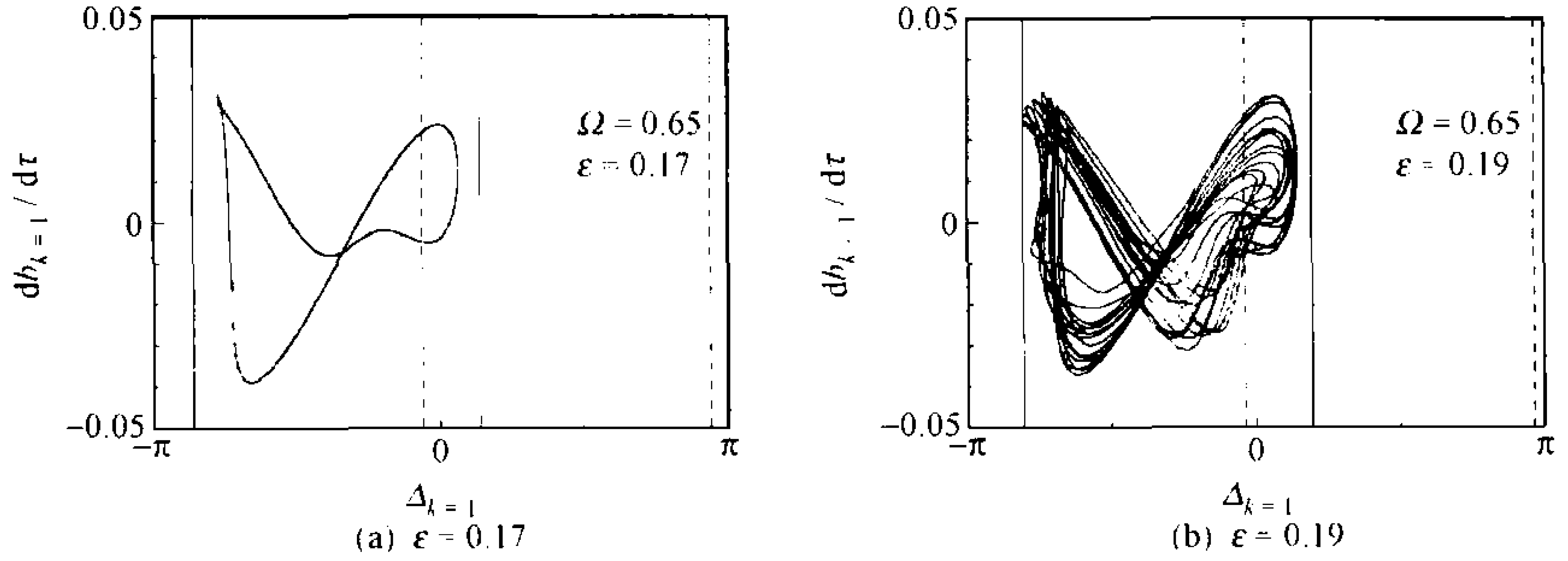



图 10-35　激变临界点前扰动波 $k=1$ 主振子的渐近运动

（随波坐标系，$\Omega=0.65$）

图 10-36 是激变后的情形，$\Omega=0.65$，$\varepsilon=0.22$，各符号与图 10-35 相同，图(a)和

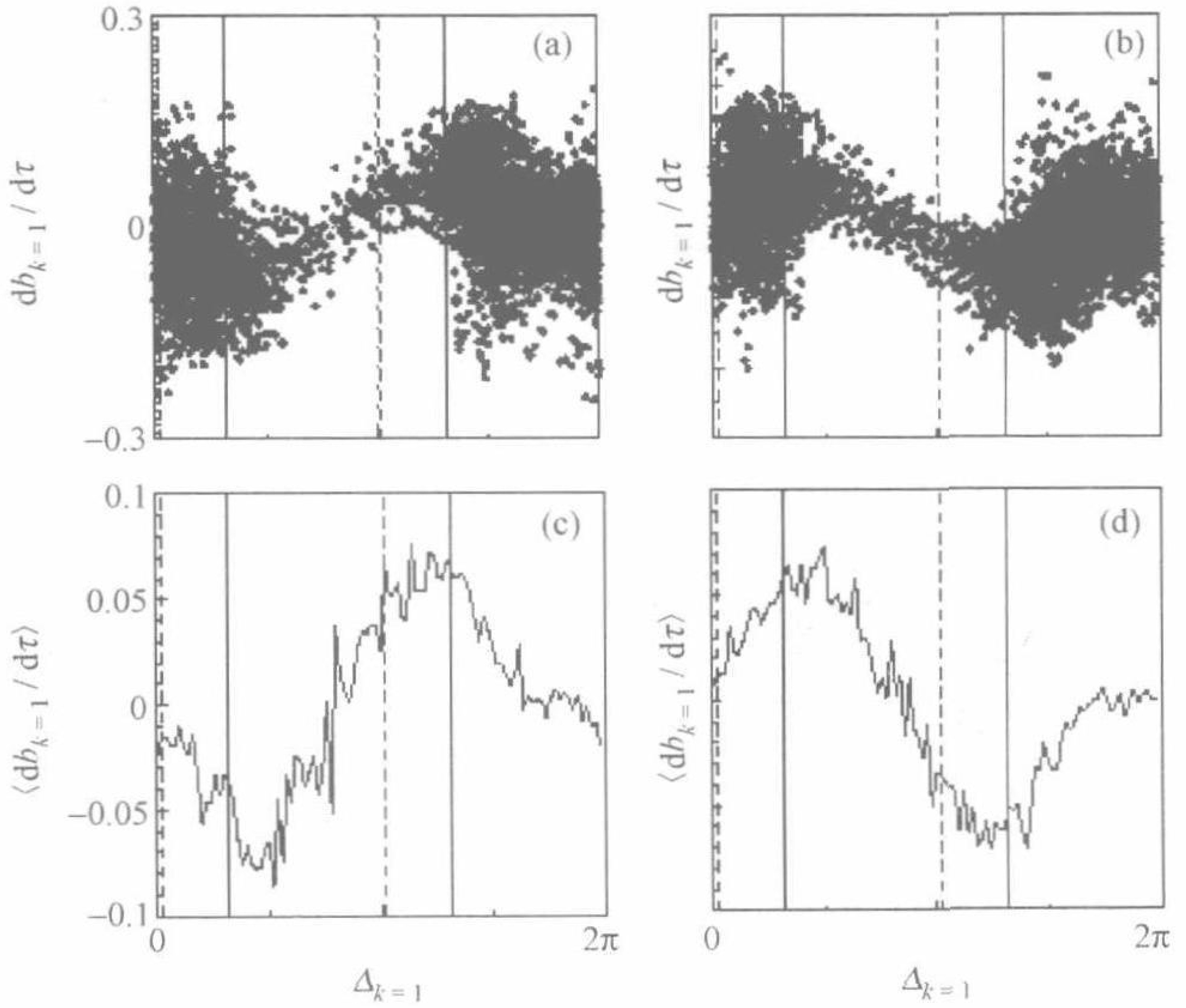



图 10-36　参数越过激变临界点后扰动波 $k=1$ 主振子的渐近运动

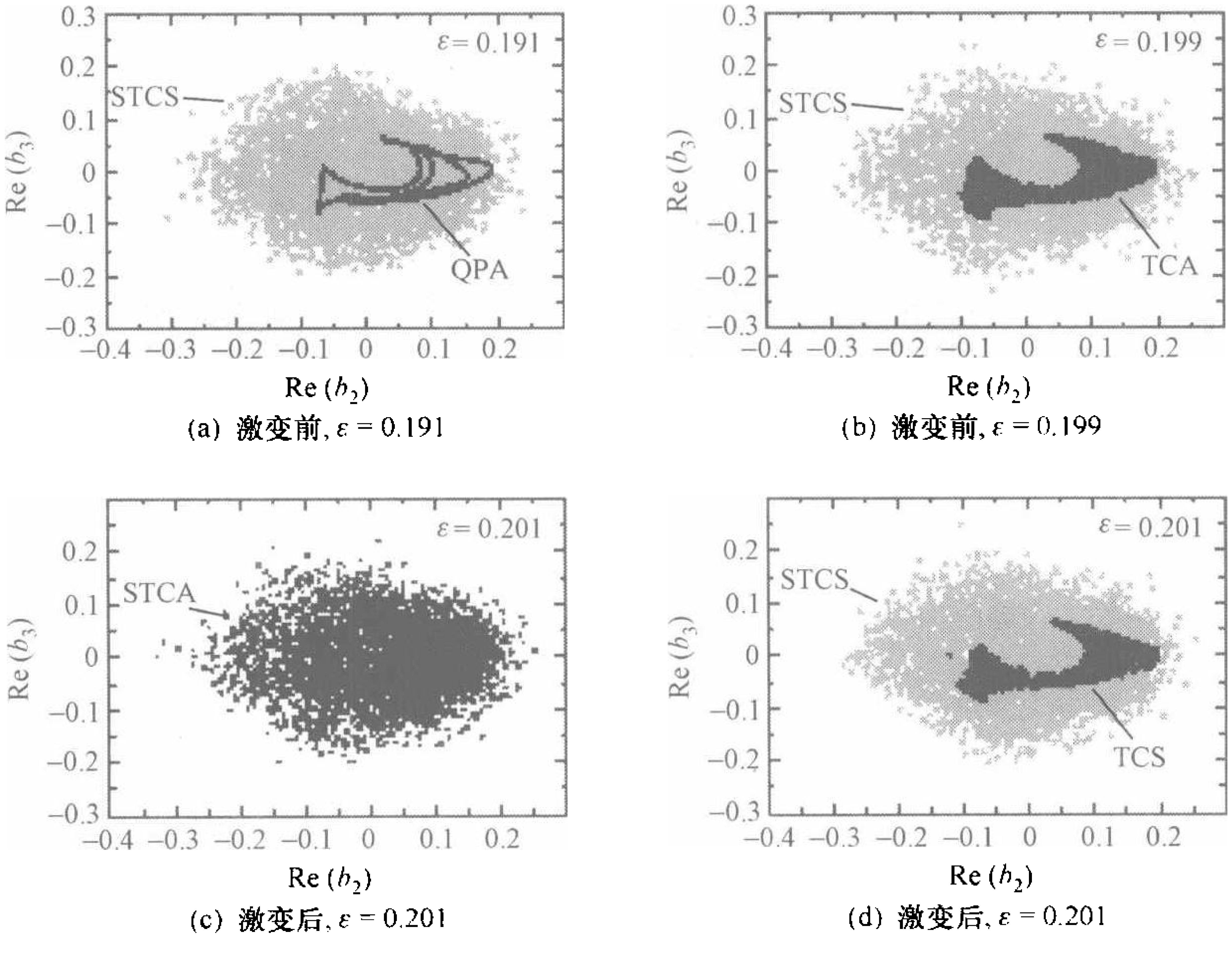
（随波坐标系，$\Omega=0.65$，$\varepsilon=0.22>\varepsilon_c$）

(b)是相继两个时段的结果，图(c)和(d)分别是图(a)和(b)的时间平均，$\langle db_{k=1}/d\tau\rangle$. 图中主振子位相 $\alpha_{k=1}(\tau)$扫过了整个 $2\pi$ 周期，且振子振幅的增长率 $db_{k=1}/d\tau$ 明显与它所处位相有关，在图(a)和(b)中各有一个位相附近轨道点十分分散，相应地，在图(c)和(d)中振幅平均增长率$\langle db_{k=1}/d\tau\rangle$分别在鞍点的一条不稳定轨道附近达到了峰值[238].

除鞍点外，嵌在相空间中的还有混沌鞍，在第五章中我们知道，混沌鞍是一个非吸引的混沌点集，这些点分别有不稳定和稳定轨道，因此混沌鞍是不稳定和稳定轨道的交集.

采用数值方法可以寻找在不同运动状态下的混沌鞍，如文[153]用 Sprinkler 方法找到了非线性漂移波系统(7-47)的混沌鞍，为此需要在相空间中预先设定一个区域，然后追踪某个长的暂态，直到轨道逃离这个区域. 文章的主要结果是，发现激变前在空间相干吸引子中嵌入的是一个时空混沌鞍，而在激变后的时空混沌吸引子中嵌入的是两个混沌鞍：时间混沌鞍和时空混沌鞍.

图 10-37 给出了一个实例，其中 $\Omega=0.65$，$\varepsilon=0.191$[图(a)]和 $\varepsilon=0.199$[图(b)]是激变前的情形，图中 $b_k$ 是在实验坐标系中波动解 $\phi(x,t)$的第 $k$ 个复模式，黑色部分分别表示准周期吸引子(QPA)和时间混沌吸引子(TCA)，灰色部分表示嵌在相空间中的混沌鞍，它们都是时空混沌鞍(STCS)；图(c)和(d)中，$\varepsilon=0.201$




(a) 激变前，$\varepsilon=0.191$　　(b) 激变前，$\varepsilon=0.199$

(c) 激变后，$\varepsilon=0.201$　　(d) 激变后，$\varepsilon=0.201$

图 10-37　波动 $\phi(x,t)$在相空间中的吸引子和混沌鞍($\Omega=0.65$)
(引自文[153])

是激变后的状态，其中图(c)给出时空混沌吸引子(STCA)，图(d)给出嵌在相空间中的混沌鞍，它们有 2 个，黑色的是时间混沌鞍(TCS)，灰色的是时空混沌鞍(STCS). 文章指出，激变前在 STCS 上的动力学十分类似于激变后在 STCA 上的动力学，而激变后在 STCA 上的动力学是这样的：当轨道在 TCS 附近时，运动基本上由 TCS 控制，表现为时间混沌、空间相干的运动，一旦轨道跳出 TCS 区域进入周围的 STCS，轨道就基本上由 STCS 控制，表现为时空混沌运动，这使得激变后的运动表现出阵发的特点.

# 结　束　语

《从孤立波到湍流——非线性波的动力学》这一书名隐含了笔者对非线性波形形色色时空斑图成因的理解——从动力学的观点来看,它们都是非线性系统自组织的结果.在依赖于时间和空间的系统中,最完美的自组织就是类似于稳定的孤立波那样的以常速运动的不变空间结构;在随波坐标系中它是相空间中的一个不动点,这个不动点经过一系列局域分岔和全局分岔最终才形成了充分发展的湍流.这一认识是以非线性动力学作为理论基础,在分析了一些根据实际物理问题建立的理论模型后得出的.

本书关于某些湍流现象产生的动力学机制的分析,很好地解释了数值实验中观察到的现象.当然,湍流有不同的表现,预料机制不尽相同,且现有的结果也尚待其他模型的检验.尽管有这些缺憾,在研究过程中所获得的有关非线性波的动力学图像仍可能不失普遍意义.有两点基本认识:一是非线性波是一种场的自组织现象,它的自组织行为发生在不同空间尺度的场量之间;二是讨论非线性波的动力学时有可能要面对不止一个甚至多到无穷个惯性坐标系,因为非线性波动系统的不动点常常存在于运动坐标系中,而坐标系的运动速度又可能随某个(些)参数改变.这一点与讨论一般时序系统有很大不同,后者只在实验室坐标系中观察问题,不需要考虑与参数变化有关的坐标系移动和多普勒效应等问题.

除了这两点基本认识之外,其他有一些结果也可供相关研究参考.例如,如果非线性波存在非平凡的不动点,那么这个不动点是随波坐标系中的一个不变空间结构,特别是像鞍型定态波解那样的不稳定空间结构,虽然一般不能在物理上实现,却还有可能以类似势阱的形式影响扰动波的行为;再如,对于一类非线性波动方程,在对它们的非平凡不动点作微扰线性化的基础上,可建立起波动的非线性色散关系,对于给定的定态波解,这个关系是明确的、唯一的;还有,讨论非线性波的运动,不能只孤立地分析轨道流形因局域分岔出现的拓扑变化,还要考虑在相空间中共存的不稳定不动点和不稳定周期轨道等的影响,因为一些在常态下观察不到的特殊波动解(如鞍型定态波解),其形状的短暂实现甚至有可能引起可观察的波动状态突然而剧烈的改变,等等.这些结果都带有波动系统的特点,又完全符合非线性系统运动的一般规律.完全有理由相信,时序系统非线性动力学理论所揭示出来的各种运动规律,都会以独具特色的形式在非线性波动系统中表现出来.

本书第八章中提出的关于定态波解的稳定性分析方法适用于一大类非线性波

动方程，这些方程关于时间的导数是一阶的，且存在非平凡的定态波解. 对于像 sine-Gordon 方程那样有二阶时间导数的以及找不到非平凡不动点的非线性波动方程，如何作类似的稳定性分析还是个有待解决的问题. 至于涡旋、涡旋丝等一些极为重要的波动现象，它们需要空间二维和二维以上的波动方程来描写，更超出了本书的视野.

还有一点需要提到的是，在讨论向湍流转变的动力学时，我们没有给出 Lyapunov 指数分析的结果，事实上，也很少有文章报导对波动系统李指数的计算. 考虑到在随波坐标系中非线性波可以用一组耦合的常微分方程描写，预料其李指数的计算原则上也应该和时序系统的一致. 不过，湍流这一术语实际上涵盖了一些不同的动力学状态，仅以空间相干性的破坏为例，在第九章和第十章中就已发现，它可由环形拓扑奇点引起，也可能在混沌吸引子与鞍点碰撞后发生，两种诱因所导致的运动状态在动力学上完全不同；更一般地说，在固体、液晶等系统中还有所谓的缺陷湍流、相湍流等不同的时空无序状态，用李指数能不能区分以及如何区分这些状态，仍是需要探讨的问题.

# 参 考 文 献


[1] Drazin P G and Johnson R S. Solitons: An Introduction. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.

[2] Infeld E and Rowlands G. Nonlinear Waves, Solitons and Chaos (2nd edition). Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

[3] Frisch U. Turbulence. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

[4] Kraichnan R. J. Fluid Mech, 1959, 5: 497.

[5] Horton W and Ichikawa Y H. Chaos and Structures in Nonlinear Plasmas. Singapore: World Scientific, 1996.

[6] Panel on the Physics of Plasmas and Fluids. Physics Through the 1990s: Plasmas and Fluids. Washington, DC: National Academy Press, 1986(中译本:〔美〕等离子体和流体物理学专门小组. 90 年代物理学:等离子体和流体. 霍裕平等译. 北京:科学出版社,1996).

[7] Boyd T J M and Sanderson J J. Plasma Dynamics. London: Nelson, 1969.(中译本:等离子体动力学. 戴世强,陆志云译. 北京:科学出版社,1977).

[8] Haken H. Synergetics. Berlin: Springer-Verlag, 1978.

[9] Haken H. Advanced Synergetics. Berlin: Springer-Verlag, 1983.

[10] Ott E. Chaos in Dynamic Systems. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.

[11] Vallis K. From laminar to turbulence in Introduction to Nonlinear Physics. New York: Springer-Verlag, 1997.

[12] Chen F F. Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion (2nd edition). New York: Plenum Press, 1984.

[13] Leslie D C. Developments in the Theory of Turbulence. Oxford: Clarendon, 1973.

[14] Chen W and Mills D L. Phys. Rev. Lett., 1987, 58: 160.

[15] Lam L. Introduction to Nonlinear Physics. New York: Springer-Verlag, 1996.

[16] Kadomtsev B B. 等离子体中的集体现象. 刘成海译. 北京:原子能出版社,1983.

[17] 曾谨言. 量子力学(第 3 版). 北京:科学出版社,2000.

[18] Nicholson D R. Introduction to Plasma Theory. New York: John Wiley and Sons, 1983.

[19] 杜世刚. 等离子体物理. 北京:原子能出版社,1998.

[20] Remoissenet M. Wave called Solitons: An Introduction. Cambridge: Cambridge University Press, 1988.

[21] 陈运泰,杨智娴,许力生. 物理,2005, 34(12): 864.

[22] Lax P D. Comm. Pure Applied Math., 1968, 21: 467;1975, 28: 141.

[23] Kruskal M D, Miura R M and Zabusky N J. J. Math. Phys., 1970, 11: 952.

[24] Benjamin T B, Bona J L and Mahony J J. Math. and Phys. Sci., 1972, 272: 47.

[25] Lin Z, Hahm T S, Lee W W, Tang W M and White R R. Science, 1998, 281: 1835.

[26] Smolyakov A I, Diamond P H and Malkov M. Phys. Rev. Lett., 2000, 84: 491.

[27] Dodd R K et al. Solitons and Nonlinear Wave Equations. London: Academic Press, 1982.
[28] Charney J G. Geophys. Public. Kosjones Nors. Videnshap.-Akad. Oslo, 1948, 17: 3.
[29] Surko C M and Slusher R E. Phys. Rev. Lett., 1976, 37: 1747.
[30] Horton W and Hasegawa A. Chaos, 1994, 4: 227.
[31] Mazzucato E. Phys. Rev. Lett., 1976, 36: 792.
[32] Horton W. Phys. Rep., 1990, 192: 1.
[33] Horton W. Phys. Rev. Lett., 1976, 37: 1269.
[34] Hasegawa A and Mima K. Phys. Rev. Lett., 1977, 39: 205.
[35] Hasegawa A and Mima K. Phys. Fluids, 1978, 21: 87.
[36] Hasegawa A, Maclennan C G and Kodama Y. Phys. Fluids, 1979, 22: 2122.
[37] Mazzucato E. Phys. Fluids, 1978, 21: 1063.
[38] Klinger T, Latten A, Piel A, Bonhomme G, Pierre T and Dudok de Wit T. Phys. Rev. Lett., 1997, 79: 3913.
[39] Oraevskii V, Tasso H and Wobig H. Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fusion Res. //Proc. of the 3rd International Conference, IAEA, Vienna 1969, Novosibirask 1968, Ⅰ: 671.
[40] Meiss J D and Horton W. Phys. Rev. Lett., 1982, 48: 1362.
[41] Hasegawa A and Wakatani M. Phys. Rev. Lett., 1983, 50: 682.
[42] Biskamp D and Zeiler A. Phys. Rev. Lett., 1995, 74: 706.
[43] Mima K, Hasegawa A. Phys. Fluids, 1978, 21: 81.
[44] Makino M, Kamimura T, Taniuti T. J. Phys. Soc. Jpn., 1981, 50: 954.
[45] Makino M, Kamimura T, Taniuti T. J. Phys. Soc. Jpn., 1981, 50: 980.
[46] Shukla P K, Yu M Y, Rahman H V and Spatschek K H. Phys. Rep. C, 1984, 105: 227.
[47] Chelton D B and Schlax M G. Science, 1996, 272: 234.
[48] Rossby C G et al. J. Mar. Res., 1939, 2: 38.
[49] Rossby C G. QJR Meteorol Soc., 1940, 66: 66.
[50] Nezlin M V, Chemikov B P, Rylov A V and Titishov K B. Chaos, 1994, 4: 187.
[51] Nezlin M V. Chaos, 1994, 4: 109.
[52] McDonald N R. Phil. Trans. R. Soc. Lond., 1999, A357: 3427.
[53] Nezlin M V. Chaos, 1996, 6: 309.
[54] 于敏. 核聚变,1980,1: 1.
[55] Kruer W L. The Physics of Laser Plasma Interaction. Redwood City: Addison-Wesley Pub. Comp. Inc., 1988.
[56] Sagdeev R Z, Shapiro V D and Shevchenko V I. Physics of Laser Plasma. Amsterdam: Elsevier, 1991.
[57] Rosenbluth M N. Physics of Laser Plasma. Amsterdam: Elsevier, 1991.
[58] Boyd T J M and Sanderson J J. The Physics of Plasmas. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
[59] Baldis H A, Campbell E M and Kruer W L. Phys. of Laser Plasma. Amsterdam: North-

Holland, 1991.
[60] Kaw P K, Schmidt G and Wilcox T. Phys. Fluids. 1973, 16: 1522.
[61] Valeo E J and Kruer W L. Phys. Rev. Lett., 1974, 33: 750.
[62] Kim H C, Stenzel R L and Wong A Y. Phys. Rev. Lett., 1974, 33: 886.
[63] Zakharov V E. Sov. Phys. JETP, 1972, 35: 908.
[64] 李晓卿. 湍动等离子体物理. 北京：北京大学出版社，1987.
[65] Hasegawa A and Kodama Y. Solitons in Optical Communications. Oxford: Clarendon Press, 1995.
[66] 周衍柏. 理论力学教程. 北京：高等教育出版社，2004.
[67] 王竹溪. 统计物理学导论. 北京：高等教育出版社，1956.
[68] Berry M V. Regular and Irregular Motion in Topics in Nonlinear Dynamics. New York: American Inst. of Phys., 1978.
[69] 冯康，秦孟兆. 哈密顿系统的辛几何算法. 浙江：浙江科学技术出版社，2003.
[70] Arnold V I. Mathematical Methods of Classical Mechanics (2nd edition). New York: Springer-Verlag, 1989.
[71] Sagdeev R Z, Usikov D A and Zaslavsky G M. Nonlinear Physics, From the Pendulum to Turbulence and Chaos. New York: Harwood Acad. Pub., 1988.
[72] Helleman R H G. Self-generated Chaotic Behavior in Nonlinear Mechanics in Fundamental Problems in Statistical Mechanics. Vol. 5. Amsterdam: North-Holland, 1980.
[73] Kadomtsev B B. Tokamak Plasma: A Complex Physical System. London: IOP publishing, 1992.
[74] Boozer A H. Phys. Fluids, 1983, 26: 1288.
[75] Guckenheimer J and Holmes P. Nonlinear Oscillators, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. New York: Springer Verlag, 1983.
[76] Hilborn R C. Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers. New York: Oxford University Press, 1994.
[77] Birkhoff G D. Acta Mathematica, 1927, 50: 359.
[78] Stewart I. Does God Play Dice?. Cambridge: Basil Blackwell, 1989.
[79] Cardozo N J L, Schüler F C, Chu C C, Pijper C J, Lok J and Oomers A A M. Phys. Rev. Lett., 1994, 73: 256.
[80] Lorenz E N. J. Atmos. Sci., 1963, 20: 130.
[81] Feigenbaum M. J. Stat. Phys., 1978, 19: 25.
[82] Feigenbaum M. J. Stat. Phys., 1979, 21: 669.
[83] Feigenbaum M. Comm. Math. Phys., 1980, 77: 65.
[84] Feigenbaum M. Los Alamos Science, 1980, 1: 4.
[85] Ruelle D and Takens F. Comm. Math. Phys., 1971, 20: 167.
[86] Newhouse S E, Ruelle D and Takens R. Comm. Math. Phys., 1978, 64: 35.
[87] May R M. Nature, 1976, 261: 459.

[88] Swinney H L and Gollub J P. Phys. Today, 1978, 31: 41.
[89] Yeh W J and Kao Y H. Phys. Rev. Lett., 1982, 49: 1888.
[90] Libchaber A, Fauve S and Laroche C. Physica, 1983, D7: 73.
[91] Landau L. Akad. Nauk. Doklady, 1944, 44: 339.
[92] Eckmann J-P. Rev. Mod. Phys., 1981, 53: 643.
[93] Chu J H and Lin I. Phys. Rev., 1989, A39: 233.
[94] Cumming A and Linsay P S. Phys. Rev. Lett., 1988, 60: 2719.
[95] Walden R W, Kolodner P, Passner A and Surko C M. Phys. Rev. Lett., 1984, 53: 242.
[96] Arnold V I. Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations. New York: Springer, 1983.
[97] Stavans J, Heslot F and Libchaber A. Phys. Rev. Lett., 1985, 55: 596.
[98] Jensen M H, Bak P and Bohr T. Phys. Rev. Lett., 1983, 50: 1637.
[99] Pomeau Y and Manneville P. Comm. Math. Phys., 1980, 74: 189.
[100] Jeffries C and Perez J. Phys. Rev., 1982, A26: 2117.
[101] Bruno R, Carbone V, Veltri P, Pietropaolo E and Bavassano B. Planetary and Space Science, 2001, 49: 1201.
[102] Platt N, Spiegle E A and Tresser C. Phys. Rev. Lett., 1993, 70: 279.
[103] Hammer P W, Platt N, Hammel S M, Heagy J F and Lee B D. Phys. Rev. Lett., 1994, 73: 1095.
[104] Huang J-Y and Kim J-J. Phys. Rev., 1987, A36: 1495.
[105] Sacher J, Elsässer W and Göbel E. Phys. Rev. Lett., 1989, 63: 2224.
[106] Chian A C-L, Borotto F A and Gonzalez W D. Astrophysical J., 1998, 505: 993.
[107] Dubois M, Rubio M A and Bergé P. Phys. Rev. Lett., 1983, 51: 1446.
[108] Tang D Y, Pujol J and Weiss C O. Phys. Rev., 1991, A44: R35.
[109] Sun H, Ma L and Wang L. Phys. Rev., 1995, E51: 3475.
[110] Bergé P, Dubois M, Manneville M and Poméau P. J. Phys. (Paris) Lett., 1980, 41: L341.
[111] Bergé P. Order within Chaos. New York: Wiley, 1986.
[112] Cheung P Y, Donovan S and Wong A Y. Phys. Rev. Lett., 1988, 61: 1360.
[113] Grebogi C, Ott E and Yorke J A. Phys. Rev. Lett., 1982, 48: 1507.
[114] Grebogi C, Ott E and Yorke J A. Physica, 1983, 7D: 181.
[115] Rollins R W and Hunt E R. Phys. Rev., 1984, A29: 3327.
[116] Grebogi C, Ott E, Romeiras F and Yorke J. Phys. Rev. Lett., 1983, 51: 339; Physica, 1985, D15: 354.
[117] Grebogi C, Ott E and Yorke J A. Phys. Rev. Lett., 1986, 56: 1011.
[118] Grebogi C, Ott E and Yorke J A. Phys. Rev. Lett., 1986, 57: 1284.
[119] Ditto W L, et al. Phys. Rev. Lett., 1989, 63: 923.
[120] Sommerer J C, Ott E and Grebogi C. Phys. Rev., 1991, A43: 1754.

[121] Sommerer J C, Ditto W L, Grebogi C, Ott E and Spano M L. Phys. Rev. Lett., 1991, 66: 1947.
[122] Meca E, Mercader I, Batiste O and Ramfrez-Piscina L. Phys. Rev. Lett., 2004, 92: 234501.
[123] Dangoisse D, Glorieux P and Hennequin D. Phys. Rev. Lett., 1986, 57: 2657.
[124] Grebogi C, Ott E, Romeiras F and Yorke J A. Phys. Rev., 1987, A36: 5365.
[125] Rempel E L. Chian A C-L. Phys. Rev. E, 2005, 71: 016203.
[126] Szabó K G, Lai Y-C, Tél T and Grebogi C. Phys. Rev., 2000, E61: 5019.
[127] Chian A C-L, Rempel E L, Macau E E, Rosa R R and Christiansen F. Phys. Rev., 2002, E65: 035203.
[128] Stewart H B, Ueda Y and Grebogi C. Phys. Rev. Lett., 1995, 75: 2478.
[129] Fujisaka H and Yamada T. Prog. Theor. Phys., 1983, 69: 32.
[130] Boccaletti S, et al. Phys. Rep., 2002, 366: 1.
[131] Boccaletti S and Valladares D L. Phys. Rev., 2000, E62: 7497.
[132] Pecora L M and Carroll T L. Phys. Rev. Lett., 1990, 64: 821.
[133] Rosenblum M G, Pikovsky A S and Kurths J. Phys. Rev. Lett., 1996, 76: 1804.
[134] Rosa E R, Ott E and Hess M H. Phys. Rev. Lett., 1998, 80: 1642.
[135] Rosenblum M G, Pikovsky A S and Kurths J. Phys. Rev. Lett., 1997, 78: 4193.
[136] Rulkov N F, Sushchik M M, Tsimring L S and Abarbanel H D I. Phys. Rev., 1995, E51: 980.
[137] Kocarev L and Parlitz U. Phys. Rev. Lett., 1996, 76: 1816.
[138] Zaks M A, Park E-H, Rosenblum M G and Kurths J. Phys. Rev. Lett., 1999, 82: 4228.
[139] Park E-H, Zaks M A and Kurths J. Phys. Rev., 1999, E60: 6627.
[140] Braun R and Feudel F. Phys. Rev., 1996, E53: 6562.
[141] Lai Y-C and Winslow R L. Phys. Rev. Lett., 1995, 74: 5208.
[142] Sweet D and Ott E. Physica, 2000, D139: 1.
[143] Kraut S and Feudel U. Phys. Rev., 2002, E66: 015207(R).
[144] Hénon M. Comm. Math. Phys., 1976, 50: 69.
[145] Mandelbrot B B. The Fractal Geometry of Nature. San Francisco: Freeman, 1982.
[146] Farmer J D, Ott E and Jorke J A. Physica, 1983, 7D: 153.
[147] Shibata H and Ishizaki R. Physica, 1999, A269: 314.
[148] Bleher S, Ott E and Grebogi C. Phys. Rev. Lett., 1989, 63: 919.
[149] Jalabert R A, Baranger H U and Stone A D. Phys. Rev. Lett., 1990, 65: 2442.
[150] Macau Elbert E N and Caldas Iberê L. Phys. Rev., 2002, E65: 026215.
[151] Ziemniak E M, Jung C and Tél T. Physica, 1994, D79: 424.
[152] Rempel E L and Chian A C-L. Phys. Lett., 2003, A319: 104.
[153] Rempel E L and Chian A C-L. Phys. Rev. Lett., 2007, 98: 014101.
[154] Toroczkai Z, Károlyi G, Péntek Á, Tél T and Grebogi C. Phys. Rev. Lett., 1998, 80: 500.
[155] Tsu G, Ott E and Grebogi C. Phys. Lett., 1988, A127: 199.

[156] Kantz H and Grassberger P. Physica, 1985, 17D: 75.

[157] Nusse H E and Yorke J A. Physica, 1989, D36: 137.

[158] Bishop A R, Fesser K, Lomdahl P S, Kerr W C, Williums M B and Trullinger S E. Phys. Rev. Lett., 1983, 50: 1095.

[159] Chaté H and Manneville P. Phys. Rev. Lett., 1987, 58: 112.

[160] Xi Hao-wen, Li Xiao-jun and Gunton J D. Phys. Rev. Lett., 1997, 78: 1046.

[161] Cross M C and Hohenberg P C. Rev. Mod. Phys., 1993, 65: 851.

[162] Arecchi F T, Giacomelli G, Ramazza P L and Residori S. Phys. Rev. Lett., 1990, 65: 2531.

[163] Rehberg I, Rasenant S and Steinberg V. Phys. Rev. Lett., 1989, 62: 756.

[164] Shraiman B I. Phys. Rev. Lett., 1986, 57: 325.

[165] Nicholson D R. Report of U. of Iowa, 1982: 82.

[166] She Z S, Jackson E and Orszag S A. Nature, 1990, 344: 226.

[167] Vincent A and Meneguzzi M. J. Fluid Mech, 1991, 225: 1.

[168] Donnelly R J and Swanson C E. J. Fluid Mech., 1986, 173: 387.

[169] Schwarz K W. Phys. Rev., 1988, B38: 2398.

[170] Stenflo J O. Solar Phys., 1973, 32: 41.

[171] Stenflo J O. Solar Magnetic Fields. Dordrecht: Kluwer, 1994.

[172] Terry P and Horton W. Phys. Rev. Lett., 1982, 25: 491.

[173] 贺凯芬. 物理学报, 1986, 35: 1330.

[174] 贺凯芬. 物理学报, 1987, 36: 1451.

[175] Biskamp D and He Kaifen. Phys. Fluids, 1985, 28: 2172.

[176] Schäfer A, Rosenblum M G, Abel H-H and Kurths J. Phys. Rev., 1999, E60: 857.

[177] Rzeczinsky S, Janson N B, Balanov A G and McCintock P V E. Phys. Rev., 2002, E66: 051909.

[178] Tass P, Rosenblum M G, Weule J, Kurths J, Pikovsky A, Volkmann J, Schnitzler A and Freund H J. Phys. Rev. Lett., 1998, 81: 3291.

[179] Swinney H L. Physica, 1983, D7: 3.

[180] Manniville P. Dissipative Structures and Weak Turbulence. San Diego: Academic Press, 1990.

[181] Grulke O and Klinger T. New J. Phys., 2002, 4: 67-1.

[182] Buzug T and Pfister G. Physica, 1992, D58: 127.

[183] Lopes S R and Rizzato F B. Phys. Rev., 1999, E60: 5375.

[184] Bak P, Tang C, Wiesenfeld K. Phys. Rev. Lett., 1987, 59: 381.

[185] private communication.

[186] Mills D L and Trullinger S E. Phys. Rev., 1987, B36: 947.

[187] Kivshar Y S. Phys. Rev. Lett., 1993, 70: 3055.

[188] Christodoulides D N and Joseph R I. Phys. Rev. Lett., 1989, 62: 1746.

[189] de Sterke C M and Sipe J E. Phys. Rev., 1988, A38: 5149.

[190] Taniuti T and Wei Ch. J. Phys. Soc. Jap., 1968, 24: 941.

[191] 贺凯芬. 物理学报，1983，32：954.

[192] Lee R and Lampe M. Phys. Rev. Lett.，1973，31：1390.

[193] Montgomery D and Liu C S. Phys. Fluids，1979，22：866.

[194] Abdulloev Kh O，Bogolubsky I L and Makhankov V G. Phys. Lett.，1976，A56：427.

[195] Marchant T R. Proc. R. Soc. Lond.，2000，A456：433.

[196] Ablowitz M J，Ramani A and Segur H. Lett. Nuovo Cim.，1978，23：333.

[197] Ablowitz M J，Ramani A and Segur H. J. Math. Phys.，1980，21：715.

[198] McLeod J B and Olver P J. SIAM J. Math. Anal.，1983，14：488.

[199] Weiss J，Tabor M and Carnevale G. J. Math. Phys.，1983，24：522.

[200] He Kaifen and Salat A. Plasma Phys. and Contr. Fusion，1991，33：869.

[201] He Kaifen and Hu Gang. Phys. Lett.，1992，A169：341.

[202] He Kaifen and Salat A. Phys. Lett.，1988，A132：175.

[203] He Kaifen and Salat A. Plasma Phys. and Contr. Fusion，1989，31：123.

[204] Zhou L and He Kaifen. Phys. Lett.，1998，A241：159.

[205] Orszag S. Introduction to the Kraichnan Theory of Turbulence in Dynamics of Fluids and Plasmas. New York：Academic，1966.

[206] Salat A and He Kaifen. IPP report，1989，6：280.

[207] Carmichael H J，Snapp R R and Schieve W C. Phys. Rev.，1982，A26：3408.

[208] Nakatsuka H，Asaka S，Itoh H，Ikeda K and Matsuoka M M. Phys. Rev. Lett.，1983，50：109.

[209] Winful H G and Marburger J H. Applied Phys. Lett.，1980，36：613.

[210] Winful H G. Phys. Rev. Lett.，1982，49：1179.

[211] Marmillot J. J. Chem. Phys.，1991，95：1206.

[212] Rudroff S and Rehberg I. Phys. Rev.，1997，E55：2742.

[213] Chern C-S and Lin I. Phys. Rev.，1991，A43：1994.

[214] Foss J，Longtin A，Mensour B and Milton J. Phys. Rev. Lett.，1996，76：708.

[215] Parlitz U and Lauterborn W. Phys. Lett.，1985，A107：351.

[216] Moon F C and Holmes P J. J. Sound Vib.，1979，65：275.

[217] Boyd R W. Nonlinear Optics. New York：Academic Press，Elsevier Science，2003.

[218] Murray J D. Mathematical Biology. Berlin：Spriner-Verlag，1983.

[219] He Kaifen. Inter. J. of Modern Phys，2004，B18：1805.

[220] He Kaifen and Hu Gang. Phys. Lett.，1994，A190：38.

[221] Nakamura K and Thomas H. Phys. Rev. Lett.，1988，61：247.

[222] Nakamura K. Quantum Chaos. New York：Cambridge University Press，1993.

[223] Takami T and Hasegawa H. Phys. Rev. Lett.，1992，68：419.

[224] Stöckmann H-J. Quantum Chaos：An Introduction. UK：Cambridge University Press，1999(中译本:量子混沌导论. 北京：世界图书出版社,2003).

[225] McDonald S W and Kaufman A N. Phys. Rev.，1988，A37：3067.

[226] He Kaifen. Phys. Lett., 1995, A202: 369.
[227] Cherry T M. Trans. Cambridge Philos. Soc., 1925, 23: 199.
[228] Pfirsch D. Max-Planck Institute report IPP, 1990, 6: 293;1991, 6: 299.
[229] He Kaifen. Chin. Phys. Lett., 2004, 21: 439.
[230] He Kaifen. Phys. Rev. Lett., 2005, 94: 034101.
[231] He Kaifen. Phys. Rev. Lett., 1998, 80: 696.
[232] He Kaifen. Nonlinear Processes in Geophysics, 2005, 12: 13.
[233] Boffetta G, Carbone V, Giuliani P, Veltri P and Vulpiani. Phys. Rev. Lett., 1999, 83.4662.
[234] Meiss J D and Horton W. Phys. Fluids, 1982, 25: 1838.
[235] He Kaifen. Phys. Rev. Lett., 2000, 84: 3290.
[236] He Kaifen, Chian A C L. Phys. Rev. Lett., 2003, 91: 034102.
[237] He Kaifen. Phys. Rev., 1999, E59: 5278.
[238] He Kaifen. Space Sci. Rev., 2003, 107: 475.
[239] He Kaifen. Phys. Lett., 1997, A231: 65.
[240] Strogatz S H. Nature, 2001, 410: 108.
[241] He Kaifen. Phys. Rev., 2001, E63: 016218.
[242] Reichl L E. A Modern Course in Statistical Physics. Texas: University of Texas Press, 1980(中译本：L. E. 雷克著. 统计物理现代教程. 黄昀，夏蒙棼，仇韵清，赵凯华译校. 北京：北京大学出版社，1983).
[243] He Kaifen and Chian A C L. Phys. Rev., 2004, E69: 026207.
[244] Kandel E R, Schwartz J H and Jessell T M. Principles of Neural Sciences. New York: The McGraw-Hill Companies Inc., 2000.
[245] Haken H. Principles of Brain Functioning: A Synergetic Approach to Brain Activity, Behaviors and Cognition. Berlin: Springer-Verlag, 1996(中译本：H. 哈肯著. 大脑工作原理——脑活动、行为和认知的协同学研究. 郭治安，吕翎译. 上海：上海科学技术出版社，2000).